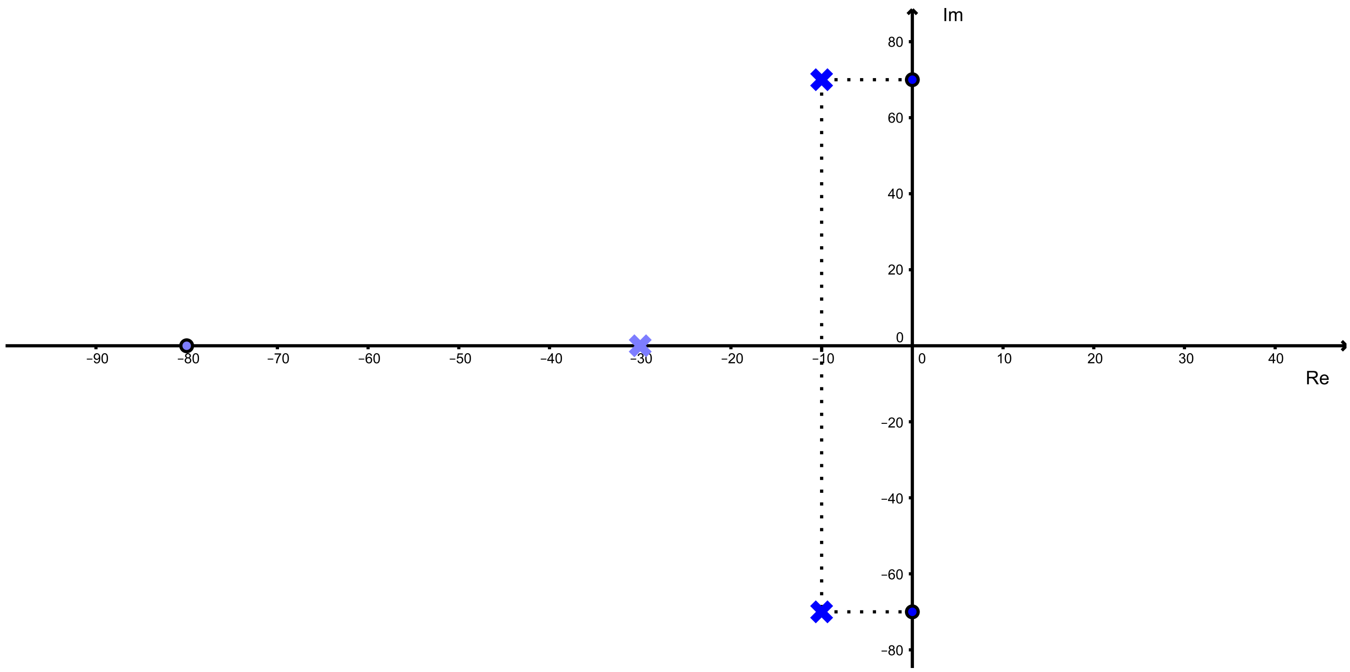
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2016-17
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Λυμένες Ασκήσεις σε Μετασχ. Laplace και Συστήματα

Άσκηση 1
Το διάγραμμα πόλων (X) και μηδενικών (O) μιας συνάρτησης μεταφοράς φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Να γραφεί η αναλυτική έκφραση της συνάρτησης αν είναι $H(-50) = -3$.

Λύση:
Από το διάγραμμα φαίνεται ότι η συνάρτηση μεταφοράς έχει ένα μηδενικό $z = -80$ και τρεις πόλους $p_1 = -30$, $p_{2,3} = -10 \pm j70$. Επομένως, η γενική μορφή της συνάρτησης μεταφοράς είναι:

$$H(s) = K\frac{s+80}{(s+30)[(s+10)^2+70^2]} = K\frac{s+80}{(s+30)(s^2+20s+5000)}$$

Για $s = -50$ έχουμε

$$-3 = K\frac{-50+80}{(-50+30)[(-50)^2+20(-50)+5000]} = K\frac{30}{(-20)(2500+4000)}$$

από όπου βρίσκουμε την τιμή της σταθεράς K=13000. Η αναλυτική έκφραση της συνάρτησης μεταφοράς επομένως είναι

$$H(s) = \frac{13000 + 1040000}{(s+30)(s^2+20s+5000)}$$

Άσκηση 2
Να υπολογιστεί η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος που περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\ddot{y}(t) + 10\dot{y}(t) + 5y(t) = 2\dot{x}(t) + x(t)$$

και να βρεθεί η τιμή της για $s = 0$.

Λύση:
Ο μετασχηματισμός Laplace των δυο μελών της διαφορικής εξίσωσης δίνει

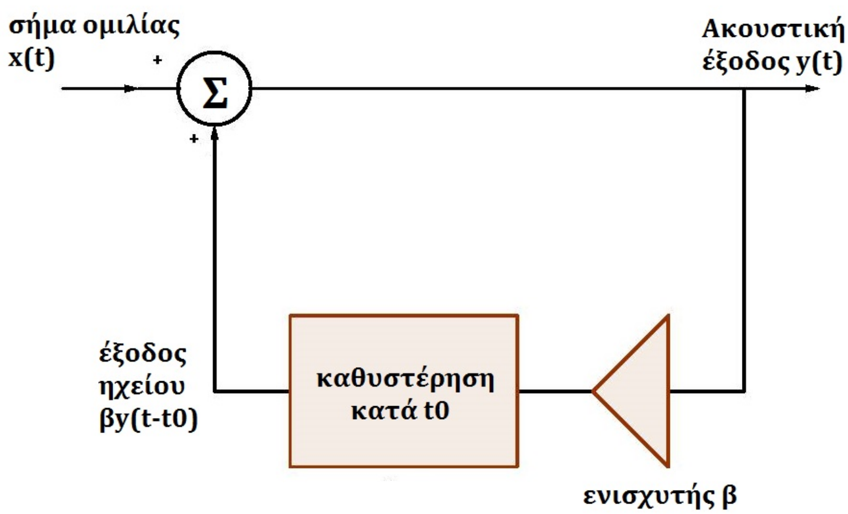
$$(s^2 + 10s + 5)Y(s) = (2s + 1)X(s)$$

από όπου η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{2s + 1}{s^2 + 10s + 5}$$

Για $s = 0$ είναι $H(0) = \frac{1}{5}$.

Άσκηση 3
Το παρακάτω μπλοκ διάγραμμα περιγράφει τη διαδικασία ακουστικής ανάδρασης. Υπολογίστε τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος αν είναι $\beta \geq 1$.



Λύση:
Η έξοδος του συστήματος ισούται με

$$y(t) = x(t) + \beta y(t - t_0)$$

Έστω $x(t) = \delta(t)$ με μετασχ. Laplace $\Delta(s) = 1, \ \forall s$
Παίρνοντας το μετασχηματισμό Laplace και των δυο μελών έχουμε

$$H(s) = 1 + \beta e^{-st_0} H(s) \rightarrow H(s) = \frac{1}{1 - \beta e^{-st_0}}$$

Άσκηση 4
Για το σύστημα που περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy^2}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

να βρεθεί η έξοδος αν $x(t) = u(t)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Λύση:
Παίρνοντας το μονόπλευρο μετασχηματισμό Laplace και των δυο μελών της διαφορικής εξίσωσης έχουμε

$$[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] + 3[sY(s) - y(0)] + 2Y(s) = X(s)$$

Αντικαθιστώντας τις αρχικές συνθήκες, η έξοδος του συστήματος προκύπτει ως

$$\begin{aligned} Y(s) &= Y_{zs}(s) + Y_{zi}(s) \\ &= H(s)X(s) + Y_{zi}(s) \\ &= \frac{1}{s^2+3s+2}X(s) + \frac{s+3}{s^2+3s+2} \end{aligned}$$

όπου, επειδή $x(t) = u(t)$, είναι $X(s) = \frac{1}{s}$, $\Re\{s\} > 0$. Από την παραπάνω έκφραση συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι η

$$H(s) = \frac{1}{s^2+3s+2}$$

Με την αντικατάσταση $X(s) = \frac{1}{s}$ ο μετασχηματισμός Laplace της εξόδου είναι ο

$$Y(s) = \frac{s^2+3s+1}{s(s+1)(s+2)} = \frac{1}{2}\frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{s+2}$$

Η αντιστροφή του μετασχηματισμού - δεδομένου ότι το σύστημα είναι αιτιατό - δίνει

$$y(t) = (0.5 + e^{-t} - 0.5e^{-2t})u(t)$$

Άσκηση 5
Για το σύστημα που περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy^2}{dt^2} + 7\frac{dy}{dt} + 12y(t) = 12x(t)$$

να βρεθεί η συνολική λύση της διαφορικής, η έξοδος μηδενικής εισόδου και η έξοδος μηδενικής κατάστασης, η συνάρτηση μεταφοράς, και η κρουστική απόκριση, αν $x(t) = 2e^{-t}u(t)$, $y(0) = 5$, $y'(0) = 0$.

Λύση:
Παίρνοντας το μονόπλευρο μετασχηματισμό Laplace και των δυο μελών της διαφορικής εξίσωσης έχουμε

$$[s^2Y(s) - 5s] + 7[sY(s) - 5] + 12Y(s) = 12X(s)$$

$$(s^2 + 7s + 12)Y(s) = 12X(s) + 5s + 35$$

Ο μετασχηματισμός Laplace της εξόδου προκύπτει ως

$$\begin{aligned} Y(s) &= Y_{zs}(s) + Y_{zi}(s) \\ &= H(s)X(s) + Y_{zi}(s) \\ &= \frac{12}{s^2+7s+12}X(s) + \frac{5s+35}{s^2+7s+12} \end{aligned}$$

- <u>συνολική λύση</u>: Αντικαθιστώντας $X(s) = \frac{2}{s+1}$, είναι

$$Y(s) = \frac{5s^2+40s+59}{(s+1)(s+3)(s+4)} = \frac{4}{s+1} + \frac{8}{s+3} - \frac{7}{s+4}$$

  από όπου έχουμε

$$y(t) = (4e^{-t} + 8e^{-3t} - 7e^{-4t})u(t)$$

- <u>έξοδος μηδενικής εισόδου</u>: Η έξοδος μηδενικής εισόδου υπολογίζεται ως

$$y_{zi}(t) = L^{-1}\Big\{\frac{5s+35}{s^2+7s+12}\Big\} = L^{-1}\Big\{\frac{20}{s+3} - \frac{15}{s+4}\Big\} = (20e^{-3t} - 15e^{-4t})u(t)$$

- <u>έξοδος μηδενικής κατάστασης</u>: Η έξοδος μηδενικής κατάστασης υπολογίζεται ως

$$\begin{aligned} y_{zs}(t) &= L^{-1}\Big\{H(s)X(s)\Big\} \\ &= L^{-1}\Big\{\frac{24}{(s+1)(s^2+7s+12)}\Big\} \\ &= L^{-1}\Big\{\frac{4}{s+1} - \frac{12}{s+3} + \frac{8}{s+4}\Big\} \\ &= (4e^{-t} - 12e^{-3t} + 8e^{-4t})u(t) \end{aligned}$$

- <u>συνάρτηση μεταφοράς και κρουστική απόκριση</u>: Είναι

$$H(s) = \frac{12}{s^2+7s+12)} = \frac{12}{(s+3)(s+4)} = \frac{12}{s+3} - \frac{12}{s+4}$$

  Επομένως, η κρουστική απόκριση του συστήματος είναι η

$$h(t) = (12e^{-3t} - 12e^{-4t})u(t)$$

Άσκηση 6

Ένα ΓΧΑ σύστημα έχει κρουστική απόκριση $h(t) = \delta(t) - 2e^{-t}u(t)$. Πόσες και ποιες διαφορετικές είσοδοι σε αυτό το σύστημα μπορούν να παράξουν την έξοδο $y(t) = e^{-2t}u(t)$;

Λύση:

Θα εργαστούμε στο πεδίο της μιγαδικής συχνότητας s. Για το λόγο αυτό θα υπολογίσουμε τη συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ του συστήματος, από το μετασχηματισμό Laplace της κρουστικής απόκρισης $h(t)$. Είναι:

$$H(s) = 1 - \frac{2}{s+1} = \frac{s-1}{s+1}$$

με περιοχή σύγκλισης $\Re\{s\} > -1$.

Ο μετασχηματισμός Laplace $Y(s)$ της εξόδου $y(t) = e^{-2t}u(t)$ είναι

$$Y(s) = \frac{1}{s+2},\ \ \Re\{s\} > -2$$

Για να υπολογίσουμε το σήμα εισόδου $x(t)$, βρίσκουμε το $X(s)$ από τη σχέση

$$X(s) = \frac{Y(s)}{H(s)} = \frac{\frac{1}{s+2}}{\frac{s-1}{s+1}} = \frac{s+1}{(s+2)(s-1)} = \frac{1}{3}\frac{1}{s+2} + \frac{2}{3}\frac{1}{s-1}$$

Η συνάρτηση $X(s)$ έχει δυο πόλους ($s = -2$ και $s = 1$), από τη θέση των οποίων προκύπτουν οι πιθανές περιοχές σύγκλισης $\{\Re\{s\} < -2\}$, $\{-2 < \Re\{s\} < 1\}$ και $\{\Re\{s\} > 1\}$.

(α') Για $\Re\{s\} < -2$, αμφότεροι οι όροι είναι αριστερής πλευράς

$$x_1(t) = -\frac{1}{3}e^{-2t}u(-t) - \frac{2}{3}e^{t}u(-t)$$

(β') Για $-2 < \Re\{s\} < 1$, ο πρώτος όρος είναι δεξιάς πλευράς και ο δεύτερος ειναι αριστερής πλευράς

$$x_2(t) = \frac{1}{3}e^{-2t}u(t) - \frac{2}{3}e^{t}u(-t)$$

(γ') Για $\Re\{s\} > 1$, αμφότεροι οι όροι είναι δεξιάς πλευράς

$$x_3(t) = \frac{1}{3}e^{-2t}u(t) + \frac{2}{3}e^{t}u(t)$$

Για να καθορίσουμε ποια από τα παραπάνω σήματα θα μπορούσε να είχε παράγει τη δοθείσα έξοδο, πρέπει να λάβουμε υπόψη μας τις περιοχές σύγκλισης.

- Το σύστημα $H(s)$ συγκλίνει για $\Re\{s\} > -1$. Αφού η συνάρτηση $X_1(s)$ συγκλίνει μόνο για $\Re\{s\} < -2$, δεν υπάρχει κοινή επικαλυπτόμενη περιοχή σύγκλισης, άρα αποκλείεται το σήμα από τις πιθανές λύσεις.

- Η περιοχή σύγκλισης της συνάρτησης $X_2(s)$ είναι $-2 < \Re\{s\} < 1$, η οποία τέμνεται με την περιοχή σύγκλισης της $H(s)$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ο μετασχ. Laplace της εξόδου αλλά πρέπει να είναι τέτοιος ώστε να δίνει αιτιατό $y(t)$, όπως στην εκφώνηση. Είναι

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{s-1}{s+1}\frac{s+1}{(s+2)(s-1)} = \frac{1}{s+2}$$

  με $R_Y \supseteq \{-2 < \Re\{s\} < 1\} \cap \{\Re\{s\} > -1\} = \{-1 < \Re\{s\} < 1\}$. Όμως το $Y(s)$ έχει μόνο έναν πόλο, στη θέση $s = -2$, και το πεδίο σύγκλισης της εξόδου, $\{\Re\{s\} > -2\}$, είναι πράγματι υπερσύνολο του $\{-1 < \Re\{s\} < 1\}$, οπότε πράγματι η είσοδος $x_2(t)$ μπορεί να είναι έγκυρη είσοδος.

- Η περιοχή σύγκλισης της συνάρτησης $X_3(s)$ είναι $\Re\{s\} > 1$, η οποία επίσης τέμνεται με την περιοχή σύγκλισης της $H(s)$, με παρόμοιο σκεπτικό με το προηγούμενο ερώτημα. Για το λόγο αυτό, και το σήμα $x_3(t)$ μπορεί να είναι είσοδος.

Επομένως αποδεκτές είσοδοι είναι τα σήματα $x_2(t)$ και $x_3(t)$.

Άσκηση 7

Δίνεται ένα ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση $h(t) = e^{-2t}u(t)$, το οποίο δέχεται ως είσοδο το σήμα $x(t) = e^{-t}u(t)$. Να προσδιοριστούν

(α') Οι μετασχηματισμοί Laplace $H(s)$ και $X(s)$.

(β') Ο μετασχηματισμός Laplace $Y(s)$ εξόδου $y(t)$.

(γ') Η έξοδος $y(t)$ με χρήση του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace του $Y(s)$.

(δ') Η έξοδος $y(t)$ χρήση της συνέλιξης $y(t) = h(t) * x(t)$ επαληθεύοντας έτσι το αποτέλεσμα του προηγούμενου ερωτήματος.

Λύση :

(α') Από τον ορισμό του μετασχηματισμού Laplace , έχουμε

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-st}dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-(s+2)t}u(t)dt = \left[\frac{e^{-(s+2)t}}{-(s+2)}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{s+2}$$

και

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-(s+1)t}u(t)dt = \left[\frac{e^{-(s+1)t}}{-(s+1)}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{s+1}$$

με περιοχές σύγκλισης $\{\Re\{s\} > -2$ και $\{\Re\{s\} > -1$.

(β΄) Η έξοδος του συστήματος δίνεται από τη συνέλιξη της κρουστικής απόκρισης με το εισόδου, δηλ. $y(t) = h(t) * x(t)$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα της συνέλιξης του μετασχηματισμού Laplace έχουμε

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

με περιοχή σύγκλισης $\{\Re\{s\} > -1$, που είναι η τομή των περιοχών σύγκλισης των μετασχηματισμών $H(s)$ και $X(s)$.

(γ΄) Εφαρμόζοντας τη μέθοδο της ανάλυσης της συνάρτησης $Y(s)$ σε άθροισμα μερικών κλασμάτων, έχουμε

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

και ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace είναι το άθροισμα των αντίστροφων μετασχηματισμών κάθε επιμέρους κλάσματος, δηλ.

$$y(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

εφόσον τα επιμέρους πεδία σύγκλισης είναι δεξιόπλευρα.

(δ΄) Χρησιμοποιώντας τη σχέση της συνέλιξης έχουμε

$$\begin{aligned}
y(t) = h(t) * x(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)x(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2(t-\tau)}u(t-\tau)e^{-t}u(\tau)d\tau \\
&= \int_0^t e^{-2t}e^{-2\tau}e^{-\tau}d\tau = e^{-2t}\int_0^t e^{\tau}d\tau = e^{-2t}[e^{\tau}]_0^t = e^{-2t}(e^t - 1) \\
&= (e^{-t} - e^{-2t})u(t)
\end{aligned}$$

καταλήγουμε έτσι στο ίδιο αποτέλεσμα του ερωτήματος (γ΄).