

**HY-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς**  
**Εαρινό Εξάμηνο 2016-17**

**Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής**

**Λυμένες Ασκήσεις - Μετασχηματισμός Laplace**

1. Έστω το σήμα

$$x(t) = \begin{cases} A, & 0 < t < T \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (1)$$

(α) Να υπολογίσετε το μετασχ. Fourier του.

(β) Να υπολογίσετε το μετασχ. Laplace του. Επιβεβαιώστε το αποτέλεσμα του προηγούμενου ερωτήματος, χρησιμοποιώντας τον μετασχ. Laplace.

Λύση:  
Είναι

(α) Είναι

$$x(t) = A \operatorname{rect}\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right) \longleftrightarrow X(f) = AT \operatorname{sinc}(fT) e^{-j2\pi fT/2} = AT \operatorname{sinc}(fT) e^{-j\pi fT} \quad (2)$$

(β) Είναι

$$X(s) = \int_0^T A e^{-st} dt = \frac{A}{-s} e^{-st} \Big|_0^T = -\frac{A}{s} (e^{-sT} - 1) = \frac{A}{s} (1 - e^{-sT}) \quad (3)$$

Επειδή το σήμα είναι πεπερασμένης διάρκειας, το πεδίο σύγκλισής του είναι όλο το  $s$ -επίπεδο.

Επειδή το πεδίο σύγκλισης περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα, ας βρούμε το μετασχ. Fourier μέσω του μετασχ. Laplace που μόλις υπολογίσαμε. Είναι

$$\begin{aligned} X(s) \Big|_{\sigma=0} &= \frac{A}{j2\pi f} (1 - e^{-j2\pi fT}) = \frac{A}{j2\pi f} e^{-j2\pi fT/2} (e^{j2\pi fT/2} - e^{-j2\pi fT/2}) \\ &= \frac{A}{j2\pi f} e^{-j2\pi fT/2} 2j \sin\left(\frac{2\pi fT}{2}\right) \\ &= \frac{A}{\pi f} e^{-j\pi fT} \sin(\pi fT) \\ &= \frac{AT}{\pi fT} e^{-j\pi fT} \sin(\pi fT) \\ &= AT \operatorname{sinc}(fT) e^{-j\pi fT} \end{aligned} \quad (4)$$

που είναι το ίδιο ακριβώς αποτέλεσμα με αυτό που υπολογίσαμε παραπάνω.

2. Υπολογίστε το μετασχ. Laplace του σήματος

$$x(t) = e^{\alpha t} u(t) + e^{2\alpha t} u(-t), \quad \alpha > 0 \quad (5)$$

Υπολογίζεται για το σήμα αυτό ο μετασχ. Fourier μέσω του μετασχ. Laplace; Αν ναι, βρείτε τον. Αν όχι, εξηγήστε.

Λύση:

Είναι

$$\begin{aligned}
X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{(a-s)t} dt + \int_{-\infty}^0 e^{(2a-s)t} dt \\
&= \frac{1}{a-s} e^{(a-s)t} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{2a-s} e^{(2a-s)t} \Big|_{-\infty}^0 \\
&= \frac{1}{a-s} \left( \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{(a-s)t} - 1 \right) + \frac{1}{2a-s} \left( 1 - \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{(2a-s)t} \right) \quad (\text{πρέπει } \Re\{a-s\} < 0 \text{ και } \Re\{2a-s\} > 0) \\
&= \frac{1}{a-s} (0 - 1) + \frac{1}{2a-s} (1 - 0) \\
&= -\frac{1}{a-s} + \frac{1}{2a-s} = \frac{a-s-2a+s}{(2a-s)(a-s)} = \frac{-a}{(s-2a)(s-a)} \tag{6}
\end{aligned}$$

αν  $a - \Re\{s\} < 0$  και  $2a - \Re\{s\} > 0 \iff a < \Re\{s\} < 2a$ .

Τα δυο πεδία σύγκλισης προέκυψαν απ' τους γνωστούς περιορισμούς στα ολοκληρώματα, όταν  $t = \pm\infty$ , ώστε αυτά να συγκλίνουν. Επειδή έχουμε άθροισμα σημάτων, το πεδίο σύγκλισης θα είναι (τουλάχιστον) η τομή των επιμέρους πεδίων σύγκλισης. Βλέπουμε ότι το πεδίο σύγκλισης είναι μια "λωρίδα" στο μιγαδικό επίπεδο, πράγμα που αναμενόταν, μια και έχουμε να κάνουμε με *αμφίπλευρο* σήμα.

Ο μετασχηματισμός Fourier δεν μπορεί να υπολογιστεί μέσω του μετασχ. Laplace, γιατί το πεδίο σύγκλισης δεν περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα  $\Re\{s\} = \sigma = 0$ , για καμιά τιμή του  $a$ .

### 3. Δείξτε ότι ο μετασχ. Laplace του σήματος

$$\mathbf{x}(t) = t e^{-\alpha t} \mathbf{u}(t), \quad \alpha > 0$$

είναι ο

$$\mathbf{X}(s) = \frac{1}{(s + \alpha)^2}, \quad \Re\{s\} > -\alpha$$

$$\text{Δίνεται ότι } \int t e^{-\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha^2} e^{-\alpha t} (-\alpha t - 1)$$

Λύση:

Είναι

$$\begin{aligned}
X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} t e^{-\alpha t} u(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} t e^{-(a+s)t} dt \\
&= \frac{e^{-(a+s)t}}{(a+s)^2} \left( -(a+s)t - 1 \right) \Big|_0^{+\infty} \\
&= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left( -\frac{t e^{-(a+s)t}}{a+s} - \frac{e^{-(a+s)t}}{(a+s)^2} \right) + \frac{1}{(a+s)^2} \\
&= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-t e^{-(a+s)t}}{a+s} - \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{-(a+s)t}}{(a+s)^2} + \frac{1}{(a+s)^2} \\
&= \frac{1}{a+s} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-t}{e^{(a+s)t}} - 0 + \frac{1}{(a+s)^2} \\
&= \frac{1}{(a+s)^2} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-1}{e^{(a+s)t}} + \frac{1}{(a+s)^2} \\
&= 0 + \frac{1}{(a+s)^2} = \frac{1}{(a+s)^2}, \quad \text{αν } \Re\{s\} + a > 0 \iff \Re\{s\} > -a. \tag{7}
\end{aligned}$$

Εδώ, το πεδίο σύγκλισης προέκυψε από τους γνωστούς περιορισμούς, ώστε τα όρια να φθίνουν στο μηδέν. Επίσης, στο τελευταίο όριο, εφαρμόσαμε τον κανόνα του De L' Hospital για να το λύσουμε.

## 4. Δείξτε ότι ο μετασχ. Laplace του σήματος

$$x(t) = tu(t)$$

είναι

$$X(s) = \frac{1}{s^2}, \quad \Re\{s\} > 0.$$

$$\text{Δίνεται ότι } \int te^{-at} dt = \frac{1}{a^2} e^{-at} (-at - 1)$$

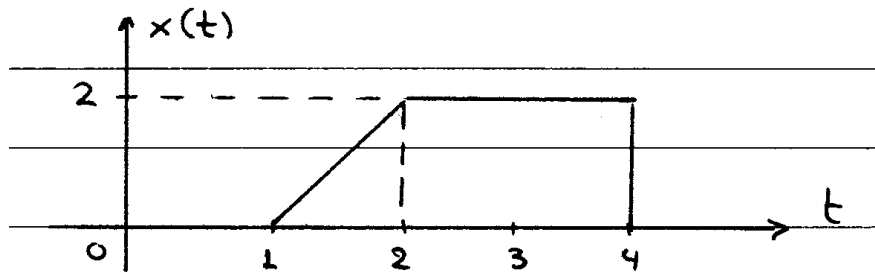
Λύση:

Είναι

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} tu(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} te^{-st} dt = \frac{e^{-st}}{s^2} (-st - 1) \Big|_0^{\infty} = \left( -\frac{te^{-st}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2} \right) \Big|_0^{\infty} \\ &= -\frac{te^{-st}}{s} \Big|_0^{\infty} - \frac{e^{-st}}{s^2} \Big|_0^{\infty} = -\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{te^{-st}}{s} + \frac{1}{s^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^{st}} + \frac{1}{s^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{se^{st}} + \frac{1}{s^2} = 0 + \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2}, \quad \Re\{s\} > 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Εδώ και πάλι χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα του De L'Hospital, ενώ το πεδίο σύγκλισης προκύπτει κατά τα γνωστά (πλέον :-).

## 5. Δείξτε ότι ο μετασχ. Laplace του σήματος του Σχήματος 1 είναι ο



Σχήμα 1: Σχήμα Άσκησης 5

$$X(s) = \frac{2}{s^2} (e^{-s} - e^{-2s}) - \frac{2}{s} e^{-4s}$$

$$\text{Δίνεται ότι } \int te^{-at} dt = \frac{1}{a^2} e^{-at} (-at - 1)$$

Λύση:

1ος τρόπος:

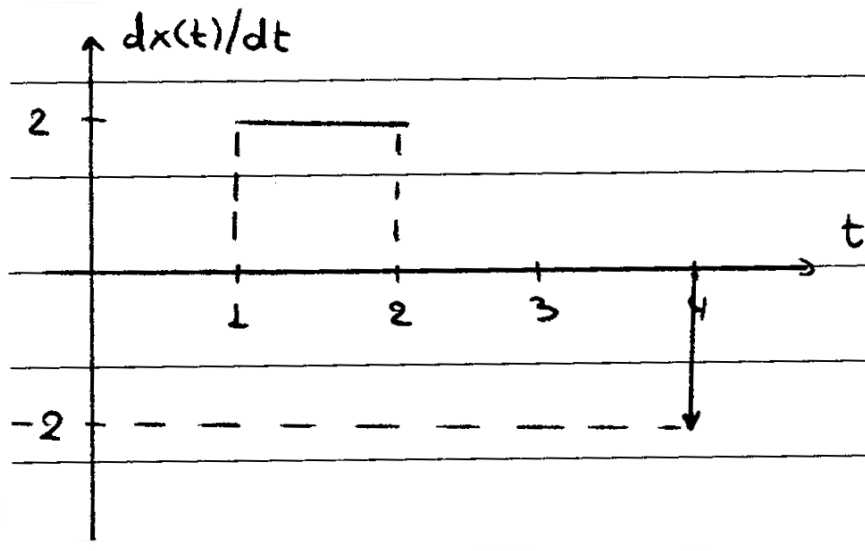
Είναι

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_1^2 (2t - 2)e^{-st} dt + \int_2^4 2e^{-st} dt = \int_1^2 2te^{-st} dt - \int_1^2 2e^{-st} dt + \int_2^4 2e^{-st} dt \\ &= 2 \frac{e^{-st}}{s^2} (-st - 1) \Big|_1^2 + 2 \frac{e^{-st}}{s} \Big|_1^2 - 2 \frac{e^{-st}}{s} \Big|_2^4 \\ &= -2 \frac{e^{-2s}}{s^2} + 2 \frac{e^{-s}}{s^2} - 2 \frac{e^{-4s}}{s} \\ &= \frac{2}{s^2} (e^{-s} - e^{-2s}) - \frac{2}{s} e^{-4s} \end{aligned} \quad (9)$$

Το πεδίο σύγκλισης είναι όλο το  $s$ -επίπεδο, αφού το  $x(t)$  είναι πεπερασμένης διάρκειας.

2ος τρόπος:

Είναι



Σχήμα 2: Παράγωγος Άσκησης 5

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= 2\text{rect}\left(\frac{t - \frac{3}{2}}{1}\right) - 2\delta(t - 4) \implies L\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = \frac{2}{s}e^{-\frac{3}{2}s}(e^{\frac{s}{2}} - e^{-\frac{s}{2}}) - 2e^{-4s} \\ &= \frac{2}{s}e^{-s} - \frac{2}{s}e^{-2s} - 2e^{-4s} \end{aligned} \quad (10)$$

Ισχύει ότι

$$L\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = sX(s) - x(0^-) = sX(s)$$

με το  $x(0^-)$  να προκύπτει από την ιδιότητα παραγωγίσισης του μονόπλευρου μετασχ. Laplace (που αφορά αιτιατά σήματα). Εδώ βέβαια δεν έχει κανένα αποτέλεσμα το  $x(0^-)$  αφού είναι ίσο με μηδέν. Άρα

$$\frac{2}{s}(e^{-s} - e^{-2s}) - 2e^{-4s} = sX(s) - x(0^-) \longleftrightarrow X(s) = \frac{2}{s^2}(e^{-s} - e^{-2s}) - \frac{2}{s}e^{-4s} \quad (11)$$

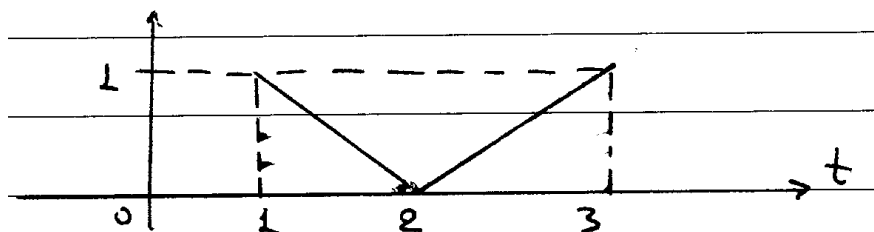
Ο δεύτερος τρόπος λύσης είναι πιο εύκολος, με την προϋπόθεση ότι θα παραγωγιστεί σωστά το Σχήμα και θα εφαρμόσετε σωστά την ιδιότητα.

### 6. Να υπολογιστεί ο μετασχ. Laplace του σήματος που φαίνεται στο Σχήμα 3.

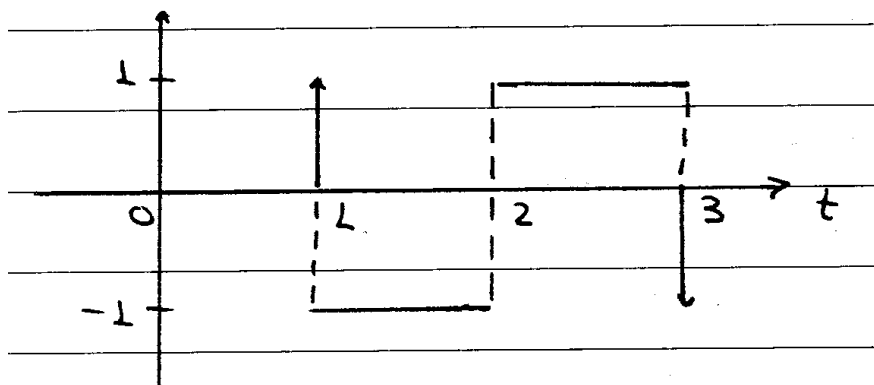
Λύση:

Παραγωγίζοντας, έχουμε το σήμα του Σχήματος 4. Είναι

$$\begin{aligned} sX(s) - x(0^-) &= L\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = L\left\{\delta(t - 1) - \text{rect}\left(\frac{t - \frac{3}{2}}{1}\right)\right\} + \text{rect}\left(\frac{t - \frac{5}{2}}{1}\right) - \delta(t - 3) \\ &= e^{-s} - \frac{1}{s}(1 - e^{-s}) + \frac{1}{s}(1 - e^{-s})e^{-2s} - e^{-3s} \longleftrightarrow \\ sX(s) &= e^{-s} - \frac{1}{s}e^{-s} + \frac{1}{s}e^{-2s} + \frac{1}{s}e^{-2s} - \frac{1}{s}e^{-3s} - e^{-3s} \\ &= e^{-s}\left(1 - \frac{1}{s}\right) + e^{-2s}\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s}\right) - e^{-3s}\left(\frac{1}{s} + 1\right) \longleftrightarrow \\ X(s) &= \frac{e^{-s}(s - 1)}{s^2} + 2\frac{e^{-2s}}{s^2} - \frac{e^{-3s}(s + 1)}{s^2} \end{aligned} \quad (12)$$



Σχήμα 3: Σχήμα Άσκησης 6



Σχήμα 4: Παράγωγος Σχήματος Άσκησης 6

ξανά παρατηρώντας ότι  $x(0^-) = 0$ . Το σήμα είναι πεπερασμένης διάρκειας, άρα το πεδίο σύγκλισης είναι όλο το  $s$ -επίπεδο.

7. Έστω

$$X(s) = \frac{3s + 5}{s^2 + 3s + 2}$$

με ROC :  $-2 < \Re\{s\} < -1$ . Βρείτε τον αντίστροφο μετασχ. Laplace,  $x(t)$ .

Λύση:

Προφανώς δε θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό για να βρούμε τον αντιστρ. μετασχ. Laplace, αλλά θα χρησιμοποιήσουμε ήδη γνωστά μας ζεύγη μετασχηματισμών, σπάζοντας το μεγάλο κλάσμα σε μικρότερα. Ισχύει ότι η τάξη του πολυωνύμου του αριθμητή είναι μικρότερη απ' την αντίστοιχη του παρονομαστή, άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα.

Είναι:

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{3s + 5}{s^2 + 3s + 2} = \frac{3s + 5}{(s + 1)(s + 2)} = \frac{A_1}{s + 1} + \frac{A_2}{s + 2} \\ A_1 &= X(s)(s + 1) \Big|_{s=-1} = \frac{3s + 5}{s + 2} \Big|_{s=-1} = 2 \\ A_2 &= X(s)(s + 2) \Big|_{s=-2} = \frac{3s + 5}{s + 1} \Big|_{s=-2} = 1 \end{aligned}$$

Άρα θα είναι

$$X(s) = 2 \frac{1}{s + 1} + \frac{1}{s + 2}$$

Οι επιμέρους πόλοι είναι οι  $s = -1$  και  $s = -2$ . Το πεδίο σύγκλισης δίδεται ότι είναι

$$ROC : -2 < \Re\{s\} < -1 \iff \{\Re\{s\} > -2\} \cap \{\Re\{s\} < -1\}$$

με  $\{\Re\{s\} > -2\}$  και  $\{\Re\{s\} < -1\}$  να είναι τα επιμέρους πεδία σύγκλισης των μερικών κλασμάτων. Η τομή τους δίνει πράγματι το δοσμένο στην εκφώνηση πεδίο σύγκλισης. Άρα, γνωρίζοντας ότι το  $X(s)$  είναι άθροισμα δυο σημάτων της παραπάνω μορφής, με πεδία σύγκλισης τα δυο παραπάνω, θέλουμε να βρούμε τα δυο σήματα στο χρόνο. Από τους πίνακες των ζευγών μετασχηματισμών, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} e^{-2t}u(t) &\longleftrightarrow \frac{1}{s+2}, \quad \Re\{s\} > -2 \\ -e^{-t}u(-t) &\longleftrightarrow \frac{1}{s+1}, \quad \Re\{s\} < -1 \end{aligned}$$

Άρα τελικά

$$x(t) = e^{-2t}u(t) - 2e^{-t}u(-t) \quad (13)$$

είναι το σήμα που ψάχνουμε.

### 8. Να υπολογιστεί ο αντίστροφος μετασχ. Laplace του σήματος

$$X(s) = \frac{-3}{(s+2)(s-1)}$$

όταν:

(α)  $ROC : -2 < \Re\{s\} < 1$

(β)  $ROC : \Re\{s\} > 1$

(γ)  $ROC : \Re\{s\} < -2$

**Σε κάθε περίπτωση, σχεδιάστε την περιοχή σύγκλισης.**

Λύση:

Είναι

$$X(s) = \frac{-3}{(s+2)(s-1)} = \frac{A_1}{s+2} + \frac{A_2}{s-1}$$

με

$$A_1 = X(s)(s+2) \Big|_{s=-2} = \frac{-3}{s-1} \Big|_{s=-2} = 1$$

$$A_2 = X(s)(s-1) \Big|_{s=1} = \frac{-3}{s+2} \Big|_{s=1} = -1$$

Ανάλογα με τα πεδία σύγκλισης που δίνονται, θα καθοριστεί και το σήμα στο χρόνο που θα προκύψει.

(α) Άρα

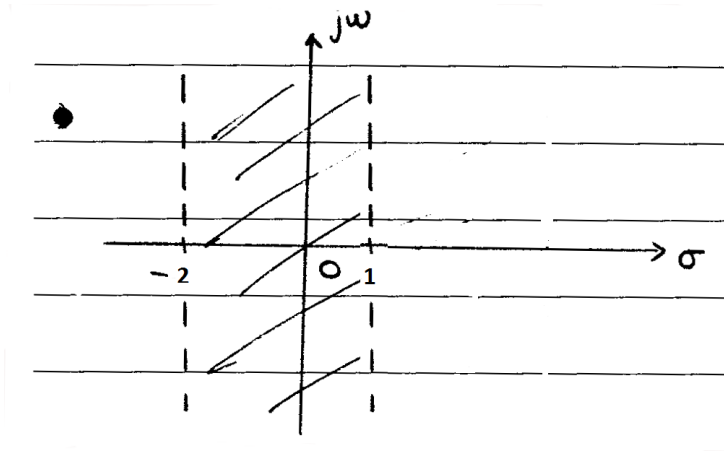
$$X(s) = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s-1} \xrightarrow[-L^{-1}]{-2 < \Re\{s\} < 1 = \{-2 < \Re\{s\}\} \cap \{\Re\{s\} < 1\}} x(t) = e^{-2t}u(t) + e^t u(-t) \quad (14)$$

Το πεδίο σύγκλισης φαίνεται στο Σχήμα 5.

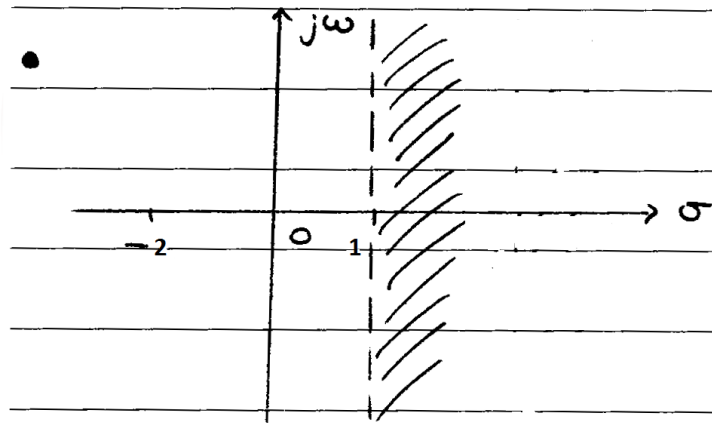
(β) Άρα

$$X(s) = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s-1} \xrightarrow[-L^{-1}]{\Re\{s\} > 1 = \{\Re\{s\} > -2\} \cap \{\Re\{s\} > 1\}} x(t) = e^{-2t}u(t) - e^t u(t) \quad (15)$$

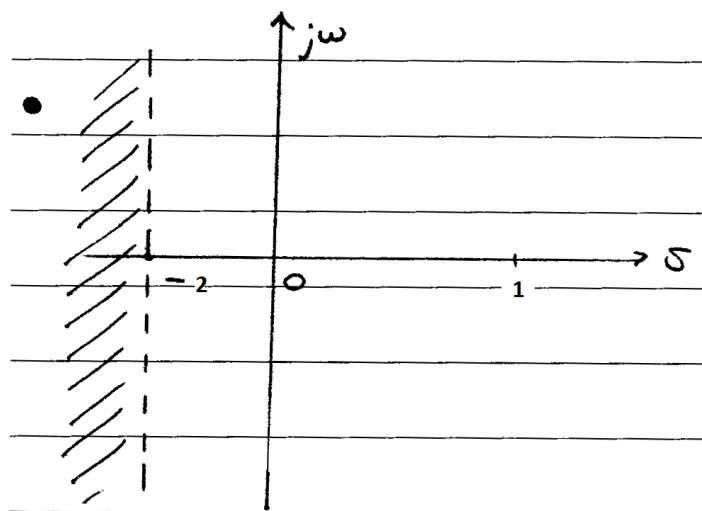
Το πεδίο σύγκλισης φαίνεται στο Σχήμα 6.



Σχήμα 5: 1ο Πεδίο Σύγκλισης Άσκησης 8



Σχήμα 6: 2ο Πεδίο Σύγκλισης Άσκησης 8



Σχήμα 7: 3ο Πεδίο Σύγκλισης Άσκησης 8

(γ) Άρα

$$X(s) = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s-1} \xrightarrow{\mathcal{R}\{s\} < -2 = \{\mathcal{R}\{s\} < -2\} \cap \{\mathcal{R}\{s\} < 1\}} L^{-1}} x(t) = -e^{-2t}u(-t) + e^t u(-t) \quad (16)$$

Το πεδίο σύγκλισης φαίνεται στο Σχήμα 7.

### 9. Ο μετασχ. Laplace δίνεται από τη σχέση

$$X(s) = \frac{s+2}{s^2 - 2s - 3}$$

(α') Για όλα τα δυνατά πεδία σύγκλισης, βρείτε τον αντίστροφο μετασχ. Laplace,  $x(t)$ .

(β') Σε ποιά περίπτωση υπολογίζεται ο μετασχ. Fourier; Υπολογίστε τον.

Λύση:

Είναι

(α') Οι πόλοι του παρονομαστή είναι οι  $s_1 = 3, s_2 = -1$ , όπως εύκολα διαπιστώνουμε. Άρα

$$X(s) = \frac{s+2}{(s-3)(s+1)} = \frac{A_1}{s-3} + \frac{A_2}{s+1}$$

Τα  $A_1, A_2$  δίνονται από τις σχέσεις

$$A_1 = X(s)(s-3) \Big|_{s=3} = \frac{s+2}{s+1} \Big|_{s=3} = \frac{5}{4}$$

$$A_2 = X(s)(s+1) \Big|_{s=-1} = \frac{s+2}{s-3} \Big|_{s=-1} = -\frac{1}{4}$$

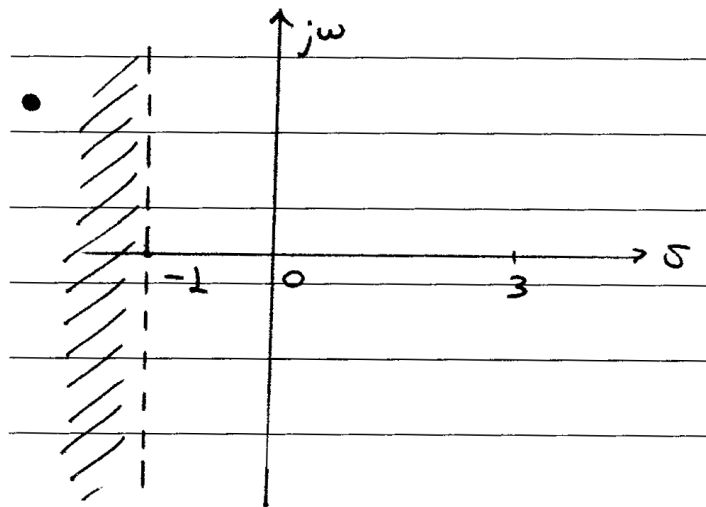
Άρα έχουμε

$$X(s) = -\frac{1}{4} \frac{1}{s+1} + \frac{5}{4} \frac{1}{s-3}$$

με πιθανά πεδία σύγκλισης τα

$$ROC = \begin{cases} \Re\{s\} < -1, \\ \Re\{s\} > 3, \\ -1 < \Re\{s\} < 3 \end{cases}$$

- Για την περίπτωση  $\Re\{s\} < -1$ , χρειαζόμαστε η τομή των πεδίων σύγκλισης των δυο σημάτων να μας δίνει το ημιεπίπεδο  $\sigma < -1$ . Αυτό γίνεται μόνον αν  $\{\Re\{s\} < 3\} \cap \{\Re\{s\} < -1\}$  (Σχήμα 8). Γι' αυτά τα



Σχήμα 8: Το Πεδίο Σύγκλισης Άσκησης 9



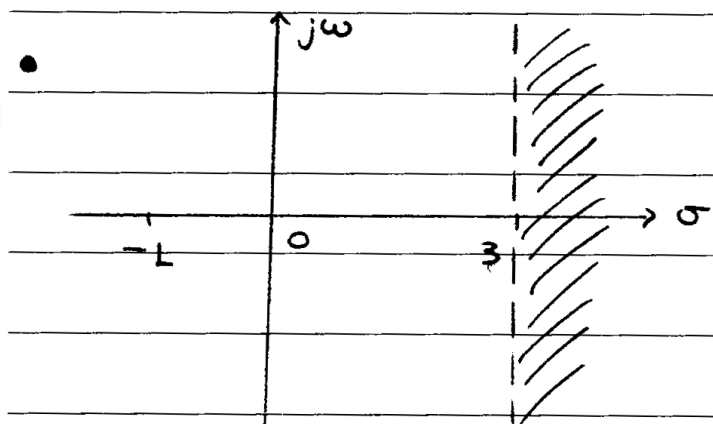
δυσ πεδία σύγκλισης, θα έχουμε

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}e^{-t}u(-t) &\xrightarrow[\mathcal{L}]{\Re\{s\} < -1} \frac{1}{4} \frac{1}{s+1} \\ -\frac{5}{4}e^{3t}u(-t) &\xrightarrow[\mathcal{L}]{\Re\{s\} < 3} \frac{5}{4} \frac{1}{s-3} \end{aligned}$$

Άρα το σήμα στο χρόνο θα είναι το

$$x(t) = \frac{1}{4}e^{-t}u(-t) - \frac{5}{4}e^{3t}u(-t) \quad (17)$$

- Για την περίπτωση  $\Re\{s\} > 3$ , χρειαζόμαστε η τομή των πεδίων σύγκλισης των δυο σημάτων να μας δίνει το ημιεπίπεδο  $\sigma > 3$ . Αυτό γίνεται μόνον αν  $\{\Re\{s\} > 3\} \cap \{\Re\{s\} > -1\}$  (Σχήμα 9). Γι' αυτά τα δυο



Σχήμα 9: 2ο Πεδίο Σύγκλισης Άσκησης 9

πεδία σύγκλισης, θα έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}e^{-t}u(t) &\xrightarrow[\mathcal{L}]{\Re\{s\} > -1} \frac{1}{4} \frac{1}{s+1} \\ \frac{5}{4}e^{3t}u(t) &\xrightarrow[\mathcal{L}]{\Re\{s\} > 3} \frac{5}{4} \frac{1}{s-3} \end{aligned}$$

Άρα το σήμα στο χρόνο θα είναι το

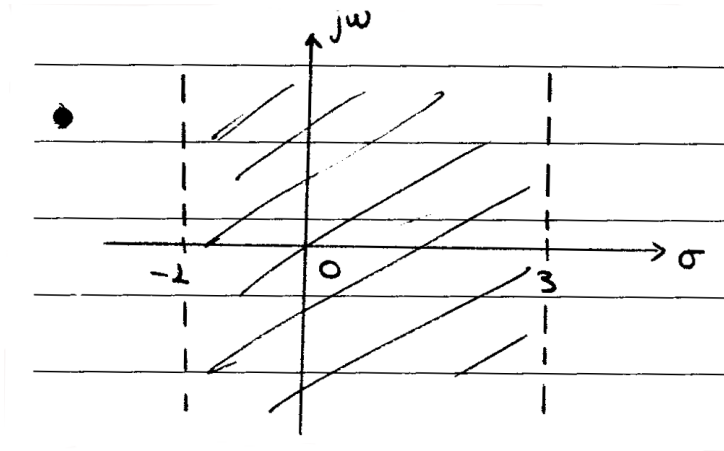
$$x(t) = -\frac{1}{4}e^{-t}u(t) + \frac{5}{4}e^{3t}u(t) \quad (18)$$

- Για την περίπτωση  $-1 < \Re\{s\} < 3$ , χρειαζόμαστε η τομή των πεδίων σύγκλισης των δυο σημάτων να μας δίνει το ημιεπίπεδο  $-1 < \sigma < 3$ . Αυτό γίνεται μόνον αν  $\{\Re\{s\} < 3\} \cap \{\Re\{s\} > -1\}$  (σχημα 10). Γι' αυτά τα δυο πεδία σύγκλισης, θα έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}e^{-t}u(t) &\xrightarrow[\mathcal{L}]{\Re\{s\} > -1} \frac{1}{4} \frac{1}{s+1} \\ -\frac{5}{4}e^{3t}u(-t) &\xrightarrow[\mathcal{L}]{\Re\{s\} < 3} \frac{5}{4} \frac{1}{s-3} \end{aligned}$$

Άρα το σήμα στο χρόνο θα είναι το

$$x(t) = -\frac{1}{4}e^{-t}u(t) - \frac{5}{4}e^{3t}u(-t) \quad (19)$$



Σχήμα 10: 3ο Πεδίο Σύγκλισης Άσκησης 9

(β) Ο μετασχηματισμός Fourier υπολογίζεται μόνο στην περίπτωση  $ROC = -1 < \Re\{s\} < 3$ , γιατί μόνο σε αυτό το πεδίο περιλαμβάνεται ο άξονας των φανταστικών,  $\sigma = 0$ .

Άρα για  $\sigma = 0$ , θα έχουμε

$$X(s) \Big|_{\sigma=0} = \frac{j2\pi f + 2}{(j2\pi f + 1)(j2\pi f - 3)} \quad (20)$$

#### 10. Υπολογίστε τη λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 7\frac{dy(t)}{dt} + 12y(t) = x(t)$$

με αρχικές συνθήκες  $y(0) = 0$ ,  $\frac{dy(t)}{dt} \Big|_{t=0} = -2$  και  $x(t) = u(t)$ .



Σχήμα 11: Really??

Λύση:

Παίρνουμε το μετασχ. Laplace των δυο μερών της εξίσωσης:

$$\begin{aligned}
 L\left\{\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right\} + 7L\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\} + 12L\{y(t)\} &= L\{x(t)\} \\
 s^2Y(s) - sy(0^-) - y'(0) + 7sY(s) - 7y(0^-) + 12Y(s) &= X(s) \\
 s^2Y(s) - (-2) + 7sY(s) + 12Y(s) &= X(s) \\
 Y(s)(s^2 + 7s + 12) &= X(s) - 2 \\
 Y(s) &= \frac{1 - 2s}{s(s^2 + 7s + 12)} \\
 Y(s) &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s+4} + \frac{C}{s+3}
 \end{aligned} \tag{21}$$

Θα είναι

$$\begin{aligned}
 A &= Y(s)s \Big|_{s=0} = \frac{1}{12} \\
 B &= Y(s)(s+4) \Big|_{s=-4} = -9 \\
 C &= Y(s)(s+3) \Big|_{s=-3} = 7
 \end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned}
 Y(s) &= \frac{1}{12} \frac{1}{s} - 9 \frac{1}{s+4} + 7 \frac{1}{s+3} \rightarrow \\
 y(t) &= \frac{1}{12} u(t) - 9e^{-4t} u(t) + 7e^{-3t} u(t) \\
 &= \left( \frac{1}{12} - 9e^{-4t} + 7e^{-3t} \right) u(t)
 \end{aligned} \tag{22}$$

Παρατήρηση:

Χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα

$$L\left\{\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right\} = s^n X(s) - s^{n-1}x(0^-) - \dots - x^{(n-1)}(0^-) = s^n X(s) - \sum_{i=1}^n s^{n-i} x^{(i-1)}(0^-)$$

### 11. Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχ. Laplace της

$$X(s) = \frac{3s + 2}{s^2 + 2s + 10}$$

Λύση:

Είναι

$$\begin{aligned}
 X(s) &= \frac{3s + 2}{s^2 + 2s + 10} = \frac{3s + 2}{(s - (-1 + 3j))(s - (-1 - 3j))} \\
 &= \frac{A}{s - (-1 + 3j)} + \frac{A^*}{s - (-1 - 3j)}
 \end{aligned}$$

Τα  $A, A^*$  δίνονται από

$$\begin{aligned}
 A &= X(s)(s - (-1 + 3j)) \Big|_{s=-1+3j} = \frac{3s + 2}{s - (-1 - 3j)} \Big|_{s=-1+3j} = \frac{3}{2} + j\frac{1}{6} \\
 A^* &= \frac{3}{2} - j\frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

Οπότε

$$X(s) = \left(\frac{3}{2} + j\frac{1}{6}\right) \frac{1}{s - (-1 + 3j)} + \left(\frac{3}{2} - j\frac{1}{6}\right) \frac{1}{s - (-1 - 3j)}$$

Οι πιθανοί πόλοι είναι οι  $s_0 = -1 - 3j$ ,  $s_1 = s_0^* = -1 + 3j$ , οι οποίοι βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία,  $\sigma = -1$ . Άρα τα πιθανά πεδία σύγκλισης είναι τα  $\Re\{\sigma\} > -1$ ,  $\Re\{\sigma\} < -1$ . Ανάλογα με αυτά τα πεδία σύγκλισης, θα έχουμε και τα αντίστοιχα  $x(t)$ . Βρείτε τα! :-)

## 12. Για ένα σήμα και το μετασχ. Laplace του γνωρίζετε ότι:

(α) το σήμα στο χρόνο είναι πραγματικό και άρτιο

(β) έχει 4 πόλους και κανένα μηδενικό στο μιγαδικό επίπεδο

(γ) ένας πόλος βρίσκεται στο  $s = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$

(δ)  $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt = 4$

Βρείτε το  $X(s)$ .

Λύση:

Προφανώς το  $X(s)$  θα είναι της μορφής:

$$X(s) = \frac{A}{(s - s_1)(s - s_2)(s - s_3)(s - s_4)}$$

Δίδεται όμως ότι το σήμα είναι πραγματικό και άρτιο, άρα θα είναι

$$x(t) = x^*(t) \longleftrightarrow X(s) = X^*(s^*) \text{ και } x(t) = x(-t) \longleftrightarrow X(s) = X(-s)$$

Άρα αν έχει έναν πόλο στη θέση  $s_k$ , θα έχει επίσης έναν πόλο στη θέση  $-s_k$  (από τη σχέση του άρτιου σήματος). Όμοια, αν έχει έναν πόλο στη θέση  $-s_k$  θα έχει επίσης έναν πόλο στη θέση  $-s_k^*$  (από τη σχέση του πραγματικού σήματος). Γνωρίζουμε ότι έχει έναν πόλο  $s_1$ , άρα θα έχει κι έναν  $-s_1$ , κι έναν  $-s_1^*$  και έναν  $s_1^*$ . Οπότε το σήμα θα γράφεται:

$$X(s) = \frac{A}{(s - s_1)(s - s_1^*)(s + s_1)(s + s_1^*)}$$

Μένει να βρούμε το  $A$ .

Δίνεται ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt = 4$$

Όμως ξέρουμε ότι

$$\begin{aligned} X(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-0t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt = 4 \iff \\ 4 &= \frac{A}{(0 - s_1)(0 - s_1^*)(0 + s_1)(0 + s_1^*)} = \frac{A}{|s_1|^2|s_1^*|^2} = \frac{A}{\frac{1}{4}\frac{1}{4}} = \frac{A}{\frac{1}{16}} \Rightarrow A = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Άρα το σήμα που ψάχνουμε είναι το

$$X(s) = \frac{\frac{1}{4}}{\left(s - \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}\right)\left(s + \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}\right)\left(s - \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}\right)\left(s + \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}\right)} \quad (23)$$

## 13. Σας δίνονται τα παρακάτω στοιχεία για ένα πραγματικό σήμα $x(t)$ και το μετασχ. Laplace του.

(α) Το  $X(s)$  έχει ακριβώς δυο πόλους

(β) Το  $X(s)$  δεν έχει κανένα μηδενικό

(γ) Το  $X(s)$  έχει πόλο στο  $s = -1 + j$

(δ) Το  $e^{2t}x(t)$  δεν είναι απολύτως ολοκληρώσιμο

(ε)  $X(0) = 8$

**Βρείτε το  $X(s)$  και την περιοχή σύγκλισης.**

Λύση:

Λύστε το! :-)

Hint: Βρείτε πρώτα τη μαθηματική μορφή του  $X(s)$ . Βρείτε τα πιθανά πεδία σύγκλισης. Τέλος, το (δ) στοιχείο αξιοποιήστε το για να βρείτε το πεδίο σύγκλισης. Ερμηνεύστε σωστά τι σημαίνει το  $e^{2t}x(t)$  δεν είναι απολύτως ολοκληρώσιμο.

14. Δίνεται η παρακάτω γραμμική διαφορική εξίσωση 2ης τάξης:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = x(t)$$

με αρχικές συνθήκες

$$y(0^-) = 2, \quad \left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=0^-} = 1$$

και

$$x(t) = e^{-t}u(t)$$

**Βρείτε το  $y(t)$ .**

Λύση:

Γνωρίζουμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &\longleftrightarrow sX(s) - x(0^-) \\ \frac{d^2x(t)}{dt^2} &\longleftrightarrow s^2X(s) - sx(0^-) - x'(0^-) \end{aligned}$$

Είναι

$$\begin{aligned} \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) &= x(t) \longleftrightarrow \\ s^2Y(s) - sy(0^-) - y'(0^-) + 5sY(s) - 5y(0^-) + 6Y(s) &= X(s) \\ s^2Y(s) - 2s - 1 + 5sY(s) - 10 + 6Y(s) &= X(s) \\ Y(s)(s^2 + 5s + 6) &= X(s) + 2s + 11 \\ Y(s) &= \frac{\frac{1}{s+1} + 2s + 11}{s^2 + 5s + 6} \\ Y(s) &= \frac{2s^2 + 13s + 12}{(s+1)(s+2)(s+3)} \end{aligned}$$

Αναλύουμε σε μερικά κλάσματα (μπορούμε κατευθείαν, γιατί η τάξη του αριθμητή είναι μικρότερη αυτής του παρονομαστή):

$$Y(s) = \frac{2s^2 + 13s + 12}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+3}$$

με

$$\begin{aligned}
 A &= (s+1)Y(s)\Big|_{s=-1} = \frac{2s^2 + 13s + 12}{(s+2)(s+3)}\Big|_{s=-1} = \frac{1}{2} \\
 B &= (s+2)Y(s)\Big|_{s=-2} = \frac{2s^2 + 13s + 12}{(s+1)(s+3)}\Big|_{s=-2} = 6 \\
 C &= (s+3)Y(s)\Big|_{s=-3} = \frac{2s^2 + 13s + 12}{(s+1)(s+2)}\Big|_{s=-3} = -\frac{9}{2}
 \end{aligned}$$

Άρα τελικά,

$$\begin{aligned}
 Y(s) &= \frac{1}{2} \frac{1}{s+1} + 6 \frac{1}{s+2} - \frac{9}{2} \frac{1}{s+3} \longleftrightarrow \\
 y(t) &= \frac{1}{2} e^{-t} u(t) + 6 e^{-2t} u(t) - \frac{9}{2} e^{-3t} u(t)
 \end{aligned} \tag{24}$$

που είναι και το ζητούμενο.