

HY215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

Επαναληπτικό Φροντιστήριο

27/5

Επιμέλεια: Μαριάννα Βελεσιώτη

Θέμα 1ο - Περιοδικά Σήματα - 15 μονάδες

Έστω το περιοδικό σήμα

$$x(t) = 4 \cos(2\pi 600t - \pi/3) + 2 \sin(2\pi 900t + \pi/4) + \sin(2\pi 1200t) \quad (1)$$

(α) **(5 μ.)** Υπολογίστε την περίοδο του, T_0 .

(β) **(10 μ.)** Ένα ιδανικό φίλτρο της μορφής $h(t) = \delta(t) - 600 \cos(2\pi 550t) \text{sinc}(300t)$ δέχεται ως είσοδο το παραπάνω σήμα, και η έξοδος $y(t)$ πολλαπλασιάζεται με το σήμα $z(t) = \delta(t + 1)$. Δείξτε ότι

$$w(t) = y(t)z(t) = \sqrt{2}\delta(t + 1) \quad (2)$$

Θέμα 2ο - Διαφορικές Εξισώσεις - 25 μονάδες

Δίνεται η παρακάτω διαφορική εξίσωση που περιγράφει ένα ΓΧΑ σύστημα :

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = x(t)$$

(α) **(5 μ.)** Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς, $H(s)$.

(β) **(20 μ.)** Δείξτε ότι η κρουστική απόκριση είναι της μορφής

$$h(t) = e^{-2t} \sin(t)u(t)$$

Θέμα 3ο - Μετασχηματισμός Fourier - 20 μονάδες

i. (10 μ.) Δείξτε ότι για το μετασχ. Fourier που δίνεται ως

$$X(f) = -2e^{-j2\pi f} \frac{j2\pi f - 2}{-j2\pi f + 2} \quad (14)$$

ισχύει ότι

(α) το μέτρο $|X(f)|$ είναι σταθερή συνάρτηση του f .

(β) η φάση $\angle X(f)$ είναι γραμμική συνάρτηση του f .

ii. (10 μ.) Αν ο μετασχ. Fourier $X(f)$ είναι πραγματική και θετική συνάρτηση για κάθε $f \in \mathbb{R}$, τότε αποδείξτε ότι για τον αντίστροφο μετασχ. Fourier $x(t)$ ισχύει

$$|x(t)| \leq x(0) \quad (15)$$

Θέμα 5ο - Δειγματοληψία - 20 μονάδες

Θεωρήστε ένα πραγματικό περιοδικό σήμα που εκφράζεται σε Σειρά Fourier ως

$$x(t) = \sum_{k=0}^3 \left(\frac{1}{2}\right)^k \sin(2\pi kt) \quad (30)$$

Έστω $\hat{x}(t)$ ένα σήμα που προέρχεται από ιδανική δειγματοληψία του παραπάνω σήματος, με περίοδο δειγματοληψίας $T_s = 2/11$ δευτερόλεπτα.

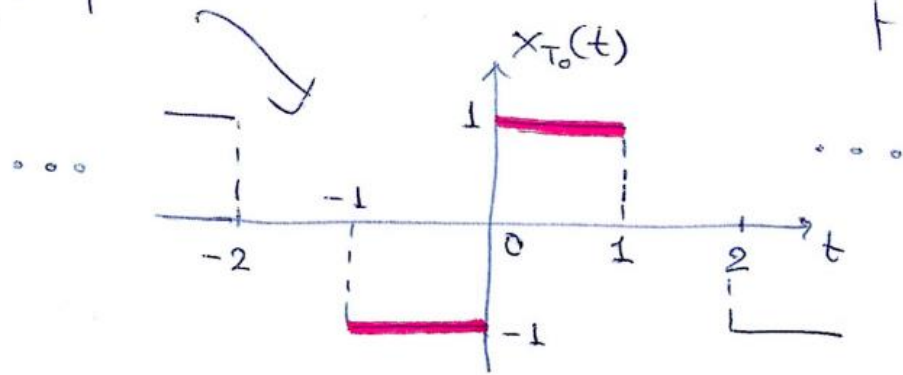
- (α) **(2.5 μ.)** Ποιά η θεμελιώδης συχνότητα f_0 του σήματος $x(t)$;
- (β) **(5 μ.)** Συμβαίνει το φαινόμενο του aliasing κατά τη δειγματοληψία;
- (γ) **(10 μ.)** Αν το σήμα $\hat{x}(t)$ περάσει μέσα από ένα ιδανικό χαμηλοπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής $f_c = 3_+ \text{ Hz}$ ¹, ποιά είναι η έξοδος του φίλτρου;
- (δ) **(2.5 μ.)** Επαληθεύστε ή διαψεύστε την ακόλουθη πρόταση: “*Η έξοδος του ιδανικού χαμηλοπερατού φίλτρου είναι μια Σειρά Fourier με θεμελιώδη συχνότητα $f_0 = 0.5 \text{ Hz}$ ”.* Σε κάθε περίπτωση, δικαιολογήστε την απάντησή σας.

¹Το $_+$ δηλώνει ότι συμπεριλαμβάνεται η συχνότητα $f = 3 \text{ Hz}$ στο φίλτρο.

Άσκηση

Αν το περιοδικό σήμα $x(t)$ που για περίοδό του φαίνεται στο παρακάτω σχήμα

$$T_0 = 3$$



πέρασει από ένα ΓΧΑ σύστημα με ιδανική απόκριση $h(t) = \text{sinc}(4t)$
τότε υπολογίστε:

- την ισχύ του σήματος εισόδου $x(t)$, P_x .
- την έξοδο του συστήματος, $y(t)$.
- τη φασματική πυκνότητα ισχύος της εξόδου, $\Phi_y(f)$.