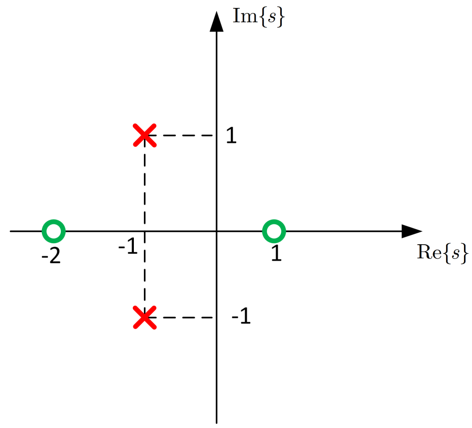
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2022-23
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Όγδοο Φροντιστήριο

Άσκηση 1 - Μετασχηματισμός Laplace

(α') Έστω το διάγραμμα πόλων-μηδενικών μιας ρητής συνάρτησης μεταφοράς $H(s)$. Πόσα πιθανά πεδία σύγκλισης υπάρχουν;



Σχήμα 1: *Σχήμα Άσκησης 1.*

(β') Ποιά από αυτά αντιστοιχούν σε

i. αιτιατό
ii. ευσταθές
iii. μη αιτιατό

σύστημα;

(γ') Είναι το αντίστροφο σύστημα $H_{inv}(s)$ μοναδικό, όταν το $H(s)$ αντιστοιχεί σε ευσταθές και αιτιατό σύστημα;

<u>Λύση</u>:

α') Υπάρχουν δυο πιθανά πεδία σύγκλισης, $\sigma > -1$ και $\sigma < -1$, αφού οι δυο πόλοι είναι συζυγείς και έχουν το ίδιο πραγματικό μέρος.

β') i. Για να είναι το σύστημα αιτιατό θα πρέπει να έχει "δεξιόπλευρο" πεδίο σύγκλισης. Άρα $\sigma > -1$.

ii. Για να είναι το σύστημα ευσταθές θα πρέπει το πεδίο σύγκλισης να περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα. Άρα $\sigma > -1$.

iii. Δεν υπάρχει πεδίο σύγκλισης που να αντιστοιχεί σε μη αιτιατό σύστημα, γιατί μόνο "λωριδοειδή" πεδία σύγκλισης δίνουν κρουστική απόκριση μη αιτιατή.

γ') Για ευσταθές και αιτιατό σύστημα είδαμε ότι $\sigma > -1$. Το αντίστροφο σύστημα θα έχει πόλους στις θέσεις $s = 1$, $\sigma = -2$. Χρειάζεται να επιλέξουμε πεδίο σύγκλισης τέτοιο ώστε

$$R_H \cap H_{H_{inv}} \neq \emptyset \tag{1}$$

Έχουμε επιλογές $\sigma > 1$, $\sigma < -2$, $-2 < \sigma < 1$ για το αντίστροφο σύστημα. Παρατηρούμε ότι για δυο από αυτά, τα $\sigma > 1$, $-2 < \sigma < 1$ έχουν μη κενή τομή με το αρχικό σύστημα. Άρα το αντίστοφο σύστημα δεν είναι μοναδικό.

Άσκηση 2 - Μετασχηματισμός Laplace II

Έστω η συνάρτηση μεταφοράς

$$H(s) = \frac{-s^2 - s - 2}{s^2 + 2s + 2} \tag{2}$$

ενός ΓΧΑ συστήματος, με $\sigma > -1$. Βρείτε την κρουστική απόκριση $h(t)$, καθώς και μια διαφορική εξίσωση που περιγράφει το παραπάνω σύστημα.

Λύση:

Δεν μπορούμε να κάνουμε ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα γιατί ο βαθμός του πολυωνύμου του αριθμητή δεν είναι γνήσια μικρότερος του παρονομαστή. Θα πρέπει να διαιρέσουμε τα πολυώνυμα. Η διαίρεση θα μας δώσει

$$H(s) = -1 + \frac{s}{s^2 + 2s + 2} = -1 + \frac{s}{(s - (-1 + j))(s - (-1 - j))} = -1 + \frac{A}{s + 1 - j} + \frac{B}{s + 1 + j} \tag{3}$$

με

$$A = -\frac{1}{2}(1 + j) = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{j\pi/4} \tag{4}$$

$$B = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\pi/4} \tag{5}$$

και άρα

$$H(s) = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}e^{j\pi/4}\frac{1}{s + 1 - j} - \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\pi/4}\frac{1}{s + 1 + j} \tag{6}$$

και αφού $\sigma > -1$, στο πεδίο του χρόνου θα έχουμε

$$h(t) = -\delta(t) - \frac{\sqrt{2}}{2}e^{j\pi/4}e^{(-1+j)t}u(t) - \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\pi/4}e^{(-1-j)t}u(t) \tag{7}$$

$$= -\delta(t) - \frac{\sqrt{2}}{2}e^{j\pi/4}e^{-t}e^{jt}u(t) - \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\pi/4}e^{-t}e^{-jt}u(t) \tag{8}$$

$$= -\delta(t) - \frac{\sqrt{2}}{2}e^{j(t+\pi/4)}e^{-t}u(t) - \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j(t+j\pi/4)}e^{-t}u(t) \tag{9}$$

$$= -\delta(t) - \sqrt{2}e^{-t}\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)u(t) \tag{10}$$

Μια διαφορική εξίσωση που περιγράφει το σύστημα θα είναι

$$H(s) = \frac{-s^2 - s - 2}{s^2 + 2s + 2} = \frac{Y(s)}{X(s)} \Longleftrightarrow (s^2 + 2s + 2)Y(s) = (-s^2 - s - 2)X(s) \tag{11}$$

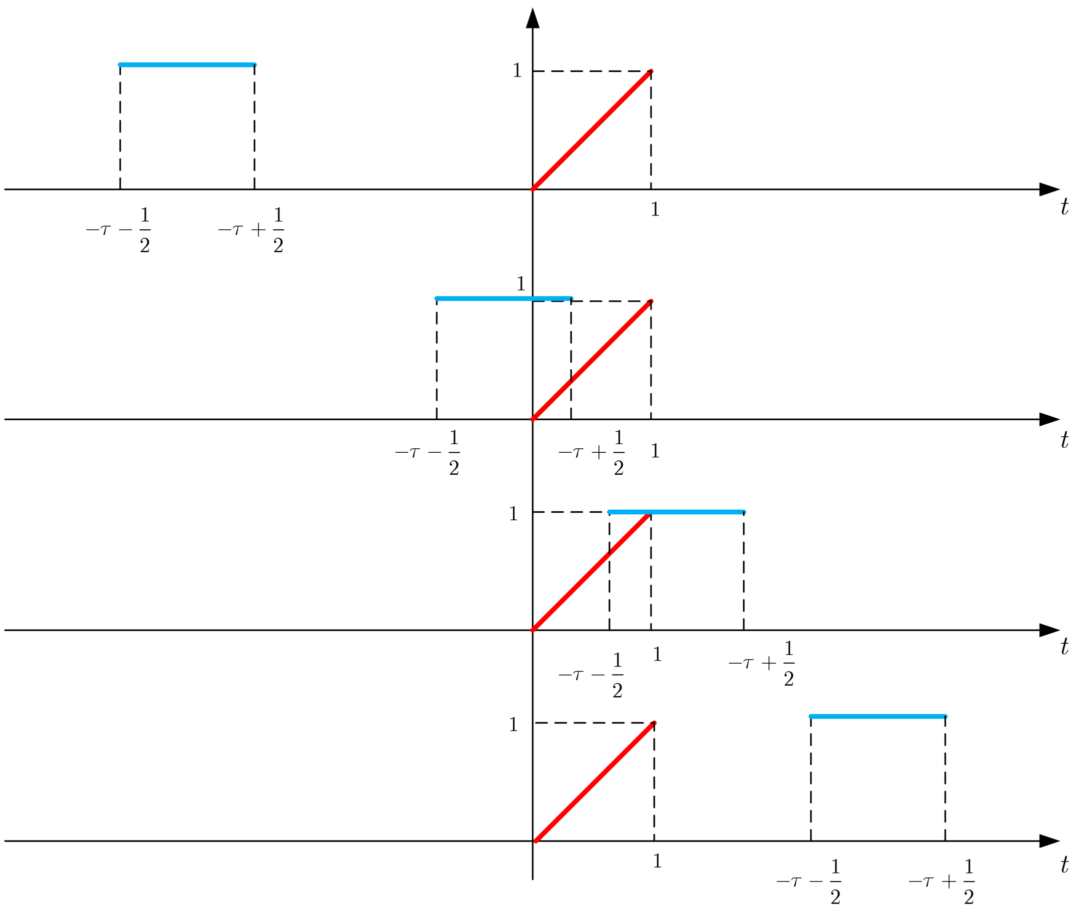
και γυρίζοντας στο πεδίο του χρόνου, θα έχουμε

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 2\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = -\frac{d^2}{dt^2}x(t) - \frac{d}{dt}y(t) - x(t) \tag{12}$$

Άσκηση 3 - Συσχετίσεις Ι
Υπολογίστε την ετεροσυσχέτιση $\phi_{xy}(\tau)$ των σημάτων

$$x(t) = t\mathrm{rect}\left(t - \frac{1}{2}\right) \tag{13}$$
$$y(t) = \mathrm{rect}(t) \tag{14}$$

Λύση:
Διαχωρίζουμε τις περιπτώσεις, όπως στο Σχήμα 2. Θα έχουμε



Σχήμα 2: *Άσκηση 3.*

- $\phi_{xy}(\tau) = 0$, για $-\tau + \frac{1}{2} < 0 \iff \tau > \frac{1}{2}$.
- $\phi_{xy}(\tau) = \int_0^{\frac{1}{2}-\tau} tdt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^{\frac{1}{2}-\tau} = \frac{\left(\frac{1}{2}-\tau\right)^2}{2}$, για $\frac{1}{2} - \tau > 0$ και $-\frac{1}{2} - \tau < 0$, δηλ. $-\frac{1}{2} < \tau < \frac{1}{2}$.
- $\phi_{xy}(\tau) = \int_{-\tau-\frac{1}{2}}^{1} tdt = \frac{t^2}{2}\Big|_{-\tau-\frac{1}{2}}^{1} = \frac{1-\left(\tau+\frac{1}{2}\right)^2}{2}$, για $-\tau - \frac{1}{2} < 1$ και $\frac{1}{2} - \tau > 1$, δηλ. $-\frac{3}{2} < \tau < -\frac{1}{2}$.
- $\phi_{xy}(\tau) = 0$, για $-\tau - \frac{1}{2} > 1 \iff \tau < -\frac{3}{2}$.

Άρα συνολικά

$$\phi_{xy}(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau > \frac{1}{2}, \tau < -\frac{3}{2} \\ \frac{\left(\frac{1}{2}-\tau\right)^2}{2}, & -\frac{1}{2} < \tau < \frac{1}{2} \\ \frac{1-\left(\tau+\frac{1}{2}\right)^2}{2}, & -\frac{3}{2} < \tau < -\frac{1}{2} \end{cases} \tag{15}$$

Άσκηση 4 - Συσχετίσεις ΙΙ
Έστω το περιοδικό με περίοδο $T_0 = 0.01$ s και με συντελεστές Fourier X_k ως

$$X_0 = 2 \tag{16}$$

$$X_k = \frac{4}{\pi^2 k^2}, \;\; k \in \mathrm{Z} \tag{17}$$

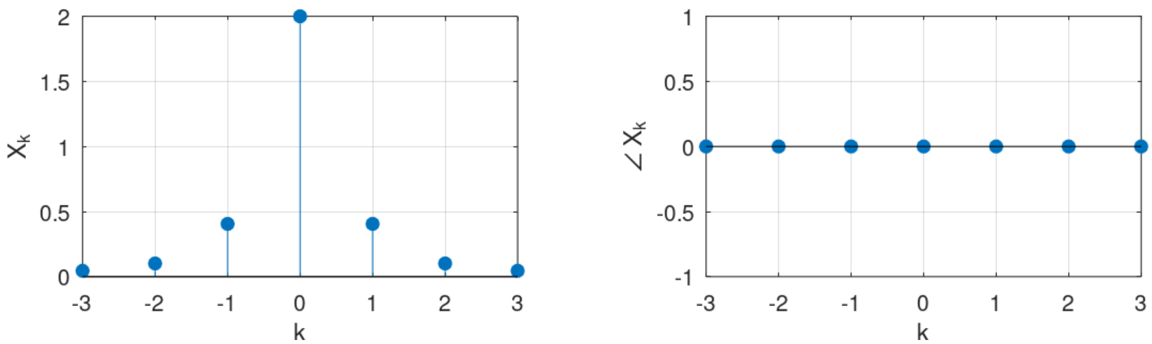
(α') Σχεδιάστε φάσματα πλάτους και φάσης για το περιοδικό σήμα, για $|k| \leq 3$.

(β') Υπολογίστε την αυτοσυσχέτιση του περιοδικού σήματος σε μορφή εκθετικής σειράς Fourier, $\phi_x(\tau)$.

(γ') Επαναλάβατε το (α) για την $\phi_x(\tau)$.

Λύση:

(α') Υπολογίζοντας τα ζητούμενα X_k, παίρνουμε τα φάσματα του Σχήματος 3.



Σχήμα 3: *Φάσματα Άσκησης 4(α).*

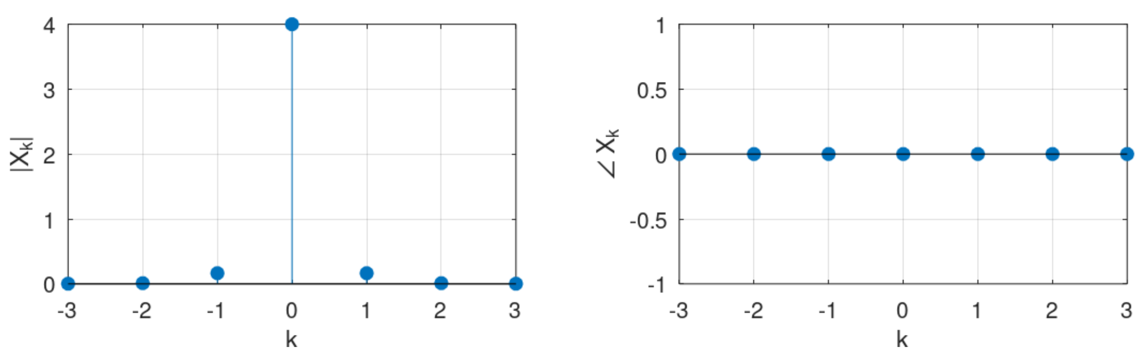
(β') Ξέρουμε ότι

$$\phi_{xy}(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 e^{j2\pi k f_0 \tau} \tag{18}$$

οπότε εύκολα βρίσκουμε ότι

$$\phi_{xy}(\tau) = 4 + \frac{16}{\pi^4} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k^4} e^{j2\pi 100 k\tau} \tag{19}$$

(γ') Υπολογίζοντας τα ζητούμενα $|X_k|^2$, παίρνουμε τα φάσματα του Σχήματος 4.



Σχήμα 4: *Φάσματα Άσκησης 4(γ).*