5-5-2023

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Φροντιστήριο στο Μετασχηματισμό Laplace και τις ιδιότητές του

Άσκηση 1
Σας δίνεται το ζεύγος μετασχηματισμού Laplace:

$$x(t) \xleftrightarrow{L} \frac{2\cdot s}{s^2+2}, \text{ με } x(t)=0 \text{ για } t<0$$

Βρείτε τον μετασχηματισμό Laplace των παρακάτω σημάτων:

a) $x(3\cdot t)$

Αρχικά, παρατηρούμε ότι το $X(s)=\frac{2\cdot s}{s^2+2}$ έχει πεδίο σύγκλισης, $R_x: \Re\{s\}>0$ (αφού το σήμα $x(t)$ είναι δεξιόπλευρο, από εκφώνηση, και έχει πόλους στο φανταστικό άξονα). Αξιοποιώντας τη γνωστή ιδιότητα της Στάθμισης στο Χρόνο προκύπτει ότι:

$$x(3\cdot t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{|3|}\cdot X\left(\frac{s}{3}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2\cdot\frac{s}{3}}{\left(\frac{s}{3}\right)^2+2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\frac{2}{3}\cdot s}{\frac{s^2}{9}+2}=\frac{2}{9}\cdot\frac{s}{\frac{s^2}{9}+2}$$

με $R'_x: \Re\{s\}>0$

β) $x(t-2)$

Αξιοποιώντας τη γνωστή ιδιότητα της Χρονικής Μετατόπισης προκύπτει ότι:

$$x(t-2) \overset{L}{\updownarrow}$$

$$X(s)\cdot e^{-s\cdot 2} = \frac{2\cdot s}{s^2+2}\cdot e^{-2s}, \text{ με } R_x' : R\{s\} > 0$$

γ) $x(t) * \frac{d}{dt}x(t)$

Αξιοποιώντας τις γνωστές ιδιότητες της Συνέλιξης στο Χρόνο <u>και</u> της Παραγώγισης στο Χρόνο προκύπτει ότι:

$$x(t) * \frac{d}{dt}x(t) \overset{L}{\updownarrow}$$

$$X(s)\cdot s\cdot X(s) = s\cdot X^2(s) = s\cdot\left(\frac{2\cdot s}{s^2+2}\right)^2 = \frac{s\cdot 4\cdot s^2}{(s^2+2)^2} = \frac{4\cdot s^3}{(s^2+2)^2}$$

με $R_x' : R\{s\} > 0$

δ) $e^{-t}\cdot x(t)$

Αξιοποιώντας τη γνωστή ιδιότητα της Μετατόπισης στο χώρο του s προκύπτει ότι:

$$e^{-t}\cdot x(t) \overset{L}{\updownarrow}$$

$$X(s-(-1)) = X(s+1) = \frac{2\cdot(s+1)}{(s+1)^2+2}, \text{ με } R_x' : R\{s\} > -1$$

ε) $2 \cdot t \cdot x(t)$

Αξιοποιώντας τη γνωστή ιδιότητα της Παραγώγισης στη συχνότητα προκύπτει ότι:

Προσοχή στο συντελεστή

$$2t \cdot x(t)$$
$$\mathcal{L} \updownarrow$$
$$-2 \cdot \frac{d}{ds} X(s) = -2 \cdot \frac{(2 \cdot s)' \cdot (s^2+2) - 2 \cdot s \cdot (s^2+2)'}{(s^2+2)^2} = \frac{-2 \cdot (2 \cdot (s^2+2) - 2 \cdot s \cdot 2 \cdot s)}{(s^2+2)^2} =$$

$$= \frac{-2 \cdot (2s^2+4-4 \cdot s^2)}{(s^2+2)^2} = \frac{-2(-2 \cdot s^2+4)}{(s^2+2)^2} = -4 \cdot \frac{(-s^2+2)}{(s^2+2)^2} = 4 \cdot \frac{(s^2-2)}{(s^2+2)^2}$$

με $R'x : \mathcal{R}\{s\} > 0$

στ) $\int_0^t x(3u)\,du$

Αξιοποιώντας τις γνωστές ιδιότητες της Στάθμισης στο Χρόνο <u>και</u> της Ολοκλήρωσης στο Χρόνο προκύπτει ότι:

$$\int_0^t x(3 \cdot u)\,du$$
$$\mathcal{L} \updownarrow$$
$$\frac{1}{|3|} \cdot \frac{X(\frac{s}{3})}{s} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s} \cdot X\left(\frac{s}{3}\right) = \frac{1}{3 \cdot s} \cdot \frac{\frac{2}{3} \cdot s}{\frac{s^2}{9}+2} = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{\frac{s^2}{9}+2}$$

με $R'x : \mathcal{R}\{s\} > 0$

Άσκηση 2

Έστω το σήμα $y(t)$ που σχετίζεται με δύο σήματα, $x_1(t)$ και $x_2(t)$, ως:

$$y(t) = e^{5\cdot t}\cdot x_1(t) * x_2(t-1)$$

με $x_1(t) = -t\cdot e^{-5t}\cdot u(t)$ και $x_2(t) = e^{-2t}\cdot u(t)$

Χρησιμοποιήστε γνωστά ζεύγη και ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace για να βρείτε το μετασχηματισμό Laplace, $Y(s)$, του σήματος $y(t)$.
Μην ξεχάσετε το πεδίο σύγκλισης!

$$y(t) = e^{5\cdot t} x_1(t) * x_2(t-1) \Leftrightarrow$$
$$y(t) = e^{5\cdot t}\cdot (t\cdot e^{-5t}\cdot u(t)) * x_2(t-1) \Leftrightarrow$$
$$y(t) = -t\cdot u(t) * x_2(t-1)$$

Αξιοποιώντας τις γνωστές ιδιότητες της Συνέλιξης στο Χρόνο και της Χρονικής Μετατόπισης και τα γνωστά ζεύγη $-t\cdot u(-t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s^2}$ και $e^{-at}\cdot u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s+a}$ στα αντίστοιχα πεδία σύγκλισης, προκύπτει ότι:

$$Y(s) = \frac{1}{s^2}\cdot X_2(s)\cdot e^{-s\cdot 1} = \frac{1}{s^2}\cdot\frac{1}{s+2}\cdot e^{-s} = \frac{e^{-s}}{s^2\cdot(s+2)}$$

με $R_Y: \{\Re\{s\} < 0\} \cap \{\Re\{s\} > -2\} = \{-2 < \Re\{s\} < 0\}$

Άσκηση 3

Έστω ότι για ένα σήμα $x(t)$ μας δίνονται οι παρακάτω πληροφορίες:

1) Είναι πραγματικό και άρτιο.
2) Ο μετασχ. Laplace του, $X(s)$, έχει τέσσερις πόλους και κανένα μηδενικό στο s-επίπεδο.
3) Ο μετασχ. Laplace του, $X(s)$, έχει έναν εκ των πόλων του στο $s=\frac{1}{2}\cdot e^{j\frac{\pi}{4}}$.
4) Ισχύει ότι: $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,dt = 4$.

Βρείτε το μετασχηματισμό $X(s)$ και το πεδίο σύγκλισης.

Από 1) προκύπτει ότι:

$$\left.\begin{array}{l} x(t)\in\mathbb{R} \\ x(t)=x(-t) \end{array}\right| \Rightarrow X(s)=X^*(s^*)=X(-s)$$

Συνεπώς, αφού, από 3), ξέρουμε ότι το $X(s)$ έχει έναν πόλο στο $s=\frac{1}{2}\cdot e^{j\frac{\pi}{4}}$, τότε οι υπόλοιποι τρεις, λόγω 2), πόλοι θα είναι:

- $s=\frac{1}{2}\cdot e^{-j\frac{\pi}{4}}$
- $s=-\frac{1}{2}\cdot e^{j\cdot\frac{\pi}{4}}$
- $s=-\frac{1}{2}\cdot e^{-j\cdot\frac{\pi}{4}}$

Άρα, το $X(s)$ γράφεται ως:

$$X(s)=\frac{A}{(s-\frac{1}{2}\cdot e^{-j\frac{\pi}{4}})\cdot(s-\frac{1}{2}\cdot e^{j\frac{\pi}{4}})\cdot(s+\frac{1}{2}\cdot e^{-j\frac{\pi}{4}})\cdot(s+\frac{1}{2}\cdot e^{j\frac{\pi}{4}})}$$

Από 4) προκύπτει ότι:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,dt = 4 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cdot e^{-st}\,dt\Big|_{s=0} = 4 \Leftrightarrow X(0)=4 \Leftrightarrow$$

$$\frac{A}{\left(-\frac{1}{2}\cdot e^{-j\frac{\pi}{4}}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\cdot e^{j\frac{\pi}{4}}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot e^{-j\frac{\pi}{4}}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot e^{j\frac{\pi}{4}}\right)} = 4 \Leftrightarrow$$

$$\frac{A}{\frac{1}{16}\cdot e^{-j\frac{\pi}{4}+j\frac{\pi}{4}-j\frac{\pi}{4}+j\frac{\pi}{4}}} = 4 \Leftrightarrow \frac{16\cdot A}{e^{0}} = 4 \Leftrightarrow$$

$$A = \frac{4}{16} \Leftrightarrow A = \frac{1}{4}$$

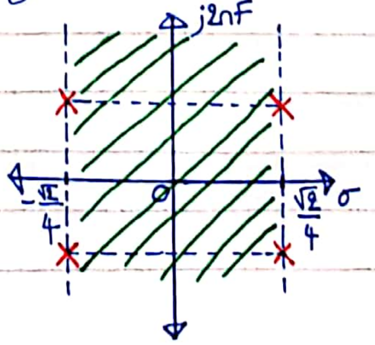
Συμπερασματικά, λοιπόν, το $X(s)$, μετά από τις απαραίτητες πράξεις και απλοποιήσεις και πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρονομαστή επί 16, είναι:

$$X(s) = \frac{4}{16\cdot s^4 + 1}$$

Τα πιθανά πεδία σύγκλισης είναι:
$\sigma > \mathcal{R}\{\frac{1}{2}\cdot e^{j\frac{\pi}{4}}\} = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $\sigma < \mathcal{R}\{-\frac{1}{2}\cdot e^{j\pi/4}\} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$ και $-\frac{\sqrt{2}}{4} < \sigma < \frac{\sqrt{2}}{4}$.

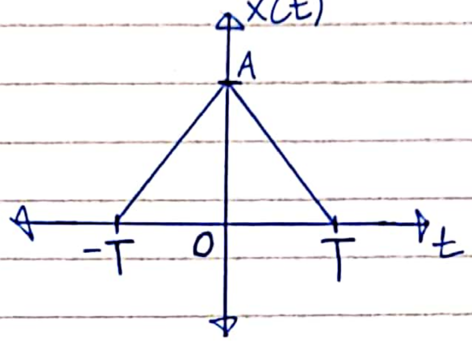
Το σήμα $x(t)$ είναι αμφίπλευρο, αφού είναι άρτιο.
Συνεπώς, το σωστό πεδίο σύγκλισης είναι:

$$R_x = \left\{-\frac{\sqrt{2}}{4} < \sigma < \frac{\sqrt{2}}{4}\right\}$$



Άσκηση 4

Υπολογίστε το μετασχηματισμό Laplace του σήματος $x(t)$ (του γνωστού τριγωνικού παλμού) που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα με δύο τρόπους:



α) με τον ορισμό. Δίνεται ότι: $\int t\cdot e^{-st}\,dt = \frac{e^{-st}}{-s}\cdot\left(t+\frac{1}{s}\right)$

$$X(s)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cdot e^{-st}\,dt = \int_{-T}^{0}\left(\frac{A}{T}\cdot t + A\right)\cdot e^{-st}\,dt + \int_{0}^{T}\left(-\frac{A}{T}\cdot t + A\right)\cdot e^{-st}\,dt =$$

$$=\int_{-T}^{0}\frac{A}{T}\cdot t\cdot e^{-st}\,dt + \int_{-T}^{0} A\cdot e^{-st}\,dt - \int_{0}^{T}\frac{A}{T}\cdot t\cdot e^{-st}\,dt + \int_{0}^{T} A\cdot e^{-st}\,dt =$$

$$=\frac{A}{T}\cdot\left[\frac{e^{-st}}{-s}\cdot\left(t+\frac{1}{s}\right)\right]_{-T}^{0} + A\cdot\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_{-T}^{0} - \frac{A}{T}\cdot\left[\frac{e^{-st}}{-s}\cdot\left(t+\frac{1}{s}\right)\right]_{0}^{T} +$$

$$+A\cdot\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_{0}^{T} =$$

$$=\left[\frac{A}{T}\cdot\left(-\frac{1}{s^2}\right) - \frac{A}{T}\cdot\left(\frac{e^{sT}}{-s}\cdot\left(-T+\frac{1}{s}\right)\right)\right] + \left[A\cdot\frac{1}{-s} - A\cdot\frac{e^{sT}}{-s}\right] - \left[\frac{A}{T}\cdot\frac{e^{-sT}}{-s}\cdot\right.$$

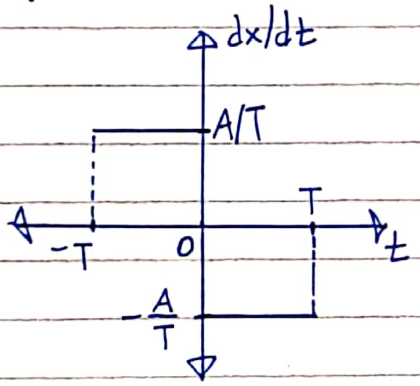
$$\left.\cdot\left(T+\frac{1}{s}\right) - \frac{A}{T}\cdot\frac{1}{-s^2}\right] + \left[A\cdot\frac{e^{-sT}}{-s} - A\cdot\frac{1}{-s}\right] =$$

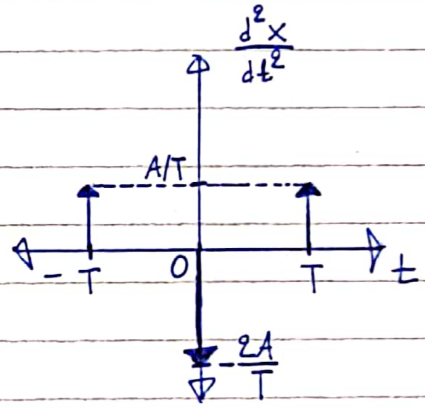
$$=-\frac{A}{T\cdot s^2} - \cancel{\frac{A\cdot e^{sT}}{s}} + \frac{A\cdot e^{sT}}{T\cdot s^2} - \cancel{\frac{A}{s}} + \cancel{\frac{A\cdot e^{sT}}{s}} + \cancel{\frac{A\cdot e^{-sT}}{s}} + \frac{A\cdot e^{-sT}}{T\cdot s^2} -$$

$$-\frac{A}{T\cdot s^2}-\cancel{\frac{A\cdot e^{-sT}}{s}}+\cancel{\frac{A}{s}}=$$

$$=\frac{A}{T\cdot s^2}\cdot\left(e^{sT}+e^{-sT}\right)-\frac{2A}{T\cdot s^2}=\frac{A}{T}\cdot\left(\frac{e^{sT}+e^{-sT}-2}{s^2}\right)$$

β) με χρήση κατάλληλων ιδιοτήτων.





Παρατηρούμε ότι το $\frac{d^2x(t)}{dt^2}$ γράφεται ως:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}=\frac{A}{T}\cdot\delta(t+T)-\frac{2\cdot A}{T}\cdot\delta(t)+\frac{A}{T}\cdot\delta(t-T)$$

$L\Updownarrow$ (Γνωστά ζεύγη: $\delta(t)\overset{L}{\longleftrightarrow}1$ και $\delta(t-t_0)\overset{L}{\longleftrightarrow}e^{-s\cdot t_0}$)

$$L\left\{\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right\}=\frac{A}{T}\cdot e^{sT}-\frac{2\cdot A}{T}+\frac{A}{T}\cdot e^{-sT}\qquad(1)$$

Αξιοποιώντας τη γνωστή ιδιότητα της n-οστής Παραγώγισης στο Χρόνο προκύπτει ότι:

$$L\left\{\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right\}=s^2\cdot X(s)\qquad(2)$$

Από (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$s^2 \cdot X(s) = \frac{A}{T} \cdot e^{sT} - \frac{2 \cdot A}{T} + \frac{A}{T} \cdot e^{-sT} \Leftrightarrow$$

$$X(s) = \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{e^{sT} + e^{-sT} - 2}{s^2} \right)$$

Παρατηρούμε ότι, όπως ήταν αναμενόμενο, και με τους δύο τρόπους καταλήγουμε στο ίδιο $X(s)$.

Ποιο είναι το πεδίο σύγκλισης του παραπάνω μετασχηματισμού Laplace;

Παρατηρούμε ότι το αντίστοιχο πεδίο σύγκλισης είναι όλο το s-επίπεδο διότι το σήμα $x(t)$ είναι πεπερασμένης διάρκειας.