ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2022-23
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Έβδομο Φροντιστήριο

Άσκηση 1 - Μετασχηματισμός Laplace και Ιδιότητες Ι
Σας δίνεται το ζεύγος μετασχ. Laplace

$$x(t) \longleftrightarrow \frac{2s}{s^2+2} \tag{1}$$

με $x(t) = 0,\ t < 0$. Βρείτε τον μετασχ. Laplace των παρακάτω σημάτων:

(α') $x(3t)$

(β') $x(t-2)$

(γ') $x(t) * \frac{d}{dt}x(t)$

(δ') $e^{-t}x(t)$

(ε') $2tx(t)$

(ϛ') $\int_0^t x(3u)du$

Λύση:
Το $X(s)$ έχει $R_x : \Re\{s\} > 0$

α')

$$x(3t) \xrightarrow{L} \frac{1}{3}X\left(\frac{s}{3}\right) = \frac{1}{3}\frac{\frac{2}{3}s}{\left(\frac{s}{3}\right)^2+2} = \frac{2}{9}\cdot\frac{s}{\frac{s^2}{9}+2} \tag{2}$$

με $\Re\{s\} > 0$.

β')

$$x(t-2) \xrightarrow{L} X(s)e^{-2s} = \frac{2s}{s^2+2}e^{-2s}, \Re\{s\} > 0 \tag{3}$$

γ')

$$x(t) * \frac{d}{dt}x(t) \xrightarrow{L} X(s)\cdot sX(s) = sX^2(s) = s\left(\frac{2s}{s^2+2}\right)^2 = \frac{4s^3}{(s^2+2)^2}, \Re\{s\} > 0 \tag{4}$$

δ')

$$e^{-t}x(t) \xrightarrow{L} X(s+1) = \frac{2(s+1)}{(s+1)^2+2}, \Re\{s\} > -1 \tag{5}$$

ε')

$$2tx(t) \xrightarrow{L} -2\frac{d}{ds}X(s) = -4\frac{d}{ds}\cdot\frac{s}{s^2+2} = -4\frac{s^2+2-2s\cdot s}{(s^2+2)^2} \tag{6}$$

$$= -4\frac{s^2+2-2s^2}{(s^2+2)^2} = -4\frac{-s^2+2}{(s^2+2)^2} \tag{7}$$

$$= 4\frac{s^2-2}{(s^2+2)^2}, \Re\{s\} > 0 \tag{8}$$

ϛ')

$$\int_0^t x(3u)du \xrightarrow{L} \frac{1}{3}\cdot\frac{X\left(\frac{s}{3}\right)}{s} = \frac{1}{3s}\cdot\frac{\frac{2}{3}s}{\left(\frac{s}{3}\right)^2+2} = \frac{2}{9s}\cdot\frac{s}{\frac{s^2}{9}+2} = \frac{2}{9}\cdot\frac{1}{\frac{s^2}{9}+2}, \Re\{s\} > 0 \tag{9}$$

Άσκηση 2 - Μετασχηματισμός Laplace και Ιδιότητες II

Έστω το σήμα $y(t)$ που σχετίζεται με δυο σήματα $x_1(t)$ και $x_2(t)$ ως

$$y(t) = x_1(t-2) * \frac{d}{dt}x_2(t-1) \tag{10}$$

με

$$x_1(t) = e^{-2t}u(t) \tag{11}$$

$$x_2(t) = e^{-3t}u(t) \tag{12}$$

Χρησιμοποιήστε γνωστά ζεύγη και ιδιότητες του μετασχ. Laplace για να βρείτε το μετασχ. Laplace $Y(s)$ του σήματος $y(t)$. Μην ξεχάσετε το πεδίο σύγκλισης!

Λύση:

Είναι

$$y(t) = x_1(t-2) * \frac{d}{dt}x_2(t-1) \longleftrightarrow Y(s) = X_1(s)e^{-2s}sX_2(s)e^{-s} = sX_1(s)X_2(s)e^{-3s} \tag{13}$$

$$= s\frac{1}{s+2}\frac{1}{s+3}e^{-3s} = \frac{s}{(s+2)(s+3)}e^{-3s} \tag{14}$$

με $\{\Re\{s\} > -2\} \cap \{\Re\{s\} > -3\} = \{\Re\{s\} > -2\}$.

Άσκηση 3 - Μετασχηματισμός Laplace και Ιδιότητες - III

Έστω ότι για ένα σήμα $x(t)$ μας δίνονται οι παρακάτω πληροφορίες:

- είναι πραγματικό και άρτιο
- ο μετασχ. Laplace του, $X(s)$, έχει τέσσερις πόλους και κανένα μηδενικό στο $s-$επίπεδο.
- ο μετασχ. Laplace του, $X(s)$, έχει έναν εκ των πόλων του στο $s = (1/2)e^{j\pi/4}$.
- ισχύει

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt = 4$$

Βρείτε το μετασχηματισμό $X(s)$ και το πεδίο σύγκλισής του.

Λύση:

Αφού $x(t) \in \Re$ και $x(t) = x(-t)$ συνεπάγεται ότι $X(s) = X^*(s^*) = X(-s)$. Άρα για τον πόλο $\frac{1}{2}e^{j\pi/4}$ θα έχουμε υποχρεωτικά και τους πόλους $\frac{1}{2}e^{-j\pi/4}$, $-\frac{1}{2}e^{j\pi/4}$, $-\frac{1}{2}e^{-j\pi/4}$. Άρα

$$X(s) = \frac{A}{(s-\frac{1}{2}e^{-j\pi/4})(s-\frac{1}{2}e^{j\pi/4})(s+\frac{1}{2}e^{-j\pi/4})(s+\frac{1}{2}e^{j\pi/4})} \tag{15}$$

Από τη σχέση

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt\Big|_{s=0} = X(0) = 4 \tag{16}$$

Οπότε θέτοντας $s = 0$ στη Σχέση (15), παίρνουμε $A = 1/4$. Μετά από πράξεις

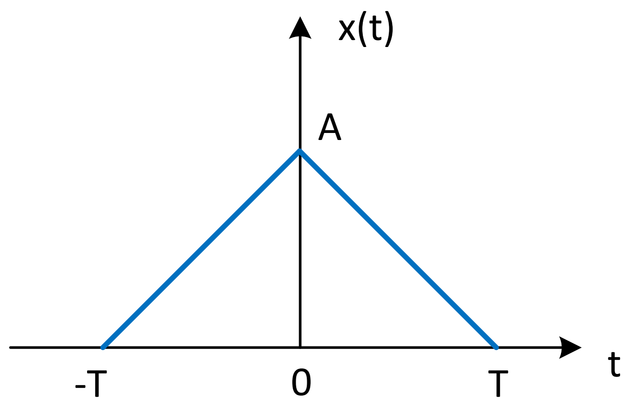
$$X(s) = \frac{4}{16s^4 + 1} \tag{17}$$

Τα πιθανά πεδία σύγκλισης είναι τα $\sigma > \Re\{\frac{1}{2}e^{j\pi/4}\} = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $\sigma < \Re\{-\frac{1}{2}e^{j\pi/4}\} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$, και $-\frac{\sqrt{2}}{4} < \sigma < \frac{\sqrt{2}}{4}$. Εφ'όσον είναι άρτιο, είναι αμφίπλευρο, και άρα το πεδίο σύγκλισης θα είναι

$$R_X = \left\{-\frac{\sqrt{2}}{4} < \sigma < \frac{\sqrt{2}}{4}\right\} \tag{18}$$

Άσκηση 4 - Μετασχηματισμός Laplace και Ιδιότητες - IV

Υπολογίστε το μετασχηματισμό Laplace του σήματος $x(t)$ (το γνωστό τριγωνικό παλμό) που φαίνεται στο Σχήμα 1, με δυο τρόπους:



Σχήμα 1: *Σήμα* $x(t)$ *Άσκησης 4.*

(α΄) με τον ορισμό. Δίνεται ότι $\int te^{st}dt = \frac{e^{st}}{s}\Big(t - \frac{1}{s}\Big)$

(β΄) με χρήση ιδιοτήτων (όποιες νομίζετε εσείς κατάλληλες).

Ποιό είναι το πεδίο σύγκλισης του μετασχηματισμού;

Λύση:

α΄) Είναι

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt = \int_{-T}^{0} \Big(\frac{A}{T}t + A\Big)e^{-st}dt + \int_{0}^{T} \Big(-\frac{A}{T}t + A\Big)e^{-st}dt \tag{19}$$

$$= \int_{-T}^{0} \frac{A}{T}te^{-st}dt + \int_{-T}^{0} Ae^{-st}dt - \int_{0}^{T} \frac{A}{T}te^{-st} + \int_{0}^{T} e^{-st}dt = \tag{20}$$

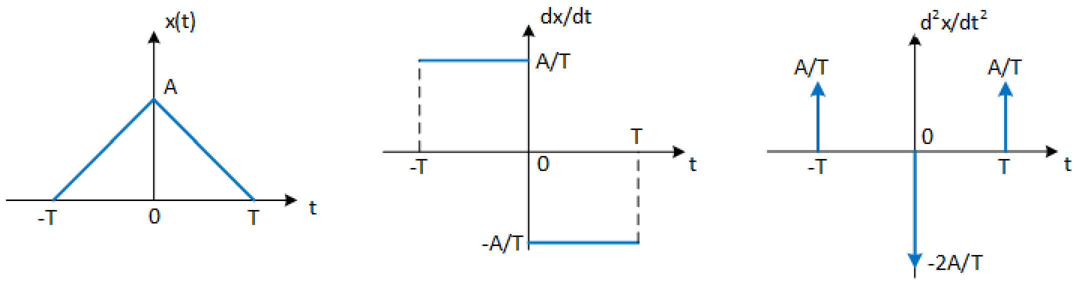
$$= \frac{A}{T}\cdot\frac{e^{-st}}{-s}\Big(t + \frac{1}{s}\Big)\Big]_{-T}^{0} - \frac{A}{s}e^{-st}\Big]_{-T}^{0} - \frac{A}{T}\cdot\frac{e^{-st}}{-s}\Big(t + \frac{1}{s}\Big)\Big]_{0}^{T} - \frac{A}{s}e^{-st}\Big]_{0}^{T} = \tag{21}$$

$$= -\frac{A}{T}\cdot\frac{1}{s^2} + \frac{A}{T}\cdot\frac{e^{sT}}{s}\Big(\frac{1}{s} - T\Big) - \frac{A}{s} + \frac{A}{s}e^{sT} + \frac{A}{T}\cdot\frac{e^{-sT}}{s}\Big(T + \frac{1}{s}\Big) - \frac{A}{T}\cdot\frac{1}{s^2} - \frac{A}{s}e^{-sT} + \frac{A}{s} = \tag{22}$$

$$= -\frac{A}{Ts^2} + \frac{A}{Ts^2}e^{sT} - \frac{A}{s}e^{sT} + \frac{A}{s}e^{sT} + \frac{A}{s}e^{-sT} + \frac{A}{Ts^2}e^{-sT} - \frac{A}{Ts^2} - \frac{A}{s}e^{-sT} = \tag{23}$$

$$= \frac{A}{Ts^2}(e^{sT} + e^{-sT}) - \frac{2A}{Ts^2} = \frac{A}{T}\Big(\frac{e^{sT} - e^{-sT} - 2}{s^2}\Big) \tag{24}$$

β΄) Δείτε το Σχήμα 2.



Σχήμα 2: *Σχήματα Άσκησης 4.*

Το $\frac{d^2x(t)}{dt^2}$ γράφεται ως:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{A}{T}\delta(t+T) - \frac{2A}{T}\delta(t) + \frac{A}{T}\delta(t-T) \tag{25}$$

και έχει Μ.L.

$$L\Big\{\frac{d^2x(t)}{dt^2}\Big\} = \frac{A}{T}e^{sT} - \frac{2A}{T} + \frac{A}{T}e^{-sT}$$

και από την ιδιότητα της παραγώγισης, έχουμε:

$$L\Big\{\frac{d^2x(t)}{dt^2}\Big\} = \frac{A}{T}(e^{sT} + e^{-sT} - 2) = s^2X(s) \iff \tag{26}$$

$$\iff X(s) = \frac{A}{T}\cdot\frac{e^{sT} + e^{-sT} - 2}{s^2} \tag{27}$$

Το πεδίο σύγκλισης είναι όλο το s-επίπεδο, γιατί το σήμα είναι πεπερασμένης διάρκειας.