Φροντιστήριο 7

Άσκηση 6

Η Διαμόρφωση Πλάτους (Amplitude Modulation - AM) ήταν ο κυρίαρχος τρόπος εκπομπής σήματος κατά τα πρώτα ογδόντα χρόνια του 20ού αιώνα και παραμένει σε ευρεία χρήση και κατά τον 21ο. Οι σταθμοί που εκπέμπουν στα AM παγκοσμίως αριθμούνται σε 16265. Η κύρια εφαρμογή της διαμόρφωσης AM είναι στη ραδιοφωνία ενώ με διαμόρφωση AM διαμορφώνεται και το σήμα εικόνας του αναλογικού τηλεοπτικού σήματος. Ένα AM-διαμορφωμένο σήμα γράφεται ως

$$x(t) = [1 + Am(t)]\cos(2\pi f_c t) \tag{52}$$

με $m(t)$ το σήμα πληροφορίας (π.χ. ραδιοφωνική εκπομπή) που θέλουμε να μεταδώσουμε. Ένα απλό AM-διαμορφωμένο σήμα είναι το

$$x(t) = [1 + \cos(2\pi 100t)]\cos(2\pi 1000t) \tag{53}$$

$\cos(2\pi 100t + \phi)$

Αναπτύξτε σε εκθετική σειρά Fourier το παραπάνω σήμα και σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης της.

$$x(t) = [1 + \cos(2\pi 100t)]\cos(2\pi 1000t) = \cos(2\pi 1000t) + \cos(2\pi 100t)\cos(2\pi 1000t) =$$

$$= \frac{e^{j2\pi 1000t} + e^{-j2\pi 1000t}}{2} + \frac{\left(e^{j2\pi 100t} + e^{-j2\pi 100t}\right)}{2}\frac{\left(e^{j2\pi 1000t} + e^{-j2\pi 1000t}\right)}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}e^{j2\pi 1000t} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi 1000t} + \frac{1}{4}e^{j2\pi 1100t} + \frac{1}{4}e^{-j2\pi 900t} + \frac{1}{4}e^{j2\pi 900t} + \frac{1}{4}e^{-j2\pi 1100t}$$

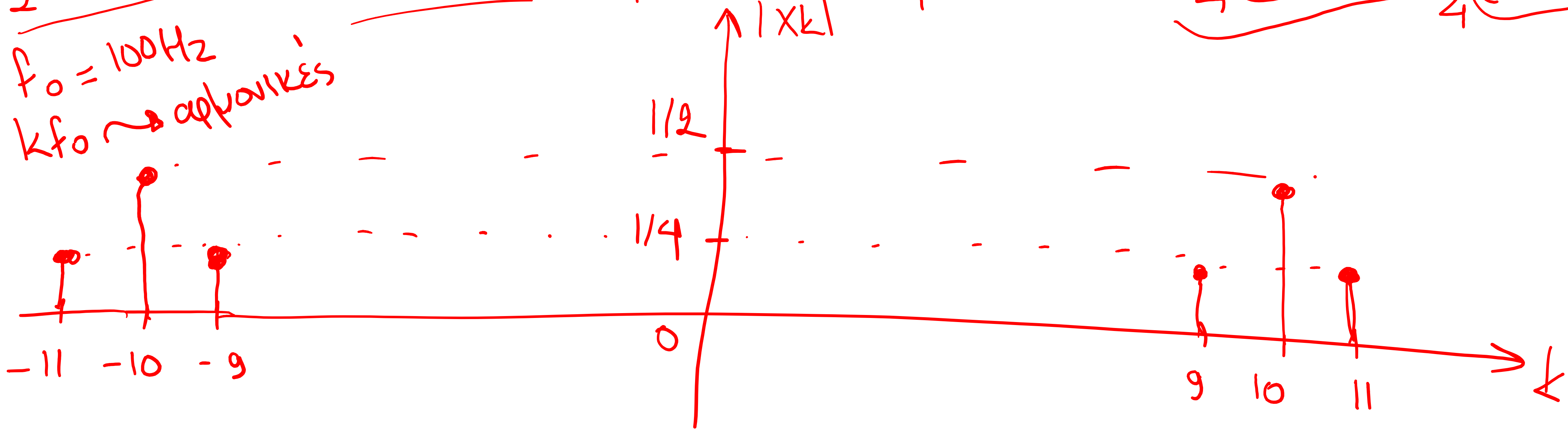
$$f_0 = \text{ΜΚΔ}\{900, 1000, 1100\} = 100\,\text{Hz}$$

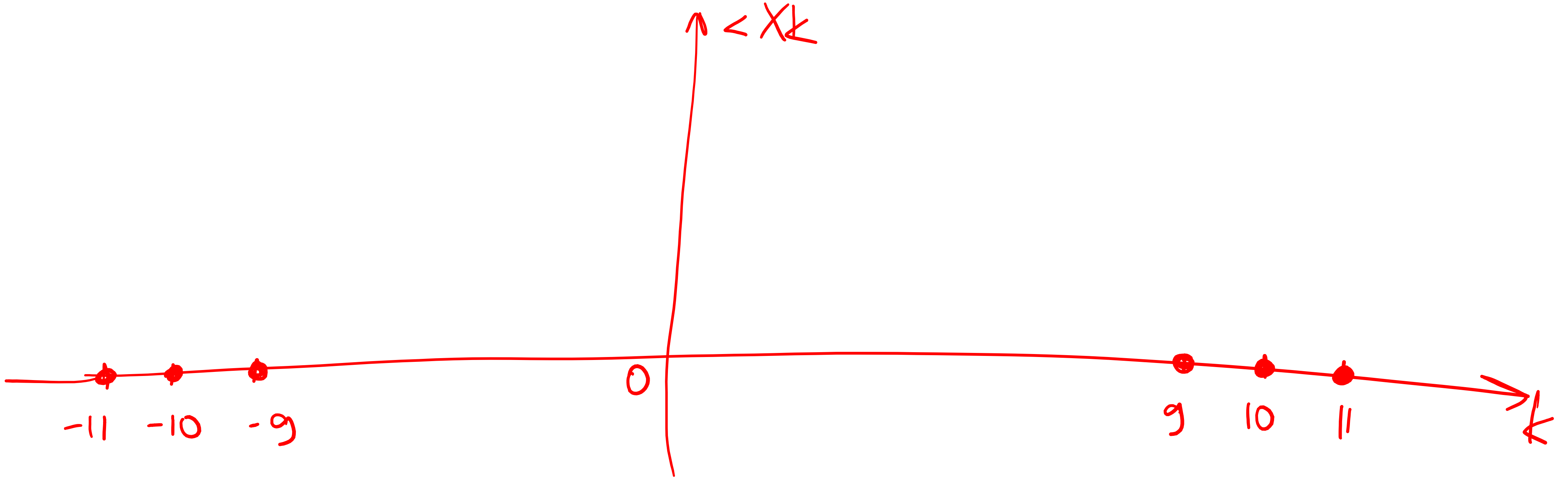
$$\cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$\frac{1}{2}e^{j2\pi 1000t}+\frac{1}{2}e^{-j2\pi 1000t}+\frac{1}{4}e^{j2\pi 1100t}+\frac{1}{4}e^{-j2\pi 1100t}+\frac{1}{4}e^{j2\pi 900t}+\frac{1}{4}e^{-j2\pi 900t}$$

$f_0 = 100Hz$

$kf_0 \rightarrow$ αρμονικές





Άσκηση 1

Ελέγξτε αν το παρακάτω σύστημα

$$y(t) = \frac{1}{2 + \cos(x(t))} \quad (1)$$

είναι γραμμικό, χρονικά αμετάβλητο, ευσταθές, αιτιατό, και δυναμικό.

α) Ομογένεια:

Για είσοδο $a x(t) \rightarrow \dfrac{1}{2 + \cos(a x(t))} \neq a y(t)$

Δεν είναι γραμμικό γιατί δεν είναι ομογενές.

β)

Για είσοδο $x(t-t_0) \rightarrow \dfrac{1}{2 + \cos(x(t-t_0))}$

$y(t-t_0) = \dfrac{1}{2 + \cos(x(t-t_0))}$

$=$

Άρα είναι χρονικά αμετάβλητο.

$$y(t) = \frac{1}{2+\cos(x(t))}$$

γ) Έστω $|x(t)| < B_x$

$$|y(t)| = \left|\frac{1}{2+\cos(x(t))}\right| = \frac{1}{|2+\cos(x(t))|} \leqslant \frac{1}{|2-1|} = 1$$

$\cos(x(t)) \leqslant 1$ άρα $\frac{1}{\cos(x(t))} \geqslant 1$

Είναι ευσταθές.

δ) Είναι αιτιατό επειδή εξαρτάται μόνο από τις τρέχουσες τιμές της εισόδου και όχι από μελλοντικές

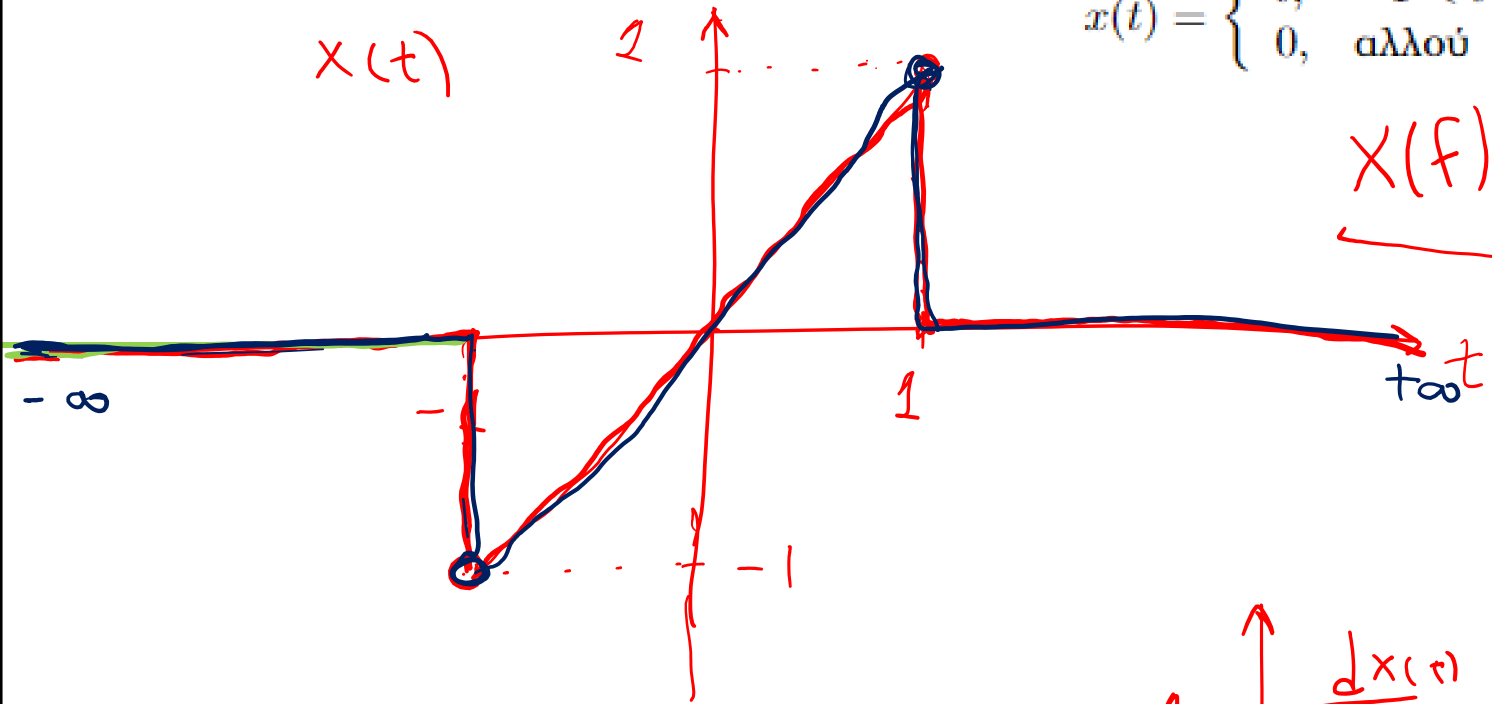
ε) Δεν είναι δυναμικό επειδή δεν απαιτεί μνήμη για παρελθοντικές ή μελλοντικές τιμές της εισόδου/εξόδου.

$$y(t) = \frac{1}{2+\cos(x(t+5))} \rightarrow \text{δυναμικό}$$

Άσκηση 3

Βρείτε το μετασχ. Fourier του σήματος

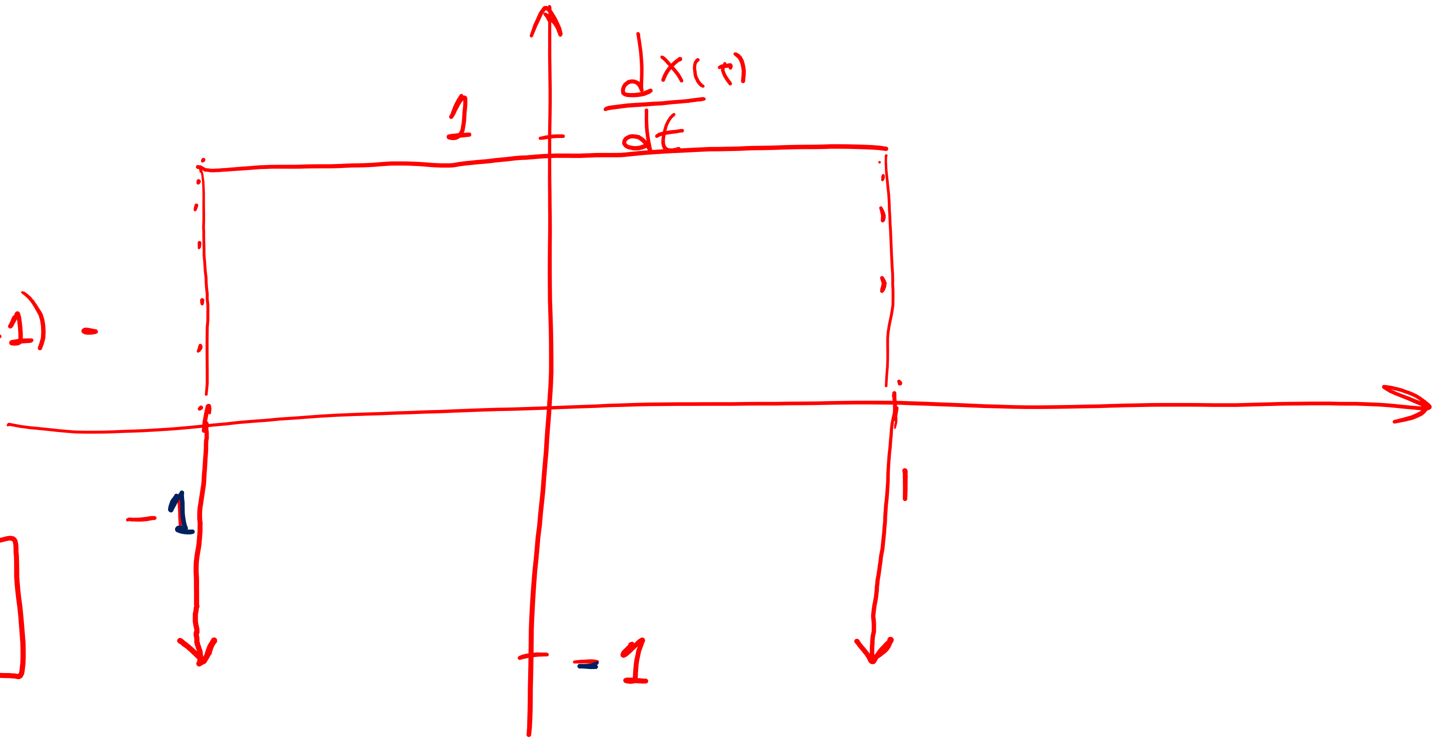
$$x(t) = \begin{cases} t, & -1 < t < 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$



$$\underline{X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt =}$$

α' τρόπος)

$$\frac{dx(t)}{dt} = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right) - \delta(t-1) - \delta(t+1)$$



$$\boxed{F\{x'(t)\} = j2\pi f X(f)}$$

$$F\{-\delta(t+1)\} + F\{-\delta(t-1)\} + F\{\mathrm{rect}(\tfrac{t}{2})\} =$$

$$\left\{ \frac{1}{j} = -j \right.$$

$$= \underbrace{-e^{j2\pi f} - e^{-j2\pi f}} + 2\,\mathrm{sinc}(2f) =$$

$$= -2\cos(2\pi f) + 2\,\mathrm{sinc}(2f) = \underline{F\{x'(t)\}}$$

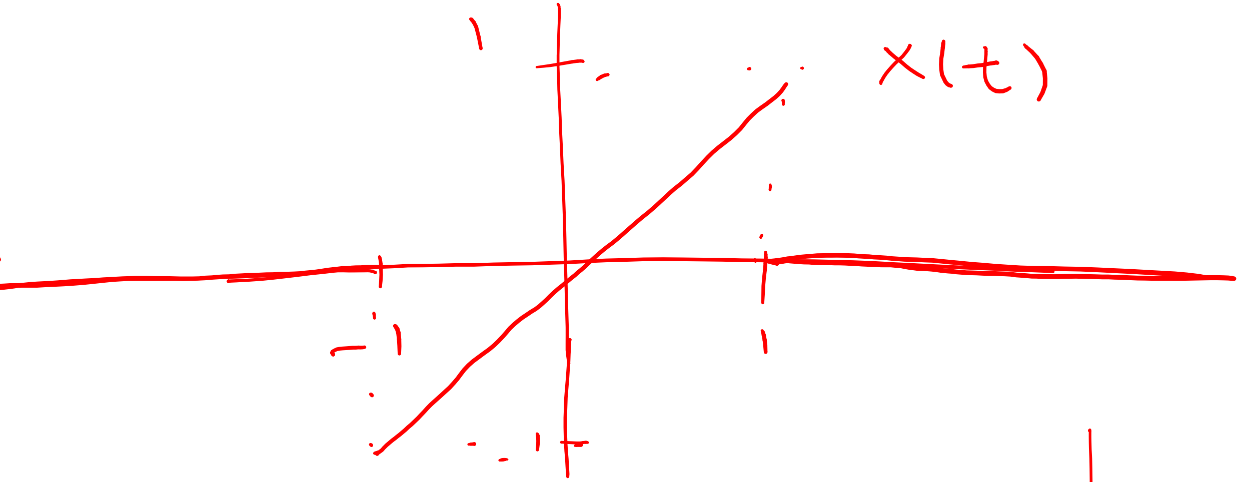
$$F\{x(t)\} = \frac{F\{x'(t)\}}{j2\pi f} = -\frac{\cancel{2}\cos(2\pi f)}{j\cancel{2}\pi f} + \frac{\cancel{2}\,\mathrm{sinc}(2f)}{j\cancel{2}\pi f} =$$

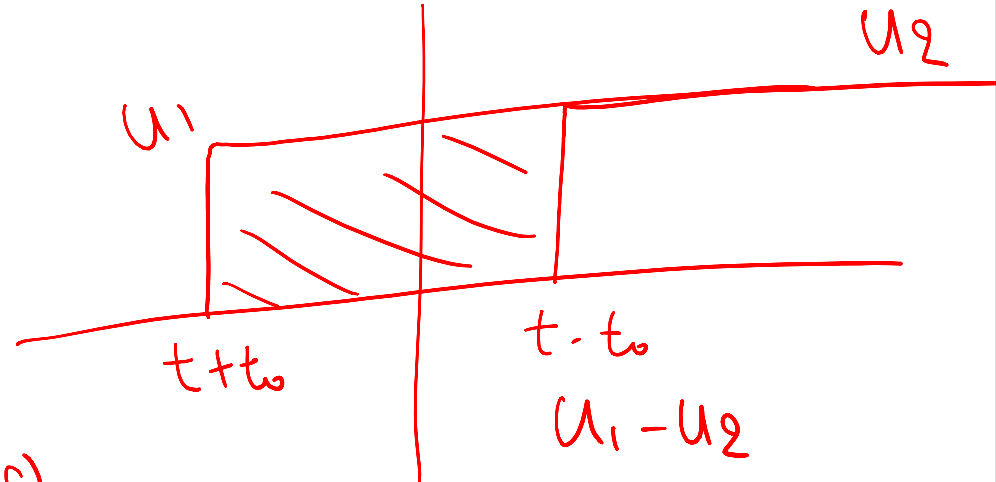
$$= \frac{j\cdot\cos(2\pi f)}{\pi f} - j\frac{\mathrm{sinc}(2f)}{\pi f} =$$

$$= j\left(\frac{\cos(2\pi f)}{\pi f} - \frac{\mathrm{sinc}(2f)}{\pi f}\right) = \boxed{\frac{j}{\pi f}\left(\cos(2\pi f) - \mathrm{sinc}(2f)\right)}$$

β τρόπος)

$$x(t) = \begin{cases} t, & -1 < t < 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$





$$x(t) = t\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$t\,x(t) \xleftrightarrow{F} \frac{j}{2\pi} X'(f), \quad X'(f) = \frac{d}{df} X(f)$$

$$F\left\{\mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right)\right\} = 2\,\mathrm{sinc}(2f)$$

$$\underset{x(t)}{\underset{\parallel}{t\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right)}} \xleftrightarrow{F} X(f) = \frac{j}{2\pi}\left(2\,\mathrm{sinc}(2f)\right)'$$

$$A = 1$$

$$A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T_0}\right) = \begin{cases} A, & -\frac{T_0}{2} < t < \frac{T_0}{2} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$\left(2\,\mathrm{sinc}(2f)\right)' = \frac{d}{df}\left(\frac{\cancel{2}\sin(2\pi f)}{\cancel{2}\pi f}\right) = \frac{d}{df}\left(\frac{\sin(2\pi f)}{\pi f}\right) =$$

$$= \frac{\sin(2\pi f)'\cdot \pi f - \sin(2\pi f)\cdot(\pi f)'}{(\pi f)^2} =$$

$$= \frac{(2\pi f)'\cos(2\pi f)\cdot \pi f - \sin(2\pi f)\,\pi}{(\pi f)^2} = \frac{2\pi^{\cancel{2}} f\cos(2\pi f) - \cancel{\pi}\sin(2\pi f)}{(\pi f)^2} =$$

$$= \frac{2\pi f\cos(2\pi f) - \sin(2\pi f)}{\pi f^2}$$

$$\frac{j}{2\pi}\cdot\frac{2\pi f\cos(2\pi f) - \sin(2\pi f)}{\pi f^2} = \boxed{\frac{j}{2\pi^2 f^2}\left(2\pi f\cos(2\pi f) - \sin(2\pi f)\right)}$$

με παραπάνω πράξεις ίδιο με α)...