



HY215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

Φροντιστήριο για την Τελική Εξέταση
Τρίτη 24 Μαΐου 2022

Επιμέλεια: Γιώργος Μάριος Κοκιαδης

Θέματα Ιουνίου 2020-21

Θέμα 3ο - 25 μονάδες: ο χώρος του μετασχ. Fourier και οι ιδιότητές του II

Το κέντρο βαρύτητας, C_g , ενός σήματος, $x(t)$, ορίζεται ως

$$C_g = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} tx(t)dt}{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt} \quad (55)$$

και έχει πολλές πρακτικές χρήσεις, μια εκ των οποίων περιλαμβάνει την “ευθυγράμμιση” των διαδοχικών τμημάτων ομιλίας κατά τις πρώτες απόπειρες σύνθεσης ομιλίας από κείμενο¹.

(α) (10 μ.) Βρείτε μια έκφραση για το C_g ως συνάρτηση του μετασχ. Fourier, $X(f)$, του σήματος $x(t)$, αξιοποιώντας ιδιότητες του μετασχ. Fourier στον αριθμητή και τον παρονομαστή.

(β) (12.5 μ.) Υπολογίστε το C_g για το σήμα που έχει πραγματικό και φανταστικό μέρος μετασχ. Fourier ως

$$X_R(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{2}\right) \quad (56)$$

$$X_I(f) = \text{tri}(f + 1) - \text{tri}(f - 1) \quad (57)$$

(γ) (2.5 μ.) Παρατηρείτε κάποιο πρόβλημα στον παραπάνω ορισμό του κέντρου βαρύτητας; Εξηγήστε.

Θέματα Ιουνίου 2020-21

Θέμα 4ο - 30 μονάδες: συσχετίσεις και φασματικές πυκνότητες

- (α) (10 μ.) Σωστό ή λάθος: “Υπάρχουν τουλάχιστον δυο διαφορετικά σήματα, $x(t) \neq y(t)$, που να έχουν την ίδια συνάρτηση αυτοσυσχέτισης, $\phi_x(\tau) = \phi_y(\tau)$ ”. Δικαιολογήστε κάθε απάντησή σας.
- (β) (20 μ.) Έστω το σήμα $x(t)$ με συνάρτηση αυτοσυσχέτισης

$$\phi_x(\tau) = \frac{2(b+1)}{(b+1)^2 + \tau^2} \quad (66)$$

και φασματική πυκνότητα ενέργειας $\Phi_x(f)$. Υπολογίστε την ενέργεια του σήματος $x(t)$ που κατανέμεται στο διάστημα συχνοτήτων $\left[-\frac{1}{b+1}, \frac{1}{b+1}\right]$.

Θέματα Ιουνίου 2020-21

Θέμα 5ο - 20 μονάδες: δειγματοληψία και φίλτρα επιλογής συχνοτήτων

Έστω το σήμα εισόδου

$$w(t) = 2 \cos(2(a \cdot 10)\pi t) - \cos\left(2[(b+6) \cdot 10]\pi t + \frac{\pi}{c+3}\right) - \frac{1}{2} \sin\left(110\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (77)$$

(α) **(5 μ.)** Βρείτε την ισχύ, P_w , και τη συχνότητα Nyquist για το παραπάνω σήμα.

(β) **(5 μ.)** Βρείτε το σήμα διακριτού χρόνου $w[n]$ αν η συχνότητα δειγματοληψίας του είναι η $f_s = 240$ Hz.

(γ) **(10 μ.)** Αν το παραπάνω σήμα $w(t)$ περάσει από ένα σύστημα με κρουστική απόκριση

$$h(t) = 120 \operatorname{sinc}(60t) \cos(2\pi 65t) \quad (78)$$

πόση είναι η ισχύς στην έξοδο του συστήματος και ποιος ο ρυθμός Nyquist για το σήμα εξόδου;

Θέματα Ιουνίου 2020-21

Θέμα 1ο - 30 μονάδες: overview: χώροι Laplace, Fourier, και χρόνου

Σας δίνεται η συνάρτηση μεταφοράς ενός γραμμικού χρονικά αμετάβλητου συστήματος

$$H(s) = \frac{2as}{a^2 - s^2}, \quad -a < \sigma < a \quad (1)$$

- (α) **(10 μ.)** Βρείτε την κρουστική απόκριση του συστήματος χρησιμοποιώντας είτε γνωστά ζεύγη και ιδιότητες είτε ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα και γνωστά ζεύγη.
- (β) **(12.5 μ.)** Μπορείτε να βρείτε την απόκριση συχνότητας του συστήματος, $H(f)$, από τη συνάρτηση μεταφοράς, $H(s)$; Αν ναι, για ποιά θετική συχνότητα η απόκριση πλάτους $|H(f)|$ είναι μέγιστη αν σας δίνεται ότι για $f \in (0, +\infty)$, το μέγιστο αυτό είναι μοναδικό; Αν όχι, εξηγήστε.
- (γ) **(2.5 μ.)** Να βρεθεί η περίφημη βηματική απόκριση του συστήματος, δηλ. η έξοδος, $y(t)$, του συστήματος για είσοδο $x(t) = u(t)$.
- (δ) **(5 μ.)** Να βρεθεί η έξοδος, $y(t)$, του συστήματος όταν στην είσοδο του βρεθεί το σήμα $x(t) = \cos\left(at + \frac{\pi}{d+3}\right)$, $-\infty < t < +\infty$.

Θέματα Ιουνίου 2020-21

Θέμα 2ο - 25 μονάδες: ο χώρος του μετασχ. Fourier και οι ιδιότητές του I

Έστω το σήμα $y(t) \longleftrightarrow Y(f)$ που δίνεται ως

$$y(t) = \begin{cases} \left(\frac{d+1}{T}\right)t & , -T < t < T \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases} \quad (45)$$

με $Z(f) = 2\pi f Y(f)$.

(α) **(12.5 μ.)** Βρείτε το $z(t)$.

(β) **(5 μ.)** Υπολογίστε το $Y(0)$

(γ) **(2.5 μ.)** Υπολογίστε το $\int_{-\infty}^{\infty} Y(f) df$

(δ) **(5 μ.)** Υπολογίστε το $\int_{-\infty}^{\infty} |Y(f)|^2 df$

Ερωτήσεις?
