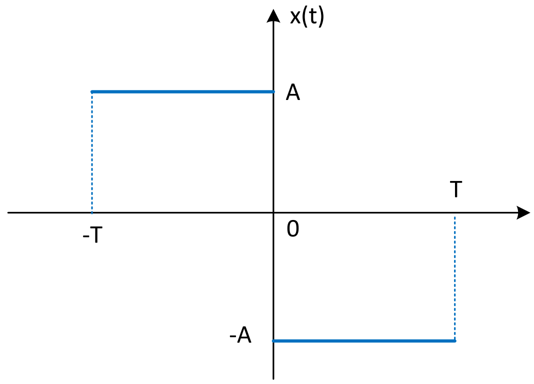
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2022-23
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Έκτο Φροντιστήριο

Άσκηση 1 - Μετασχηματισμός Fourier και Ιδιότητες Ι
Βρείτε το μετασχ. Fourier του σήματος που φαίνεται στο Σχήμα 1 με τους ακόλουθους τρόπους:



Σχήμα 1: *Σχήμα Άσκησης 1.*

(α΄) Χρησιμοποιώντας τον ορισμό.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε ότι $1 - \cos(2\theta) = 2\sin^2(\theta)$.

(β΄) Χρησιμοποιώντας τα γνωστά σας ζεύγη μετασχ. Fourier που γνωρίζετε και την ιδιότητα της μετατόπισης.

(γ΄) Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της παραγώγισης/ολοκλήρωσης και μετατόπισης.

Λύση:

α΄) Είναι

$$
\begin{aligned}
X(f) &= \int_{-T}^{0} A e^{-j2\pi f t} dt + \int_{0}^{T} (-A) e^{-j2\pi f t} dt & (1)\\
&= A \frac{1}{-j2\pi f} e^{-j2\pi f t}\Big]_{-T}^{0} - \frac{A}{-j2\pi f} e^{-j2\pi f t}\Big]_{0}^{T} & (2)\\
&= -\frac{A}{j2\pi f}(1 - e^{j2\pi f T}) + \frac{A}{j2\pi f}(e^{-j2\pi f T} - 1) & (3)\\
&= \frac{A}{j2\pi f}(e^{-j2\pi f T} - 1 - 1 + e^{j2\pi f T}) & (4)\\
&= \frac{A}{j2\pi f}(2\cos 2\pi f T - 2) = \frac{A}{j2\pi f}\Big(- 4\sin^2(\pi f T)\Big) & (5)\\
&= -\frac{2A}{j\pi f}\sin^2(\pi f T) = \frac{2Aj}{\pi f}\sin^2(\pi f T) & (6)
\end{aligned}
$$

β΄) Παρατηρούμε ότι το σχήμα περιλαμβάνει 2 τετραγωνικούς παλμούς στις θέσεις $t = \pm\frac{T}{2}$, με πλάτος A και διάρκεια T ο καθένας.

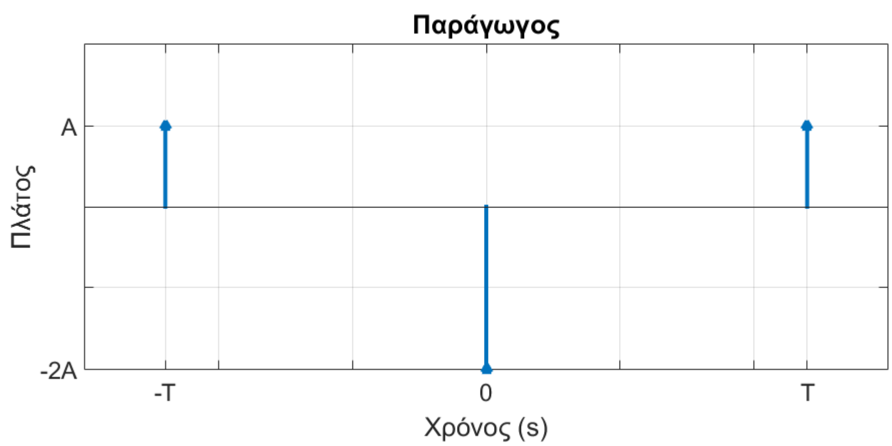
Γνωρίζουμε ότι

$$A\text{rect}\Big(\frac{t \pm t_0}{T}\Big) \overset{F}{\longleftrightarrow} AT\text{sinc}(fT)e^{\pm j2\pi f t_0}$$

Άρα

$$\begin{aligned} x(t) = A\text{rect}\Big(\frac{t+\frac{T}{2}}{T}\Big) - A\text{rect}\Big(\frac{t-\frac{T}{2}}{T}\Big) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(f) &= AT\text{sinc}(fT)e^{j2\pi f\frac{T}{2}} - AT\text{sinc}(fT)e^{-j2\pi f\frac{T}{2}} &(7)\\ &= AT\text{sinc}(fT)(e^{j\pi fT} - e^{-j\pi fT}) &(8)\\ &= AT\text{sinc}(fT)2j\sin(\pi fT) &(9)\\ &= AT\frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT}2j\sin(\pi fT) &(10)\\ &= \frac{2Aj}{\pi f}\sin^2(\pi fT) &(11) \end{aligned}$$

γ΄) Αν παραγωγίσουμε το $x(t)$, θα έχουμε:



Το σήμα παραπάνω γράφεται ως:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A\delta(t+T) - 2A\delta(t) + A\delta(t-T)$$

κι έχει Μ.F. ως

$$\begin{aligned} F\Big\{\frac{dx(t)}{dt}\Big\} &= Ae^{j2\pi fT} - 2A + Ae^{-j2\pi fT} &(12)\\ &= 2A\cos(2\pi fT) - 2A = -4A\sin^2(\pi fT) &(13) \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $F\{x'(t)\}\Big|_{f=0} = 0$ και άρα από ιδιότητα της παραγώγισης/ολοκλήρωσης έχουμε ότι

$$F\Big\{\frac{dx(t)}{dt}\Big\} = -4A\sin^2(\pi fT) = j2\pi f X(f) \Longleftrightarrow X(f) = \frac{-4A\sin^2(\pi fT)}{j2\pi f} + 0\cdot\delta(f) = -\frac{2Aj}{\pi f}\sin^2(\pi fT) \quad (14)$$

Άσκηση 2 - Μετασχηματισμός Fourier και Ιδιότητες - II

Χρησιμοποιήστε τις ιδιότητες και τους πίνακες με ζεύγη μετασχ. Fourier των σημειώσεών σας για να υπολογίσετε το μετασχ. Fourier των παρακάτω σημάτων:

(α') $x(t) = \sin(2\pi t)e^{-t}u(t)$

(β') $x(t) = te^{-3|t-1|}$

(γ') $x(t) = \dfrac{2\sin(3\pi t)}{\pi t}\dfrac{\sin(2\pi t)}{\pi t}$

(δ') $x(t) = \dfrac{d}{dt}(te^{-2t}\sin(t)u(t))$

(ε') $x(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} \frac{\sin(2\pi\tau)}{\pi\tau}d\tau$

(ϛ') $x(t) = e^{-t+2}u(t-2)$

(ζ') $x(t) = \dfrac{\sin(t)}{\pi t} * \dfrac{d}{dt}\dfrac{\sin(2t)}{\pi t}$

Λύση:

(α') Από πίνακα ζευγών: $X(f) = \dfrac{2\pi}{(1+j2\pi f)^2 + 4\pi^2}$

(β') Είναι $x(t) = te^{-3|t-1|}$, και

- $s(t) = e^{-3|t|} \overset{F}{\longleftrightarrow} S(f) = \dfrac{6}{9+4\pi^2 f^2}$
- $w(t) = s(t-1) \overset{F}{\longleftrightarrow} W(f) = e^{-j2\pi f}S(f)$
- $x(t) = tw(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(f) = \dfrac{j}{2\pi}\dfrac{dW(f)}{df}$

Άρα:

$$X(f) = \frac{j}{2\pi}\frac{d}{df}\left[e^{-j2\pi f}\frac{6}{9+4\pi^2 f^2}\right] \tag{15}$$

$$= \frac{j}{2\pi}\left(-\frac{12j\pi e^{-j2\pi f}}{9+4\pi^2 f^2} - \frac{48\pi^2 f e^{-j2\pi f}}{(9+4\pi^2 f^2)^2}\right) \tag{16}$$

(γ') Είναι $x(t) = 2\dfrac{\sin(3\pi t)}{\pi t}\dfrac{\sin(2\pi t)}{\pi t}$

- $s(t) = \dfrac{\sin(3\pi t)}{\pi t} = 3\text{sinc}(3t) \overset{F}{\longleftrightarrow} S(f) = \text{rect}\left(\dfrac{f}{3}\right) = \begin{cases} 1, & -\frac{3}{2} < f < \frac{3}{2} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$
- $w(t) = \dfrac{\sin(2\pi t)}{\pi t} = 2\text{sinc}(2t) \overset{F}{\longleftrightarrow} W(f) = \text{rect}\left(\dfrac{f}{2}\right) = \begin{cases} 1, & -1 < f < 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

Άρα

$$x(t) = 12\text{sinc}(3t)\text{sinc}(2t) = 2s(t)w(t) \xleftrightarrow{F} X(f) = 2W(f) * S(f) = 2\text{rect}\left(\frac{f}{3}\right) * \text{rect}\left(\frac{f}{2}\right) \tag{17}$$

Εκτελώντας τη συνέλιξη παίρνουμε

$$X(f) = \begin{cases} 2f+5, & -\frac{5}{2} < f < -\frac{1}{2} \\ 4, & -\frac{1}{2} < f < \frac{1}{2} \\ -2f+5, & \frac{1}{2} < f < \frac{5}{2} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{18}$$

(δ΄) Είναι $x(t) = \dfrac{d}{dt} te^{-2t}\sin(t)u(t) = \dfrac{d}{dt}\left[te^{-2t}u(t)\dfrac{e^{jt}-e^{-jt}}{2j}\right]$

- $s(t) = te^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{F} S(f) = \dfrac{1}{(2+j2\pi f)^2}$
- $w_1(t) = e^{jt}s(t) \xleftrightarrow{F} W_1(f) = S\left(f - \dfrac{1}{2\pi}\right)$
- $w_2(t) = e^{-jt}s(t) \xleftrightarrow{F} W_2(f) = S\left(f + \dfrac{1}{2\pi}\right)$
- $x(t) = \dfrac{d}{dt}\dfrac{1}{2j}[w_1(t) + w_2(t)] \xleftrightarrow{F} X(f) = \pi f\left(W_1(f) + W_2(f)\right)$

Άρα

$$X(f) = \pi f\left(\frac{1}{(2+j2\pi(f-\frac{1}{2\pi}))^2} - \frac{1}{(2+j2\pi(f+\frac{1}{2\pi}))^2}\right) \tag{19}$$

(ε΄) Είναι $x(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} \frac{\sin(2\pi\tau)}{\pi\tau}d\tau$

- $s(t) = \dfrac{\sin(2\pi\tau)}{\pi\tau} = 2\text{sinc}(2\tau) \xleftrightarrow{F} S(f) = \text{rect}\left(\dfrac{f}{2}\right) = \begin{cases} 1, & -1 < f < 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$
- $x(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} s(\tau)d\tau \xleftrightarrow{F} X(f) = \frac{1}{j2\pi f}S(f) + \frac{S(0)}{2}\delta(f)$

Άρα

$$X(f) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & f = 0 \\ \frac{1}{j2\pi f}, & |f| < 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{20}$$

(ϛ΄) Είναι $x(t) = e^{-t+2}u(t-2)$

- $s(t) = e^{-t}u(t) \xleftrightarrow{F} S(f) = \dfrac{1}{1+j2\pi f}$
- $x(t) = s(t-2) \xleftrightarrow{F} X(f) = e^{-j4\pi f}S(f)$

Άρα

$$X(f) = e^{-j4\pi f}\frac{1}{1+j2\pi f} \tag{21}$$

(ζ) Είναι $x(t) = \dfrac{\sin(t)}{\pi t} * \dfrac{d}{dt}\dfrac{\sin(2t)}{\pi t}$

- $s(t) = \dfrac{\sin(t)}{\pi t} = \dfrac{\sin(\pi \frac{t}{\pi})}{\pi t} = \dfrac{\sin(\pi \frac{t}{\pi})}{\pi^2 (\frac{t}{\pi})} = \dfrac{1}{\pi}\mathrm{sinc}\left(\dfrac{1}{\pi}t\right) \overset{F}{\longleftrightarrow} S(f) = \mathrm{rect}\left(\dfrac{f}{\frac{1}{\pi}}\right) = \begin{cases} 1, & -\frac{1}{2\pi} < f < \frac{1}{2\pi} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

- $w(t) = \dfrac{\sin(2t)}{\pi t} = 2\dfrac{\sin(2\pi \frac{t}{\pi})}{2\pi t} = 2\dfrac{\sin(2\pi \frac{t}{\pi})}{2\pi^2 (\frac{t}{\pi})} = \dfrac{2}{\pi}\mathrm{sinc}\left(\dfrac{2}{\pi}t\right) \overset{F}{\longleftrightarrow} W(f) = \mathrm{rect}\left(\dfrac{f}{\frac{2}{\pi}}\right) = \begin{cases} 1, & -\frac{1}{\pi} < f < \frac{1}{\pi} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

- $z(t) = \dfrac{d}{dt}w(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} Z(f) = j2\pi f W(f)$

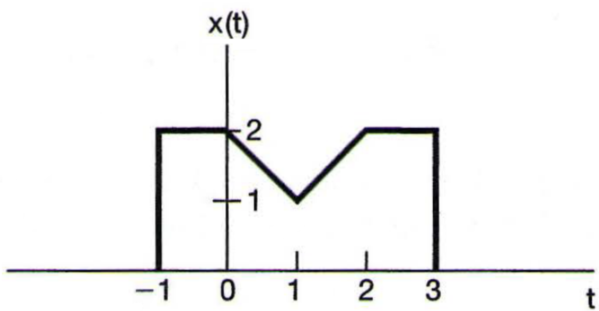
- $x(t) = s(t) * z(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(f) = S(f)Z(f) = j2\pi f W(f) S(f)$

Άρα

$$X(f) = \begin{cases} j2\pi f, & |f| < \frac{1}{2\pi} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{22}$$

Άσκηση 3 - Μετασχηματισμός Fourier και Ιδιότητες - ΙΙΙ

Έστω $X(f)$ ο μετασχ. Fourier του σήματος $x(t)$, το οποίο φαίνεται στο Σχήμα 2.



Σχήμα 2: *Σήμα $x(t)$ Άσκησης 3.*

(α') Ο μετασχηματισμός μπορεί να γραφεί στη μορφή $A(f)e^{j\Theta(f)}$, με $A(f)$ και $\Theta(f)$ πραγματικές συναρτήσεις. Βρείτε τη $\Theta(f)$.

(β') Υπολογίστε το $X(0)$.

(γ') Υπολογίστε το $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)df$.

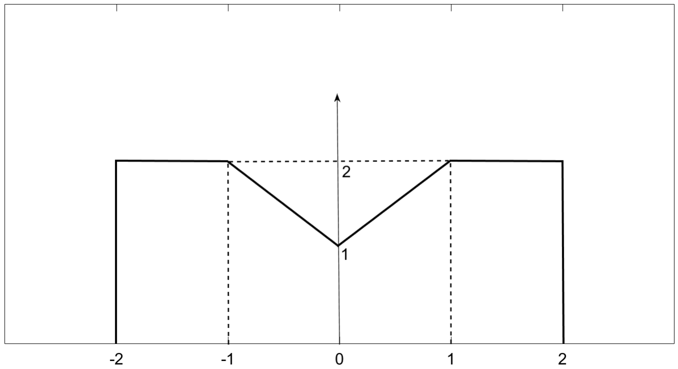
(δ') Υπολογίστε το $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} 2X(f)\frac{\sin(2\pi f)}{2\pi f}e^{j4\pi f}df$.

(ε') Υπολογίστε το $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$.

Λύση:

(α') Αν το $x(t)$ ήταν όπως στο Σχήμα 3 τότε λόγω άρτιας συμμετρίας θα είχε μηδενική ή σταθερή φάση. Η μετατόπιση δεξιά κατά $t_0 = 1$ θα του δώσει φάση $\Theta(f) = -2\pi f$, σύμφωνα με την ιδιότητα της μετατόπισης.

(β') $X(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi\cdot 0\cdot t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt = \text{Εμβαδό } x(t) = 7$



Σχήμα 3: *Μετατοπισμένο σχήμα Άσκησης 3.*

(γ') $\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)df = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{-j2\pi f\cdot 0} = x(0) = 2$

(δ') Έστω $Y(f) = \frac{2\sin(2\pi f)}{2\pi f}e^{j2\pi 2f} \xleftrightarrow{F} y(t) = \mathrm{rect}\Big(\frac{t+2}{2}\Big)$, οπότε:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)Y(f)df = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)Y(f)e^{j2\pi ft}df\Big|_{t=0} \tag{23}$$

$$= F^{-1}\{X(f)Y(f)\}\Big|_{t=0} = x(t) * y(t)\Big|_{t=0} \tag{24}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(-\tau)d\tau = \frac{7}{2} \tag{25}$$

(ε') $\int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt = \frac{38}{3}$, γιατί το τετράγωνο του σήματος γράφεται ως

$$x^2(t) = \begin{cases} 4, & -1 < t < 0 \\ (-t+2)^2, & 0 \le t < 1 \\ t^2, & 1 \le t < 2 \\ 4, & 2 \le t < 3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{26}$$

Ολοκληρώνοντας καταλήγουμε στο ζητούμενο αποτέλεσμα.

Άσκηση 4 - ΓΧΑ συστήματα στο χώρο του Fourier I

Βρείτε την απόκριση σε συχνότητα, $H(f)$, και την κρουστική απόκριση, $h(t)$, του παρακάτω συστήματος.

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 5\frac{d}{dt}y(t) + 6y(t) = -\frac{d}{dt}x(t) \tag{27}$$

Χρησιμοποιήστε την ιδιότητα της παραγώγισης.

Λύση:

Μεταφέροντας τη διαφορική στο χώρο της συχνότητας

$$(j2\pi f)^2Y(f) + j2\pi f \cdot 5Y(f) + 6Y(f) = -j2\pi fX(f) \tag{28}$$

$$(j2\pi f)^2Y(f) + j10\pi fY(f) + 6Y(f) = -j2\pi fX(f) \tag{29}$$

$$Y(f)\Big((j2\pi f)^2 + j10\pi f + 6\Big) = -j2\pi f X(f) \tag{30}$$

$$\frac{Y(f)}{X(f)} = H(f) = \frac{-j2\pi f}{(j2\pi f)^2 + j2\pi 5f + 6} \tag{31}$$

Το πολυώνυμο

$$(j2\pi f)^2 + j2\pi 5f + 6 \longrightarrow u^2 + 5u + 6$$

παραγοντοποιείται ως

$$(u - u_1)(u - u_2)$$

με

$$u_1, u_2 = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2} = -3, -2$$

άρα

$$u_1 = -3, u_2 = -2$$

Οπότε η (31) γράφεται ως:

$$H(f) = \frac{j2\pi f}{(j2\pi f + 3)(j2\pi f + 2)} \tag{32}$$

Ο βαθμός του παρανομαστή είναι μεγαλύτερος από του αριθμητή άρα μπορούμε να κάνουμε PFE:

$$H(f) = \frac{A}{j2\pi f + 3} + \frac{B}{j2\pi f + 2} \tag{33}$$

με

$$A = \frac{j2\pi f}{(j2\pi f + 3)(j2\pi f + 2)}(j2\pi f + 3)\Big|_{j2\pi f = -3} = -3 \tag{34}$$

και

$$B = \frac{j2\pi f}{(j2\pi f + 3)(j2\pi f + 2)}(j2\pi f + 2)\Big|_{j2\pi f = -2} = 2 \tag{35}$$

Άρα

$$H(f) = -3 \cdot \frac{1}{j2\pi f + 3} + 2 \cdot \frac{1}{j2\pi f + 2}$$

και από γνωστά ζεύγη έχουμε

$$h(t) = -3e^{-3t}u(t) + 2e^{-2t}u(t)$$

Άσκηση 5 - ΓΧΑ συστήματα στο χώρο του Fourier II

Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα το οποίο παράγει έξοδο

$$y(t) = (2e^{-t} - 2e^{-4t})u(t) \tag{36}$$

όταν στην είσοδο εμφανίζεται το σήμα

$$x(t) = (e^{-t} + e^{-3t})u(t) \tag{37}$$

(α') Βρείτε την απόκριση συχνότητας $H(f)$ του συστήματος.

(β') Βρείτε την κρουστική απόκριση του συστήματος, $h(t)$.

(γ') Μπορείτε να βρείτε μια διαφορική εξίσωση που να σχετίζει την παραπάνω είσοδο με την παραπάνω έξοδο;

Λύση:

(α') Ισχύει ότι

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} \tag{38}$$

με

$$Y(f) = \frac{2}{1+j2\pi f} - \frac{2}{4+j2\pi f}$$

και

$$X(f) = \frac{1}{1+j2\pi f} + \frac{1}{3+j2\pi f} \tag{39}$$

οπότε

$$H(f) = \frac{3(3+j2\pi f)}{(4+j2\pi f)(2+j2\pi f)}$$

μετά από πράξεις.

(β') Είναι

$$h(t) = F^{-1}\{H(f)\} = F^{-1}\left\{\frac{A}{4+j2\pi f} + \frac{B}{2+j2\pi f}\right\} \tag{40}$$

με

$$A = \frac{3(3+j2\pi f)}{(4+j2\pi f)(2+j2\pi f)}(4+j2\pi f)\bigg|_{j2\pi f=-4} = \frac{3(3-4)}{2-4} = \frac{3}{2}$$

και

$$B = \frac{3(3+j2\pi f)}{(4+j2\pi f)(2+j2\pi f)}(2+j2\pi f)\bigg|_{j2\pi f=-2} = \frac{3(3-2)}{4-2} = \frac{3}{2}$$

άρα

$$H(f) = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{4+j2\pi f} + \frac{1}{2+j2\pi f}\right) \xleftrightarrow{F} h(t) = \frac{3}{2}(e^{-4t} + e^{-2t})u(t) \tag{41}$$

(γ') Είναι

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{9+3j2\pi f}{8+4j2\pi f+2j2\pi f+(j2\pi f)^2} \tag{42}$$

$$9X(f) + 3j2\pi f X(f) = 8Y(f) + 4j2\pi f Y(f) + 2j2\pi f Y(f) + (j2\pi f)^2 Y(f) \tag{43}$$

Επειδή:

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \xleftrightarrow{F} (j2\pi f)^n X(f)$$

η (43) δίνει:

$$8y(t) + 4\frac{d}{dt}y(t) + 2\frac{d}{dt}y(t) + \frac{d^2}{dt^2}y(t) = 9x(t) + 3\frac{d}{dt}x(t) \tag{44}$$

Άρα η διαφορική εξίσωση είναι η:

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 6\frac{d}{dt}y(t) + 8y(t) = 9x(t) + 3\frac{d}{dt}x(t)$$