ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2023-24
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

6ο Φροντιστήριο

Άσκηση 1

Ελέγξτε αν το παρακάτω σύστημα

$$y(t) = \frac{1}{2+\cos(x(t))} \tag{1}$$

είναι γραμμικό, χρονικά αμετάβλητο, ευσταθές, αιτιατό, και δυναμικό.

<u>Λύση:</u>

- Για να είναι το σύστημα γραμμικό πρέπει να είναι ομογενές και αθροιστικό. Το σύστημα δεν είναι ομογενές, γιατί για είσοδο $ax(t)$ η έξοδος είναι

$$y_{x:=ax(t)}(t) = \frac{1}{2+\cos(ax(t))} \neq a\frac{1}{2+\cos(x(t))} \tag{2}$$

  και άρα δεν είναι ομογένές και αυτό συνεπάγεται ότι δεν είναι γραμμικό.

- Είναι Χ.Α. γιατί για είσοδο $x(t-t_0)$ η έξοδος είναι

$$y_{x:=x(t-t_0)}(t) = \frac{1}{2+\cos(x(t-t_0))} \tag{3}$$

  και η καθυστερημένη έξοδος κατά t_0 δίνεται ως

$$y(t-t_0) = \frac{1}{2+\cos(x(t-t_0))} \tag{4}$$

  Οι δυο έξοδοι είναι ίδιες οπότε το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο.

- Το σύστημα είναι ευσταθές γιατί για $|x(t)| < B_x \implies |y(t)| = \frac{1}{|2+\cos(x(t))|} \leq \frac{1}{|2-1|} = 1$, γιατί $|\cos(x(t))| \leq 1,\ \forall x(t)$.

- Είναι αιτιατό γιατί η έξοδος εξαρτάται μόνο από την τρέχουσα τιμή της εισόδου και όχι από μελλοντικές.

- Δεν είναι δυναμικό γιατί δεν απαιτείται μνήμη για την αποθηκευση άλλων χρονικών στιγμών (μελλοντικών ή παρελθοντικών) της εισόδου ή της εξόδου.

Άσκηση 2

Ένα σύστημα περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) - y(t) = x(t) + \frac{d}{dt}x(t) \tag{5}$$

και έχει αρχικές συνθήκες $y(0^-) = 1$, $\frac{d}{dt}y(t)\Big|_{t=0^-} = 0$.

(αʹ) Βρείτε την απόκριση μηδενικής εισόδου, $y_{zi}(t)$.

(βʹ) Βρείτε την κρουστική του απόκριση, $h(t)$.

(γʹ) Βρείτε την απόκριση μηδενικής κατάστασης, $y_{zs}(t)$, για $x(t) = u(t)$.

Λύση:

(αʹ) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι της μορφής

$$\lambda^2 - 1 = 0 \tag{6}$$

και άρα οι χαρακτηριστικές ρίζες είναι οι $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = -1$. Οπότε η απόκριση μηδενικής εισόδου θα είναι της μορφής

$$y_{zi}(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{t}, \;\; t > 0 \tag{7}$$

Από τις αρχικές συνθήκες που μας δίνονται έχουμε

$$y_{zi}(0^-) = 1 \tag{8}$$

$$y'_{zi}(0^-) = 0 \tag{9}$$

Οπότε έχουμε το σύστημα

$$y_{zi}(0^-) = c_1 + c_2 = 1 \tag{10}$$

$$y'_{zi}(0^-) = -c_1 + c_2 = 0 \tag{11}$$

και λύνοντάς το έχουμε

$$c_1 = \frac{1}{2} \tag{12}$$

$$c_2 = \frac{1}{2} \tag{13}$$

Οπότε

$$y_{zi}(t) = \left[\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{t}\right]u(t) \tag{14}$$

(βʹ) Θεωρούμε το σύστημα

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) - y(t) = x(t) \tag{15}$$

με κρουστική απόκριση $h_o(t)$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι της μορφής

$$\lambda^2 - 1 = 0 \tag{16}$$

και άρα οι χαρακτηριστικές ρίζες είναι οι $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = -1$. Οπότε η κρουστική απόκριση θα είναι της μορφής

$$h_o(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{t}, \;\; t > 0 \tag{17}$$

Οι ψευδοαρχικές συνθήκες που εισάγει η συνάρτηση Δέλτα είναι οι

$$h_o(0^+) = 0 \tag{18}$$

$$h'_o(0^+) = 1 \tag{19}$$

Οπότε έχουμε το σύστημα

$$h_o(0^+) = c_1 + c_2 = 0 \tag{20}$$
$$h'_o(0^+) = -c_1 + c_2 = 1 \tag{21}$$

και λύνοντάς το έχουμε

$$c_1 = -\frac{1}{2} \tag{22}$$
$$c_2 = \frac{1}{2} \tag{23}$$

Οπότε

$$h_o(t) = -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{t}, \;\; t > 0 \tag{24}$$

Για το δοθέν στην εκφώνηση σύστημα, η κρουστική απόκριση θα είναι

$$h(t) = h_o(t) + \frac{d}{dt}h_o(t) = e^t u(t) \tag{25}$$

(γ΄) Θα είναι

$$y_{zs}(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\tau}u(\tau)u(t-\tau)d\tau \tag{26}$$

Όμως

$$u(\tau)u(t-\tau) = 1 \tag{27}$$

για $0 < \tau < t$, οπότε

$$y(t) = \int_0^t e^{\tau}d\tau = e^{\tau}\Big|_0^t = e^t - 1 \tag{28}$$

για $t > 0$, οπότε

$$y_{zs}(t) = (e^t - 1)u(t) \tag{29}$$

Άσκηση 3

Δείξτε ότι για το περιοδικό σήμα $x(t)$ το οποίο σε μια περίοδο $T_0 = 1$ δίνεται ως

$$x_{T_0}(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{3} < t < \frac{2}{3} \\ 1, & \frac{2}{3} < t < 1 \end{cases} \tag{30}$$

οι συντελεστές Fourier του είναι

$$X_0 = \frac{5}{6}, \;\; X_k = -\frac{1}{2\pi k}(-1)^k \sin\left(\frac{\pi k}{3}\right), \;\; \forall \;\; k \in \mathrm{Z} \tag{31}$$

Λύση:
Είναι

$$X_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)dt = \int_0^{1/3} dt + \frac{1}{2}\int_{1/3}^{2/3} dt + \int_{2/3}^{1} dt \tag{32}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) + 1 - \frac{2}{3} = \frac{5}{6} \tag{33}$$

και

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt = \int_0^{1/3} e^{-j2\pi k f_0 t}dt + \frac{1}{2}\int_{1/3}^{2/3} e^{-j2\pi k f_0 t}dt + \int_{1/3}^{1} e^{-j2\pi k f_0 t}dt \tag{34}$$

$$= \frac{1}{-j2\pi k f_0}\left(e^{-j2\pi k f_0 t}\Big|_0^{1/3} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi k f_0 t}\Big|_{1/3}^{2/3} + e^{-j2\pi k f_0 t}\Big|_{2/3}^{1}\right) \tag{35}$$

κι επειδή $f_0 = 1/T_0 = 1$ Hz, έχουμε

$$X_k = \frac{1}{-j2\pi k}\left(e^{-j2\pi k t}\Big|_0^{1/3} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi k t}\Big|_{1/3}^{2/3} + e^{-j2\pi k t}\Big|_{2/3}^{1}\right) \tag{36}$$

$$= \frac{1}{-j2\pi k}\left(e^{-j2\pi k/3} - 1 + \frac{1}{2}e^{-j4\pi k/3} - \frac{1}{2}e^{-j2\pi k/3} + 1 - e^{-j4\pi k/3}\right) \tag{37}$$

$$= \frac{1}{-j2\pi k}e^{-j\pi k}\left(\frac{1}{2}e^{j\pi k/3} - \frac{1}{2}e^{-j\pi k/3}\right) \tag{38}$$

$$= -\frac{1}{2\pi k}(-1)^k \sin\left(\frac{\pi k}{3}\right) \tag{39}$$

Άσκηση 4
Ας συμβολίσουμε το γνωστό μας περιοδικό με περίοδο T_0 σήμα

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0) \tag{40}$$

ως

$$\delta_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0) \tag{41}$$

Αν γνωρίζετε ότι το περιοδικό σήμα

$$x(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{\frac{1}{2}}\right) * 3\delta_3(t) \tag{42}$$

έχει συντελεστές Fourier

$$X_k = \alpha\frac{\sin\left(\frac{\pi k}{\beta}\right)}{\pi k} \tag{43}$$

τότε

(α΄) δείξτε ότι

$$x(t) = 3\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{t-3k}{\frac{1}{2}}\right) \tag{44}$$

(β') σχεδιάστε μερικές (δυο-τρεις) περιόδους από το σήμα $x(t)$

(γ') βρείτε τις σταθερές α, β.

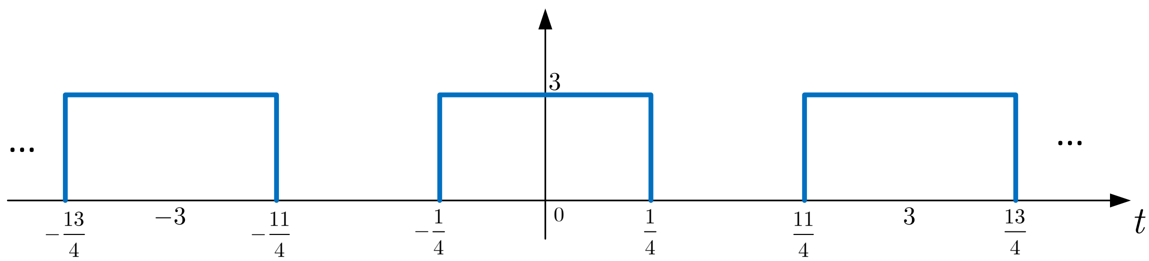
Λύση:

(α') Από τις ιδιότητες συνέλιξης, το περιοδικό σήμα $x(t)$ γράφεται ως

$$x(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{\frac{1}{2}}\right) * 3\delta_3(t) = 3\text{rect}\left(\frac{t}{\frac{1}{2}}\right) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-3k) = 3\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{rect}\left(\frac{t-3k}{\frac{1}{2}}\right) \tag{45}$$

το οποίο αναπαριστά έναν τετραγωνικό παλμό διάρκειας 0.5 και πλάτους 3, περιοδικά επαναλαμβανόμενο ανά $T_0 = 3$.

(β') Δείτε το Σχήμα 1.



Σχήμα 1: *Περιοδικό σήμα Άσκησης 5.*

(γ') Οι συντελεστές του δίνονται ως

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt = \frac{1}{3}\int_{-1/4}^{1/4} 3e^{-j2\pi k/3t} = \frac{1}{3}\frac{3}{(-j2\pi k/3)}e^{-j2\pi(k/3)t}\Big|_{-1/4}^{1/4} \tag{46}$$

$$= \frac{3}{-j2\pi k}(e^{-j2\pi k/12} - e^{j2\pi k/12}) = \frac{3}{-j2\pi k}(-2j\sin(\pi k/6)) = \frac{3}{\pi k}\sin\left(\frac{\pi k}{6}\right) \tag{47}$$

Συγκρίνοντας με τη σχέση

$$X_k = \alpha\frac{\sin\left(\frac{\pi k}{\beta}\right)}{\pi k} \tag{48}$$

παρατηρούμε ότι

$$\alpha = 3, \quad \beta = 6 \tag{49}$$

Άσκηση 5

Έστω ένα **περιοδικό**, **άρτιο**, **πραγματικό** σήμα $x(t)$ με περίοδο $T_0 = \frac{1}{400}$ s, το οποίο αναπτύσσεται σε σειρά Fourier με συντελεστές X_k. Σας δίνονται τα ακόλουθα στοιχεία:

- $X_k = 0, \;\; |k| > 3$
- $X_2 = 2X_3$

- $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 = \frac{5}{32}$
- $\displaystyle\int_{T_0} x(t)dt = 0$
- $\displaystyle\int_{T_0} x(t)e^{-j\pi 800t}dt = 0$

Βρείτε τις πιθανές μορφές του σήματος $x(t)$.

Λύση:
Αφού $x(t)$ πραγματικό, θα ισχύει ότι

$$X_{-k} = X_k^* \Longrightarrow |X_{-k}|^2 = |X_k^*|^2 = |X_k|^2 \tag{50}$$

Επίσης οι συντελεστές X_k με $|k| > 3$ είναι μηδενικοί, και λόγω αρτιότητας, οι συντελεστές X_k είναι πραγματικοί αριθμοί (όχι μιγαδικοί). Άρα το σήμα θα γράφεται ως

$$x(t) = X_{-2}e^{-j2\pi 2f_0t} + X_{-1}e^{-j2\pi f_0t} + X_0 + X_1e^{j2\pi f_0t} + X_2e^{j2\pi 2f_0t} \tag{51}$$

Οπότε από θεώρημα Parseval

$$P_x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 = X_0^2 + 2|X_1|^2 + 2|X_2|^2 + 2|X_3|^2 = \frac{5}{32} \tag{52}$$

Όμως

$$\int_{T_0} x(t)dt = 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)dt = 0 \Longleftrightarrow X_0 = 0 \tag{53}$$

και άρα

$$P_x = 2|X_1|^2 + 2|X_2|^2 + 2|X_3|^2 = \frac{5}{32} \Longleftrightarrow |X_1|^2 + |X_2|^2 + |X_3|^2 = \frac{5}{64} \tag{54}$$

Επειδή

$$X_2 = 2X_3 \Longrightarrow |X_2|^2 = 4|X_3|^2 \tag{55}$$

και αφού $f_0 = 400$ Hz

$$\int_{T_0} x(t)e^{-j\pi 800t}dt = \int_{T_0} x(t)e^{-j2\pi 400t}dt = \int_{T_0} x(t)e^{-j2\pi\cdot 1\cdot f_0t}dt = 0 \Longleftrightarrow X_1 = 0 \tag{56}$$

έχουμε

$$|X_1|^2 + |X_2|^2 + |X_3|^2 = \frac{5}{64} \Longleftrightarrow 4|X_3|^2 + |X_3|^2 = \frac{5}{64} \Longleftrightarrow |X_3|^2 = \frac{1}{64} \Longrightarrow |X_3| = \frac{1}{8} \Longrightarrow X_3 = \pm\frac{1}{8} \tag{57}$$

Κατά συνέπεια

$$X_2 = 2X_3 = \pm 2\frac{1}{8} = \pm\frac{1}{4} \Longrightarrow \begin{cases} X_2 = \frac{1}{4},\ \ X_3 = \frac{1}{8}, \\ \\ X_2 = -\frac{1}{4},\ \ X_3 = -\frac{1}{8}, \end{cases} \tag{58}$$

και κατά συνέπεια θα έχουμε τα εξής σύνολα συντελεστών Fourier:

$$\begin{cases} X_{-3} = -\frac{1}{8},\ X_{-2} = -\frac{1}{4},\ X_{-1} = 0,\ X_0 = 0,\ X_1 = 0,\ X_2 = \frac{1}{4},\ \ X_3 = \frac{1}{8}, \\ \\ X_{-3} = \frac{1}{8},\ X_{-2} = \frac{1}{4},\ X_{-1} = 0,\ X_0 = 0,\ X_1 = 0,\ X_2 = -\frac{1}{4},\ \ X_3 = -\frac{1}{8}, \end{cases} \tag{59}$$

Έτσι τα σήματα θα είναι

$$x_1(t) = \frac{1}{2}\cos(2\pi 800t) + \frac{1}{4}\cos(2\pi 1200t),\ \ x_2(t) = -\frac{1}{2}\cos(2\pi 800t) - \frac{1}{4}\cos(2\pi 1200t) \tag{60}$$