Φροντιστήριο 6

Άσκηση 2

Ένα σύστημα περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\boxed{\frac{d^2}{dt^2}y(t) - y(t) = x(t) + \frac{d}{dt}x(t)} \tag{5}$$

και έχει αρχικές συνθήκες $y(0^-) = 1$, $\frac{d}{dt}y(t)\Big|_{t=0^-} = 0$.

(α΄) Βρείτε την απόκριση μηδενικής εισόδου, $y_{zi}(t)$.

(β΄) Βρείτε την κρουστική του απόκριση, $h(t)$.

(γ΄) Βρείτε την απόκριση μηδενικής κατάστασης, $y_{zs}(t)$, για $x(t) = u(t)$.

(α) Βρίσκουμε το Χ.Π. : $\lambda^2 - 1 = 0 \rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1$

$y_{zi}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} = c_1 e^{t} + c_2 e^{-t} \rightarrow t > 0$

$y(0^-) = 1 \Leftrightarrow c_1 + c_2 = 1$

$y'(0^-) = 0 \Leftrightarrow c_1 - c_2 = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} c_2 + c_2 = 1 \\ c_1 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = 1/2 \\ c_1 = 1/2 \end{cases}$

$y_{zi}(t) = \frac{1}{2}e^{t} + \frac{1}{2}e^{-t} = \boxed{\frac{1}{2}\left(e^{t} + e^{-t}\right)u(t)}$

(β) 1. $\frac{d^2}{dt^2}y(t) - y(t) = x(t) \rightsquigarrow \delta(t)$ $\quad h_0(t)$

Χ.Π. : $\lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1$

$$h_0(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}, \quad \underline{t>0}$$

$$= c_1 e^{t} + c_2 e^{-t}$$

$$\left.\begin{array}{l} \underline{h(0^+) = 0} \iff c_1 + c_2 = 0 \\ \underline{h'(0^+) = 1} \iff c_1 - c_2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} c_1 = -c_2 \\ -2c_2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} c_1 = \frac{1}{2} \\ c_2 = -\frac{1}{2} \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{l} h(0^+) = 0 \\ h'(0^+) = 0 \\ \vdots \\ h^{(N-1)}(0^+) = \frac{1}{a_N} \end{array}\right.$$

Άρα $\boxed{h_0(t) = \frac{1}{2} e^{t} - \frac{1}{2} e^{-t}}$

$$h(t) = \underline{h_0(t)} + \underline{\frac{d}{dt}} h_0(t) = \frac{1}{2} e^{t} - \cancel{\frac{1}{2} e^{-t}} + \frac{1}{2} e^{t} + \cancel{\frac{1}{2} e^{-t}} =$$

$$= \frac{1}{2} e^{t} + \frac{1}{2} e^{t} = \boxed{e^{t} u(t)}$$

(γ) $y_{zs}(t)$ για $x(t) = u(t)$

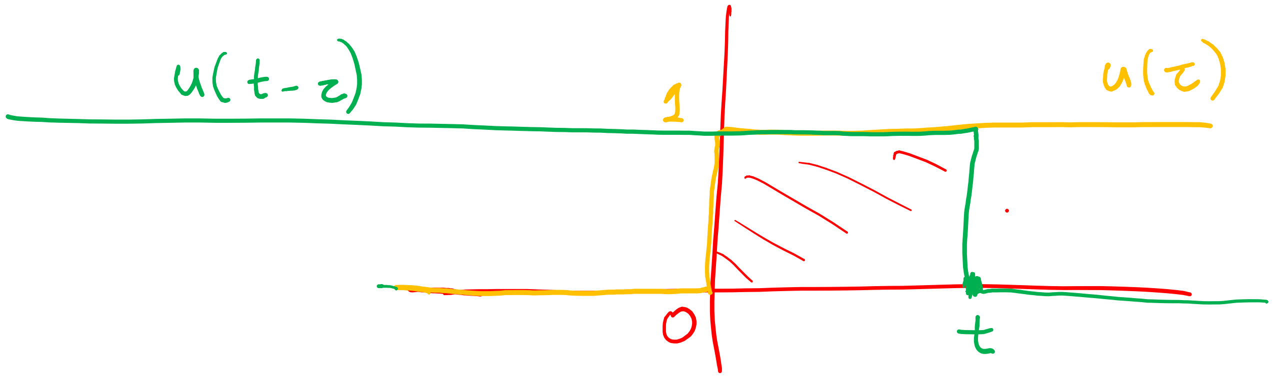
$$y_{zs}(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\tau} u(\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\tau}\underbrace{u(\tau)u(t-\tau)}\,d\tau = \int_{0}^{t} e^{\tau}\,d\tau = e^{\tau}\Big]_{0}^{t} = \boxed{(e^{t}-1)u(t)}$$

$$u(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau>0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$u(t-\tau) = \begin{cases} 1, & t-\tau>0 \Leftrightarrow \tau<t \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$\left.\right\} u(\tau)u(t-\tau) = 1 \text{ για } 0<\tau<t$$



Άσκηση 4

Ας συμβολίσουμε το γνωστό μας περιοδικό με περίοδο T_0 σήμα

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT_0) \tag{40}$$

ως

$$\delta_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT_0) \tag{41}$$

Αν γνωρίζετε ότι το περιοδικό σήμα

$$\boxed{x(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{\frac{1}{2}}\right) * 3\delta_3(t)} \tag{42}$$

έχει συντελεστές Fourier

$$X_k = \alpha \frac{\sin\left(\frac{\pi k}{\beta}\right)}{\pi k} \tag{43}$$

τότε

(α') δείξτε ότι

$$x(t) = 3\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{t-3k}{\frac{1}{2}}\right) \tag{44}$$

(β') σχεδιάστε μερικές (δυο-τρεις) περιόδους από το σήμα $x(t)$

(γ') βρείτε τις σταθερές α, β.

$$\underbrace{x(t) * \delta(t-t_0)} = x(t-t_0)$$

(a) $x(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{\frac{1}{2}}\right) * 3\delta_3(t) =$

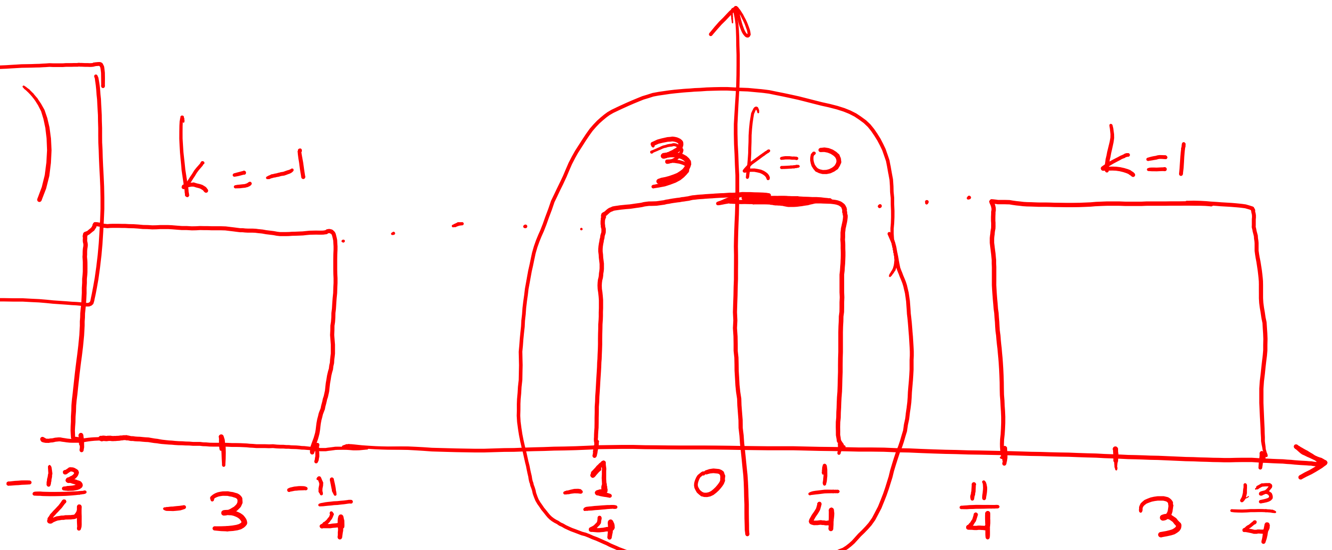
$= 3\mathrm{rect}\left(\frac{t}{\frac{1}{2}}\right) * \delta_3(t) =$

$= \boxed{3\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{t-3k}{\frac{1}{2}}\right)}$

$\delta_3(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-3k)$

$\to T_0 = 3$

$A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T_0}\right) = \begin{cases} A, & -\frac{T_0}{2} < t < \frac{T_0}{2} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$



$$X_k = \boxed{\frac{a \sin\left(\frac{\pi k}{\beta}\right)}{\pi k}}$$

$$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{3}$$

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

(γ) $a = \beta = ?$

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\, e^{-j2\pi f_0 k t}\, dt = \frac{1}{3}\int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} 3 e^{-j2\pi k \cdot \frac{1}{3} t}\, dt$$

$$= \frac{1}{3}\, \frac{3}{\left(-j2\pi \frac{k}{3}\right)} \cdot e^{-j2\pi \frac{k}{3} t}\Big]_{-1/4}^{1/4} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{\left(-j2\pi \frac{k}{3}\right)} e^{-j2\pi \frac{k}{3}\cdot\frac{1}{4}} - \frac{3}{\left(-j2\pi \frac{k}{3}\right)} e^{j2\pi \frac{k}{3}\cdot\frac{1}{4}} \right)$$

$$= \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{\left(-j2\pi \frac{k}{3}\right)} \left(e^{-j2\pi \frac{k}{12}} - e^{j2\pi \frac{k}{12}} \right) = \frac{3}{\cancel{-j2}\pi k}\left(\cancel{-2j}\, \sin(\pi k / 6)\right) =$$

$$= 3 \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi k}{6}\right)}{\pi k}$$

$$\boxed{\begin{aligned} a &= 3 \\ \beta &= 6 \end{aligned}}$$

Άσκηση 5

Έστω ένα **περιοδικό**, **άρτιο**, **πραγματικό** σήμα $x(t)$ με περίοδο $T_0 = \frac{1}{400}$ s, το οποίο αναπτύσσεται σε σειρά Fourier με συντελεστές X_k. Σας δίνονται τα ακόλουθα στοιχεία:

- $X_k = 0, \ \ |k| > 3$
- $X_2 = 2X_3$
- $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 = \frac{5}{32}$
- $\displaystyle\int_{T_0} x(t)dt = 0$
- $\displaystyle\int_{T_0} x(t)e^{-j\pi 800 t}dt = 0$

Βρείτε τις πιθανές μορφές του σήματος $x(t)$.

$X_{-k} = X_k$

- Το σήμα είναι πραγματικό, άρα: $X_{-k} = X_k^* \Longrightarrow |X_{-k}|^2 = \underline{|X_k^*|^2 = |X_k|^2}$
- >> " είναι άρτιο, άρα τα X_k είναι πραγματικοί αριθμοί.
- $X_k \neq 0$ για $|k| \leq 3$
- $\displaystyle\int_{T_0} x(t)dt = \boxed{X_0 = 0}$
- $\displaystyle\int_{T_0} x(t)\, e^{-j\pi 800 t} dt = 0 \Leftrightarrow \int_{T_0} x(t)\, e^{-j2\pi f_0 t k} dt = 0 \Leftrightarrow \boxed{X_1 = 0}$ ($k=1$)
- $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 = \frac{5}{32} \Leftrightarrow \sum_{k=-3}^{3} |X_k|^2 = \frac{5}{32} \Leftrightarrow$

$$\sum_{k=-3}^{3} |X_k|^2 = \frac{5}{32} = |X_{-3}|^2 + |X_{-2}|^2 + \underbrace{\cancel{|X_{-1}|^2}}_{0} + \underbrace{\cancel{|X_0|^2}}_{0} + \underbrace{\cancel{|X_1|^2}}_{0} + |X_2|^2 + |X_3|^2 = \frac{5}{32}$$

$$\Leftrightarrow 2|X_3|^2 + 2|X_2|^2 = \frac{5}{32} \Leftrightarrow |X_3|^2 + |X_2|^2 = \frac{5}{64} \quad (1) \quad \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\bullet\ X_2 = 2X_3 \quad (1)}$$

$$\Leftrightarrow |X_3|^2 + |2X_3|^2 = \frac{5}{64} \Leftrightarrow |X_3|^2 + 4|X_3|^2 = \frac{5}{64} \Leftrightarrow \cancel{5}|X_3|^2 = \frac{\cancel{5}}{64} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |X_3|^2 = \frac{1}{64} \Leftrightarrow |X_3| = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \boxed{X_3 = \pm\frac{1}{8}}$$

$$\boxed{X_2 = \pm\frac{1}{4}}$$

$$x(t) = \underbrace{\cancel{X_0}}_{0} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{-j2\pi f_0 k t}$$

$k=-2$ $\qquad$ $k=2$

$$x(t) = \pm\frac{1}{4} e^{+j2\pi 2 f_0 t} \pm \frac{1}{4} e^{-j2\pi 2 f_0 t} \pm \frac{1}{8} e^{j2\pi 3 f_0 t} \pm \frac{1}{8} e^{-j2\pi 3 f_0 t} =$$

$$= \boxed{\pm\frac{1}{2}\cos(2\pi 2 f_0 t) \pm \frac{1}{4}\cos(2\pi 3 f_0 t)}$$

Άσκηση 3
Δείξτε ότι για το περιοδικό σήμα $x(t)$ το οποίο σε μια περίοδο $T_0 = 1$ δίνεται ως

$$x_{T_0}(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{3} < t < \frac{2}{3} \\ 1, & \frac{2}{3} < t < 1 \end{cases} \tag{30}$$

$$\boxed{X_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}\,dt}$$

$$T_0 = 1 \Leftrightarrow T_0 = \frac{1}{f_0} \Leftrightarrow f_0 = 1$$

οι συντελεστές Fourier του είναι

$$X_0 = \frac{5}{6}, \boxed{X_k = -\frac{1}{2\pi k}(-1)^k \sin\left(\frac{\pi k}{3}\right)}, \ \forall\ k \in Z \tag{31}$$

$$X_0 = 1\cdot\int_0^1 x(t)\,dt = \int_0^{1/3} 1\,dt + \int_{1/3}^{2/3} \frac{1}{2}\,dt + \int_{2/3}^{1} 1\,dt =$$

$$= t\Big]_0^{1/3} + \frac{1}{2}t\Big]_{1/3}^{2/3} + t\Big]_{2/3}^{1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) + \left(1 - \frac{2}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \boxed{\frac{5}{6}}$$

$$X_k = 1\cdot\int_0^1 x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}\,dt = \int_0^{1/3} 1\cdot e^{-j2\pi k t}\,dt + \int_{1/3}^{2/3} \frac{1}{2}e^{-j2\pi k t}\,dt + \int_{2/3}^{1} 1\cdot e^{-j2\pi k t}\,dt$$

$$= \frac{1}{-j2\pi k t}\left(e^{-j2\pi k t}\Big]_0^{1/3} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi k t}\Big]_{1/3}^{2/3} + e^{-j2\pi k t}\Big]_{2/3}^{1} =\right.$$

$$X_k = -\frac{1}{j2\pi k}\left(e^{-j2\pi\frac{k}{3}} \cancel{-1} + \frac{1}{2}e^{-j4\pi\frac{k}{3}} - \frac{1}{2}e^{-j2\pi\frac{k}{3}} \cancel{+1} - e^{-j4\pi\frac{k}{3}}\right) =$$

$$= -\frac{1}{j2\pi k}\left(\frac{1}{2}e^{-j2\pi\frac{k}{3}} - \frac{1}{2}e^{-j4\pi\frac{k}{3}}\right) =$$

$$= -\frac{1}{j4\pi k}\left(e^{-j2\pi\frac{k}{3}} - e^{-j4\pi\frac{k}{3}}\right) =$$

$$= -\frac{1}{j4\pi k}e^{-j\cancel{3}\pi\frac{k}{\cancel{3}}}\left(e^{j\pi\frac{k}{3}} - e^{-j\pi\frac{k}{3}}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2\pi k}e^{-j\pi k}\,\frac{e^{j\pi\frac{k}{3}} - e^{-j\pi\frac{k}{3}}}{2j}$$

$$\boxed{-\frac{1}{2\pi k}(-1)^k \sin\left(\frac{\pi k}{3}\right) \quad \forall k \in \mathbb{Z}}$$