ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2021-22
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Έκτο Φροντιστήριο

Άσκηση 1

Έστω τα σήματα

$$x(t) = \begin{cases} 1, & \frac{1}{2} < t < \frac{3}{2} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{1}$$

$$y(t) = \begin{cases} 1 - 2t, & 0 < t < 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{2}$$

Βρείτε τη συνάρτηση ετεροσυσχέτισης $\phi_{yx}(\tau)$ και τη συνάρτηση ετεροσυσχέτισης $\phi_{xy}(\tau)$, χρησιμοποιώντας για τη δεύτερη ελάχιστες πράξεις.

<u>Λύση:</u>
Ζητείται η ετεροσυσχέτιση

$$\phi_{yx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)x(t+\tau)dt \tag{3}$$

άρα θα μετατοπίσουμε το $x(t)$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις του Σχήματος 1. Έχουμε αντίστοιχα

i. Είναι

$$\phi_{yx}(\tau) = 0, \quad \text{για } \frac{3}{2} - \tau < 0 \Longrightarrow \tau > \frac{3}{2} \tag{4}$$

ii. Είναι

$$\phi_{yx}(\tau) = \int_{0}^{3/2-\tau} 1 \cdot (1-2t)dt = -\frac{3}{4} + 2\tau - \tau^2 \tag{5}$$

για $\frac{1}{2} - \tau < 0$ και $\frac{3}{2} - \tau > 0$, δηλ. $\frac{1}{2} < \tau < \frac{3}{2}$.

iii. Είναι

$$\phi_{yx}(\tau) = \int_{1/2-\tau}^{1} 1 \cdot (1-2t)dt = -\frac{1}{4} + \tau^2 \tag{6}$$

για $\frac{3}{2} - \tau > 1$ και $\frac{1}{2} - \tau < 1$, δηλ. $-\frac{1}{2} < \tau < \frac{1}{2}$.

iv. Είναι

$$\phi_{yx}(\tau) = 0, \quad \text{για } \frac{1}{2} - \tau > 1 \Longrightarrow \tau < -\frac{1}{2} \tag{7}$$

Άρα συνολικά

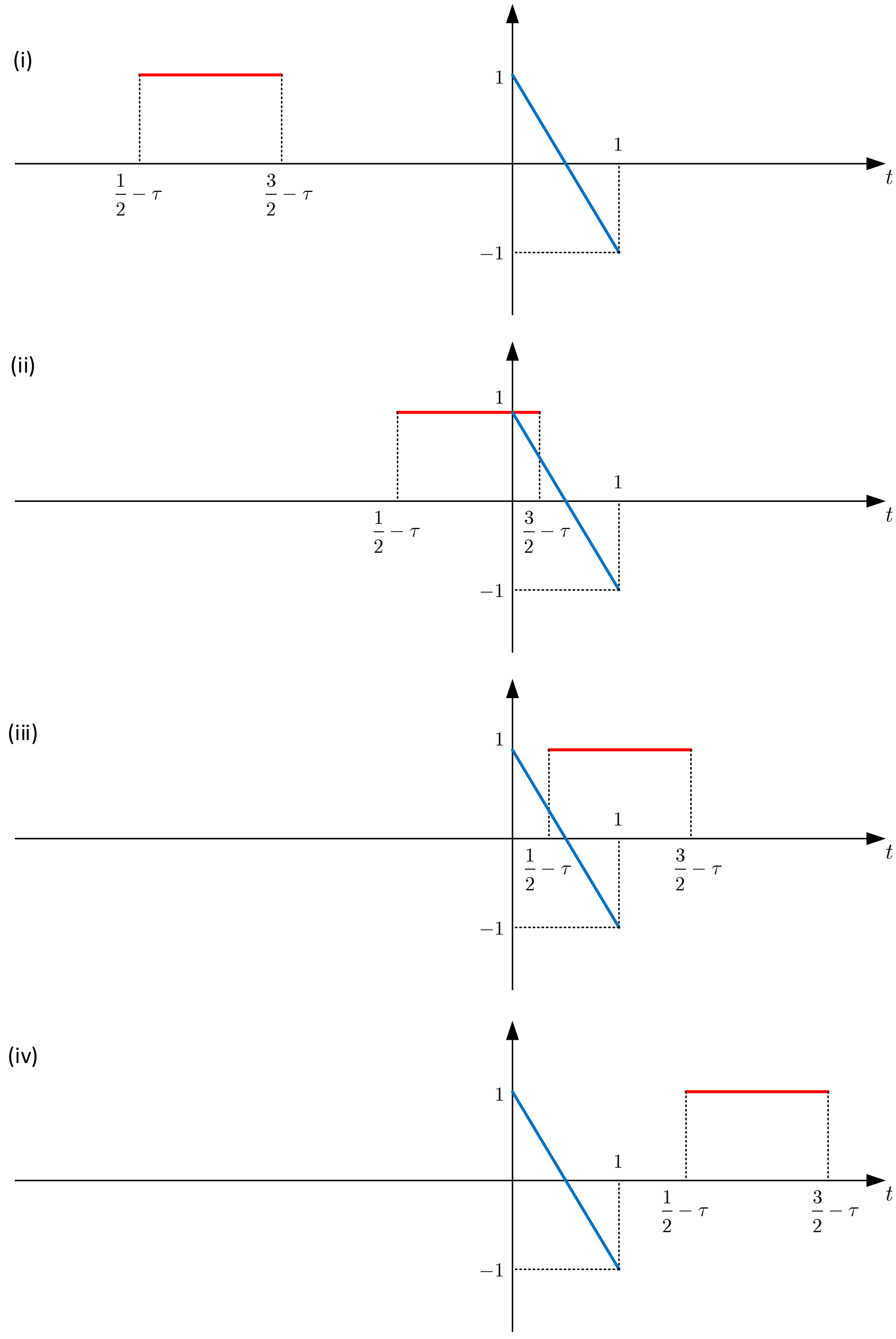
$$\phi_{yx}((\tau) = \begin{cases} 0, & \tau < -\frac{1}{2},\ \tau > \frac{3}{2} \\ \tau^2 - \frac{1}{4}, & -\frac{1}{2} < \tau < \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} + 2\tau - \tau^2, & \frac{1}{2} < \tau < \frac{3}{2} \end{cases} \tag{8}$$

Η ετεροσυσχέτιση $\phi_{xy}(\tau)$ μπορεί να υπολογιστεί εύκολα ως

$$\phi_{xy}(\tau) = \phi_{yx}(-\tau) \tag{9}$$

και άρα

$$\phi_{yx}((\tau) = \begin{cases} 0, & \tau > \frac{1}{2},\ \tau < -\frac{3}{2} \\ \tau^2 - \frac{1}{4}, & -\frac{1}{2} < \tau < \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} - 2\tau - \tau^2, & -\frac{3}{2} < \tau < -\frac{1}{2} \end{cases} \tag{10}$$



Σχήμα 1: *Σχήμα Άσκησης 1.*

Άσκηση 2
Έστω η διαφασματική πυκνότητα ενέργειας

$$\Phi_{xy}(f) = \mathrm{sinc}(f)\frac{1}{1 + j2\pi f} \tag{11}$$

Βρείτε την ετεροσυσχέτιση $\phi_{xy}(\tau)$.

Λύση:
Ξέρουμε ότι

$$\Phi_{xy}(f) = X^*(f)Y(f) = F\{\phi_{xy}(\tau)\} \tag{12}$$

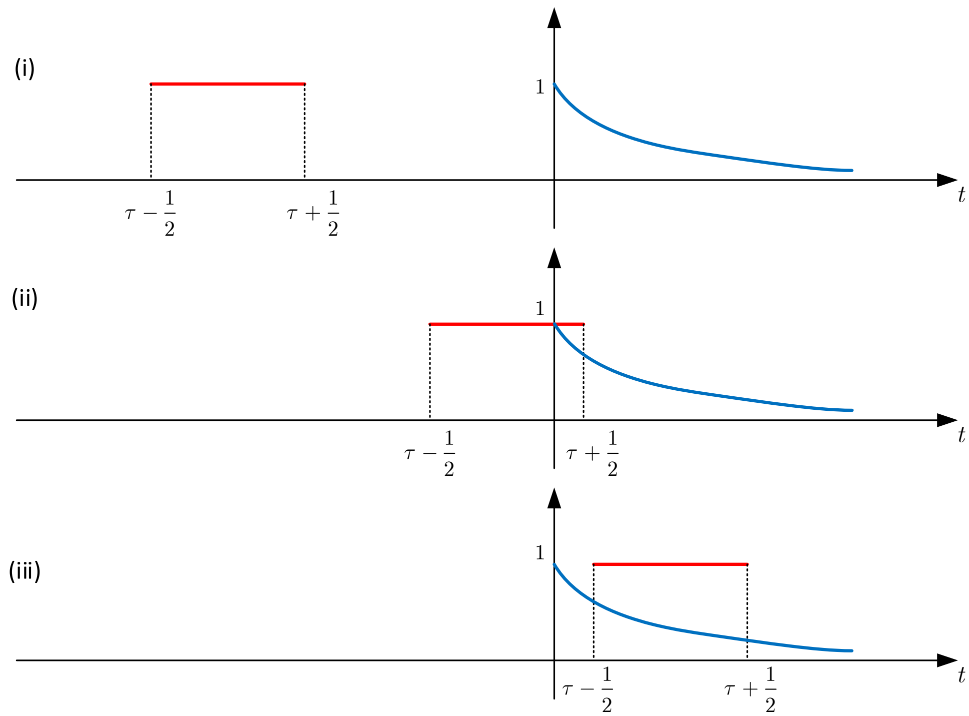
Άρα

$$\phi_{xy}(\tau) = F^{-1}\left\{\Phi_{xy}(f)\right\} = F^{-1}\left\{\mathrm{sinc}(f)\frac{1}{1+j2\pi f}\right\} \tag{13}$$

$$= F^{-1}\{\mathrm{sinc}(f)\} * F^{-1}\left\{\frac{1}{1+j2\pi f}\right\} \tag{14}$$

$$= \mathrm{rect}(\tau) * e^{-\tau}u(\tau) \tag{15}$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις του Σχήματος 1. Έχουμε αντίστοιχα



Σχήμα 2: *Σχήμα Άσκησης 2.*

i. Είναι

$$\phi_{xy}(\tau) = 0, \;\; \tau + \frac{1}{2} < 0 \Longrightarrow \tau < -\frac{1}{2} \tag{16}$$

ii. Είναι

$$\phi_{xy}(\tau) = \int_0^{\tau+1/2} 1 \cdot e^{-t}dt = 1 - e^{-(\tau+\frac{1}{2})} \tag{17}$$

για $\tau + \frac{1}{2} > 0$ και $\tau - \frac{1}{2} < 0$, δηλ. $-\frac{1}{2} < \tau < \frac{1}{2}$.

iii. Είναι

$$\phi_{xy}(\tau) = \int_{\tau-\frac{1}{2}}^{\tau+\frac{1}{2}} 1 \cdot e^{-t}dt = e^{-(\tau-\frac{1}{2})} - e^{-(\tau+\frac{1}{2})} \tag{18}$$

για $\tau - \frac{1}{2} > 0 \Longrightarrow \tau > \frac{1}{2}$.

Άρα συνολικά

$$\phi_{xy}(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau < -\frac{1}{2} \\ 1 - e^{-(\tau+\frac{1}{2})}, & -\frac{1}{2} < \tau < \frac{1}{2} \\ e^{-(\tau-\frac{1}{2})} - e^{-(\tau+\frac{1}{2})}, & \tau > \frac{1}{2} \end{cases} \tag{19}$$

Άσκηση 3

Έστω τα σήματα

$$x(t) = e^{-2t}u(t) \tag{20}$$

$$y(t) = e^{t}u(-t) \tag{21}$$

(α΄) Υπολογίστε την αυτοσυσχέτιση του σήματος $x(t)$.

(β΄) Υπολογίστε τη φασματική πυκνότητα ενέργειας του σήματος $y(t)$.

(γ΄) Υπολογίστε την ετεροσυσχέτιση $\phi_{xy}(\tau)$.

(δ΄) Υπολογίστε τη διαφασματική πυκνότητα ενέργειας $\Phi_{xy}(f)$.

Λύση:

(α΄) Είναι

$$\phi_x(\tau) = F^{-1}\{\Phi_x(f)\} \tag{22}$$

με

$$\Phi_x(f) = |X(f)|^2 = \left|\frac{1}{2 + j2\pi f}\right|^2 = \frac{1}{4 + 4\pi^2 f^2} \tag{23}$$

Από γνωστά ζεύγη

$$e^{-a|t|} \longleftrightarrow \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2} \tag{24}$$

οπότε για $a = 2$,

$$e^{-2|t|} \longleftrightarrow \frac{4}{4 + 4\pi^2 f^2} \tag{25}$$

άρα θέλουμε το ζεύγος

$$\frac{1}{4}e^{-2|t|} \longleftrightarrow \frac{1}{4 + 4\pi^2 f^2} \tag{26}$$

Οπότε τελικά

$$\phi_x(\tau) = F^{-1}\left\{\frac{1}{4 + 4\pi^2 f^2}\right\} = \frac{1}{4}e^{-2|\tau|} = \frac{1}{4}(e^{2\tau}u(-\tau) + e^{-2\tau}u(\tau)) \tag{27}$$

(β΄) Είναι

$$\Phi_y(f) = F\{\phi_y(\tau)\} = |Y(f)|^2 = \frac{1}{1 + 4\pi^2 f^2} \tag{28}$$

(γ΄) Είναι

$$\phi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t+\tau)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2t}u(t)e^{t+\tau}u(-t-\tau)dt \tag{29}$$

Είναι

$$u(t)u(-t-\tau) = 1,\ \ 0 < t < -\tau \tag{30}$$

άρα

$$\phi_{xy}(\tau) = e^{\tau}\int_0^{-\tau} e^{-t}dt = e^{\tau} - e^{2\tau} \tag{31}$$

για $-\tau > 0 \Longrightarrow \tau < 0$. Οπότε

$$\phi_{xy}(\tau) = (e^{\tau} - e^{2\tau})u(-\tau) \tag{32}$$

(δ΄) Είναι

$$\Phi_{xy}(f) = F\{\phi_{xy}(\tau)\} = \frac{1}{1 - j2\pi f} - \frac{1}{2 - j2\pi f} \tag{33}$$

από έτοιμους πίνακες. Άρα

$$\Phi_{xy}(f) = \frac{1}{(1 - j2\pi f)(2 - j2\pi f)} \tag{34}$$

Άσκηση 4

Έστω το περιοδικό σήμα $x(t)$ με περίοδο T_0 που περιγράφεται σε μια περίοδο ως

$$x(t, T_0) = \begin{cases} A, & |t| < \frac{T_0}{4} \\ 0, & T_0 > |t| > \frac{T_0}{4} \end{cases} \tag{35}$$

Βρείτε την αυτοσυσχέτιση και τη φασματική πυκνότητα ισχύος του περιοδικού σήματος.

Λύση:

Απομονώνουμε μια περίοδο T_0 του περιοδικού σήματος, η οποία περιγράφεται παραπάνω στην εκφώνηση και πιο συνοπτικά γράφεται ως

$$x(t, T_0) = A\mathrm{rect}\left(\frac{t}{\frac{T_0}{2}}\right) \tag{36}$$

με μετασχ. Fourier

$$X(f, T_0) = A\frac{T_0}{2}\mathrm{sinc}\left(\frac{fT_0}{2}\right) \tag{37}$$

Η φασματική πυκνότητα ενέργειας της περιόδου αυτής είναι

$$\Phi_x(f, T_0) = |X(f, T_0)|^2 = A^2\frac{T_0^2}{4}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{fT_0}{2}\right) \tag{38}$$

Το περιοδικό σήμα $x(t)$ γράφεται σε σειρά Fourier ως

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \tag{39}$$

Η φασματική πυκνότητα ισχύος του παραπάνω σήματος ξέρουμε ότι γράφεται ως

$$\phi_x(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 e^{j2\pi k f_0 \tau} \tag{40}$$

Οι συντελεστές $|X_k|^2$ μπορούν να βρεθούν ως

$$|X_k|^2 = \frac{1}{T_0^2}\Phi_x(f, T_0)\Big|_{f=k/T_0} = \frac{A^2}{4}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{k}{2}\right) \tag{41}$$

Άρα

$$\phi_x(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{A^2}{4}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{k}{2}\right) e^{j2\pi k f_0 \tau} \tag{42}$$

Για τη φασματική πυκνότητα ισχύος του περιοδικού σήματος έχουμε

$$\Phi_x(f) = F\{\phi_x(\tau)\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{A^2}{4}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{k}{2}\right)\delta(f - kf_0) \tag{43}$$

αφού για οποιοδήποτε περιοδικό σήμα με θεμελιώδη συχνότητα f_0 που αναπτύσσεται σε σειρά Fourier με συντελεστές Z_k ξέρουμε ότι ο μετασχ. Fourier του είναι

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} Z_k \delta(f - kf_0) \tag{44}$$

Σημείωση: Αν θέλαμε να δούμε σε ποιό σήμα στο χρόνο αντιστοιχεί η αυτοσυσχέτιση $\phi_x(\tau)$ που βρήκαμε - καθώς τη βρήκαμε στη μορφή μιας σειράς Fourier και όχι σε μια αναλυτική μορφή - τότε θέλουμε να μάθουμε ποιό περιοδικό σήμα έχει συντελεστές Fourier

$$\frac{A^2}{4}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{k}{2}\right)$$

Αυτό όμως είναι δύσκολο εν γένει. Όμως ξέρουμε ότι η περιοδική αυτοσυσχέτιση μπορεί να περιγραφεί με την αυτοσυσχέτιση μιας περιόδου του περιοδικού σήματος ως

$$\phi_x(\tau) = \frac{1}{T_0}\phi_x(\tau, T_0) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\tau - kT_0)$$

Άρα αρκεί να βρούμε την αυτοσυσχέτιση μιας περιόδου του περιοδικού σήματός μας, που είναι

$$\phi_x(\tau, T_0) = F^{-1}\{\Phi_x(f, T_0)\} = \frac{A^2}{2}\mathrm{tri}\left(\frac{\tau}{\frac{T_0}{2}}\right)$$

Οπότε

$$\phi_x(\tau) = \frac{1}{T_0}\frac{A^2}{2}\mathrm{tri}\left(\frac{\tau}{\frac{T_0}{2}}\right) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\tau - kT_0) = \frac{A^2}{2T_0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{tri}\left(\frac{\tau - kT_0}{\frac{T_0}{2}}\right)$$

Άρα η περιοδική αυτοσυσχέτιση του περιοδικού σήματος που περιγράφεται στην εκφώνηση είναι μια σειρά από τριγωνικούς παλμούς διάρκειας T_0, πλάτους $A^2/2T_0$, που βρίσκονται σε απόσταση T_0 ανά δυο μεταξύ τους.