ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2021-22
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

5ο Φροντιστήριο

Άσκηση 1 - Μετασχ. Fourier και Ιδιότητες - I

Βρείτε μια έκφραση για τα παρακάτω σήματα χωρίς να περιλαμβάνεται η πράξη της συνέλιξης:

$$x_1(t) = \mathrm{sinc}(at - b_1) * \mathrm{sinc}(at - b_2),\ a, b_1, b_2 \in \mathrm{R}, a \neq 0 \tag{1}$$
$$x_2(t) = \mathrm{sinc}(at) * \mathrm{sinc}(bt),\ a, b > 0 \tag{2}$$
$$x_3(t) = e^{-t}u(t) * e^{-t-1}u(t-1) \tag{3}$$

Λύση:

(α΄) Είναι

$$A\mathrm{rect}(t/T) \longleftrightarrow AT\mathrm{sinc}(fT) \tag{4}$$

και από ιδιότητα δυικότητας

$$AT\mathrm{sinc}(Tt) \longleftrightarrow A\mathrm{rect}(f/T) \tag{5}$$

Έστω

$$w(t) = \mathrm{sinc}(t) \longleftrightarrow W(f) = \mathrm{rect}(f) \tag{6}$$

Το πρώτο δοθέν σήμα $z_1(t)$ μπορεί να γραφεί ως

$$y(t) = w(t - b_1) \tag{7}$$

και

$$z_1(t) = y(at) \tag{8}$$

Στο χώρο του Fourier

$$Y(f) = W(f)e^{-j2\pi f b_1} \tag{9}$$

και

$$Z_1(f) = \frac{1}{|a|}Y\left(\frac{f}{a}\right) \tag{10}$$

και άρα

$$Z_1(f) = \frac{1}{|a|}W\left(\frac{f}{a}\right)e^{-j2\pi\frac{f}{a}b_1} = \frac{1}{|a|}\mathrm{rect}\left(\frac{f}{a}\right)e^{-j2\pi\frac{f}{a}b_1} \tag{11}$$

Όμοια για το δεύτερο δοθέν σήμα $z_2(t)$,

$$Z_2(f) = \frac{1}{|a|}W\left(\frac{f}{a}\right)e^{-j2\pi\frac{f}{a}b_2} \tag{12}$$

Έτσι από την ιδιότητα της συνέλιξης στο χρόνο

$$X_1(f) = Z_1(f)Z_2(f) = \frac{1}{|a|^2}\mathrm{rect}\left(\frac{f}{a}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{f}{a}\right)e^{-j2\pi\frac{f}{a}(b_1+b_2)} = \frac{1}{|a|^2}\mathrm{rect}\left(\frac{f}{a}\right)e^{-j2\pi\frac{f}{a}(b_1+b_2)} \tag{13}$$

Γυρίζοντας πίσω στο χρόνο

$$x_1(t) = \frac{1}{|a|}\mathrm{sinc}(at - (b_1 + b_2)) \tag{14}$$

(β΄) Όμοια με το προηγούμενο ερώτημα

$$Z_1(f) = \frac{1}{a}\mathrm{rect}\left(\frac{f}{a}\right) \tag{15}$$

και

$$Z_2(f) = \frac{1}{b}\mathrm{rect}\left(\frac{f}{b}\right) \tag{16}$$

Άρα

$$X_2(f) = Z_1(f)Z_2(f) = \frac{1}{ab}\mathrm{rect}\left(\frac{f}{a}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{f}{b}\right) \tag{17}$$

Το γινόμενο των δυο τετραγωνικών παλμών εξαρτάται από τη διάρκειά τους.

- Αν $a > b$ τότε

$$\mathrm{rect}\left(\frac{f}{a}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{f}{b}\right) = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{b}\right) \tag{18}$$

άρα

$$X_2(f) = \frac{1}{ab}\mathrm{rect}\left(\frac{f}{b}\right) \tag{19}$$

οπότε γυρνώντας πίσω στο χρόνο

$$x_2(t) = \frac{1}{a}\mathrm{sinc}(bt) \tag{20}$$

- Αν $b > a$ τότε

$$\mathrm{rect}\left(\frac{f}{a}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{f}{b}\right) = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{a}\right) \tag{21}$$

άρα

$$X_2(f) = \frac{1}{ab}\mathrm{rect}\left(\frac{f}{a}\right) \tag{22}$$

οπότε γυρνώντας πίσω στο χρόνο

$$x_2(t) = \frac{1}{b}\mathrm{sinc}(at) \tag{23}$$

Έτσι τελικά

$$x_2(t) = \begin{cases} \frac{1}{a}\mathrm{sinc}(bt), & a > b \\ \frac{1}{b}\mathrm{sinc}(at), & b > a \end{cases} \tag{24}$$

(γ΄) Είναι

$$X_3(f) = F\{e^{-t}u(t)\}F\{e^{-(t+1)}u(t-1)\} \tag{25}$$

Γνωρίζουμε ότι

$$e^{-t}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{1+j2\pi f} \tag{26}$$

και από την ιδιότητα της χρονικής μετατόπισης

$$e^{-(t-1)}u(t-1) \longleftrightarrow \frac{1}{1+j2\pi f}e^{-j2\pi f} \tag{27}$$

Όμως

$$e^{-(t+1)}u(t-1) = e^{-2}e^{-(t-1)}u(t-1) \longleftrightarrow e^{-2}\frac{1}{1+j2\pi f}e^{-j2\pi f} \tag{28}$$

Άρα

$$X_3(f) = \frac{1}{1+j2\pi f}e^{-2}\frac{1}{1+j2\pi f}e^{-j2\pi f} = e^{-2}\frac{1}{(1+j2\pi f)^2}e^{-j2\pi f} \tag{29}$$

Από πίνακες μετασχηματισμών έχουμε

$$te^{-t}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{(1+j2\pi f)^2} \tag{30}$$

οπότε από το ζεύγος αυτό και την ιδιότητα της χρονικής μετατόπισης

$$x_3(t) = e^{-2}(t-1)e^{-(t-1)}u(t-1) \tag{31}$$

Άσκηση 2 - Φάσματα Πλάτους και Φάσης

Για κάθε ζεύγος φάσματος πλάτους και φάσης παρακάτω, βρείτε το σήμα στο χρόνο που έχει μετασχ. Fourier με τα δοθέντα φάσματα.

(α') $|X(f)| = 1,\ \angle X(f) = 2\pi f$

(β') $|X(f)| = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{3}\right),\ \angle X(f) = 10\pi f$

<u>Λύση</u>:

(α') Αφού $|X(f)| = 1,\ \angle X(f) = 2\pi f$, μπορούμε να γράψουμε

$$X(f) = |X(f)|e^{j\angle X(f)} = 1e^{j2\pi f} \longleftrightarrow x(t) = \delta(t+1) \tag{32}$$

(β') Αφού $|X(f)| = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{3}\right),\ \angle X(f) = 10\pi f$, μπορούμε να γράψουμε

$$X(f) = |X(f)|e^{j\angle X(f)} = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{3}\right)e^{j2\pi 5f} = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{3}\right)e^{j2\pi\frac{f}{3}15} \longleftrightarrow x(t) = 3\mathrm{sinc}(3t+15) = 3\mathrm{sinc}(3(t+5)) \tag{33}$$

Άσκηση 3 - Μετασχ. Fourier και Ιδιότητες ΙΙ

Υπολογίστε την ενέργεια του σήματος

$$g(t) = 200\mathrm{sinc}(200t) \tag{34}$$

<u>Λύση</u>:

Θα εχουμε

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |G(f)|^2 df \tag{35}$$

από το θεώρημα του Parseval. Άρα, από το γνωστό πλέον ζεύγος

$$T\mathrm{sinc}(Tt) \longleftrightarrow \mathrm{rect}\left(\frac{f}{T}\right) \tag{36}$$

θα είναι

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\mathrm{rect}\left(\frac{f}{200}\right)\right|^2 df = \int_{-100}^{100} df = f\Big|_{-100}^{100} = 200 \tag{37}$$

Άσκηση 5 - Έξοδος ΓΧΑ συστήματος για περιοδική είσοδο

(α') Αν σε ένα ΓΧΑ σύστημα με απόκριση συχνότητας

$$H(f) = j2\pi f \tag{38}$$

εμφανιστεί η είσοδος

$$x(t) = 1 + \frac{1}{4}\cos(2t) + \frac{1}{9}\sin(3t) \tag{39}$$

τότε ποιά θα είναι η έξοδος του συστήματος; Περιγράψτε με λόγια τι κάνει το σύστημα σε μια οποιαδήποτε είσοδο του παρουσιαστεί και εξηγήστε πως καταλήξατε σε αυτήν την περιγραφή.

(β') Αν ένα ΓΧΑ σύστημα περιγράφεται από την απόκριση συχνότητας

$$H(f) = \frac{j2\pi f - 1}{4\pi^2 f^2 + 4} \tag{40}$$

τότε βρείτε μια διαφορική εξίσωση που να περιγράφει το σύστημα αυτό.

Λύση:

(α') Αν σε ένα ΓΧΑ σύστημα με απόκριση συχνότητας

$$H(f) = j2\pi f \tag{41}$$

Η περιοδική είσοδος

$$x(t) = 1 + \frac{1}{4}\cos(2t) + \frac{1}{9}\sin(3t) \tag{42}$$

θα δώσει έξοδο

$$y(t) = 1 \cdot H(0) + \frac{1}{4}\left|H\left(\frac{1}{\pi}\right)\right| \cos\left(2t + \angle H\left(\frac{1}{\pi}\right)\right) + \frac{1}{9}\left|H\left(\frac{3}{2\pi}\right)\right| \sin\left(3t + \angle H\left(\frac{3}{2\pi}\right)\right) \tag{43}$$

Θα είναι

$$H(0) = 0 \tag{44}$$

$$H\left(\frac{1}{\pi}\right) = 2j = 2e^{j\pi/2} \Longrightarrow \left|H\left(\frac{1}{\pi}\right)\right| = 2,\ \angle H\left(\frac{1}{\pi}\right) = \frac{\pi}{2} \tag{45}$$

$$H\left(\frac{3}{2\pi}\right) = 3j = 3^{j\pi/2} \Longrightarrow \left|H\left(\frac{3}{2\pi}\right)\right| = 3,\ \angle H\left(\frac{3}{2\pi}\right) = \frac{\pi}{2} \tag{46}$$

Άρα

$$y(t) = 1 \cdot 0 + \frac{2}{4}\cos\left(2t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{3}{9}\sin\left(3t + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}\sin(2t) + \frac{1}{3}\cos(3t) \tag{47}$$

Παρατηρούμε ότι η έξοδος είναι η παράγωγος της εισόδου. Άρα το σύστημα παραγωγίζει όποια είσοδο του εμφανιστεί. Αυτό επιβεβαιώνεται και από τη μορφή της απόκρισης σε συχνότητα, γιατί

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = j2\pi f \Longleftrightarrow Y(f) = X(f)j2\pi f \longleftrightarrow y(t) = \frac{d}{dt}x(t) \tag{48}$$

Λύσεις με χρήση μετασχ. Fourier και θεώρημα συνέλιξης αντί της παραπάνω λύσης θεωρούνται σωστές.

(β') Η απόκριση συχνότητας γράφεται

$$H(f) = \frac{j2\pi f - 1}{4\pi^2 f^2 + 4} = \frac{j2\pi f - 1}{-(j2\pi f)^2 + 4} \tag{49}$$

και άρα

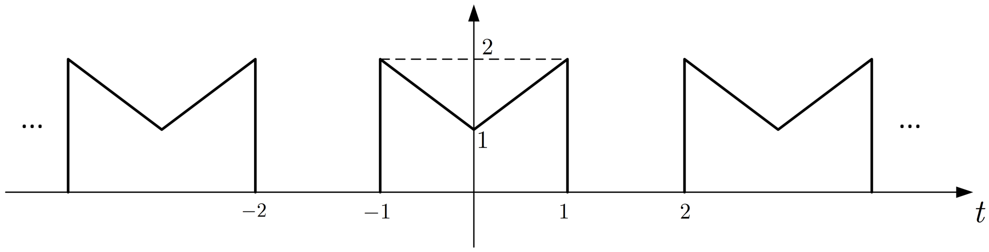
$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{j2\pi f - 1}{-(j2\pi f)^2 + 4} \Longleftrightarrow Y(f)(-(j2\pi f)^2 + 4) = X(f)(j2\pi f - 1) \tag{50}$$

και γυρίζοντας πίσω στο χρόνο

$$-\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 4y(t) = \frac{d}{dt}x(t) - x(t) \tag{51}$$

Άσκηση 6 - Μετασχ. Fourier και Περιοδικά Σήματα

Στην προηγούμενη σειρά ασκήσεων, σας ζητήθηκε να βρείτε τους συντελεστές της σειράς Fourier του περιοδικού σήματος με περίοδο $T_0 = 3$ του Σχήματος 1.



Σχήμα 1: *Περιοδικό σήμα Άσκησης 6.*

Όποιο τρόπο και να επιλέξατε στη λύση, σίγουρα θα σας πήρε αρκετό χρόνο. Μπορείτε να βρείτε τους συντελεστές X_k, θεωρώντας μια περίοδο του περιοδικού σήματος και εκμεταλλευόμενοι/ες τη θεωρία Fourier για περιοδικά σήματα; Η απάντηση δε θα είναι περισσότερο από $5-6$ γραμμές (συνολικά) αν επιλέξετε να διασπάσετε κατ' ευθείαν το σήμα $x(t)$ σε ένα άθροισμα κατάλληλου τετραγωνικού και τριγωνικού παλμού.

Λύση:

Μια περίοδος του περιοδικού σήματος μπορεί να γραφεί ως

$$x_{T_0}(t) = 2\mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right) - \mathrm{tri}(t) \tag{52}$$

και στο χώρο του Fourier

$$X_{T_0}(f) = 4\mathrm{sinc}(2f) - \mathrm{sinc}^2(f) \tag{53}$$

Μπορούμε να βρούμε τους συντελεστές του περιοδικού, με περίοδο $T_0 = 3$, σήματος ως

$$X_k = \frac{1}{T_0} X_{T_0}\left(\frac{k}{T_0}\right) = \frac{4}{3}\mathrm{sinc}\left(\frac{2k}{3}\right) - \frac{1}{3}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{k}{3}\right) \tag{54}$$