

HY-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2023-24
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

5ο Φροντιστήριο

Άσκηση 1

Ελέγξτε αν το παρακάτω σύστημα είναι γραμμικό, χρονικά αμετάβλητο, ευσταθές, αιτιατό, και δυναμικό.

$$y(t) = (2 + \sin(t))x(t) \quad (1)$$

Λύση:

- Για να είναι το σύστημα γραμμικό πρέπει να είναι ομογενές και αθροιστικό. Το σύστημα είναι ομογενές, γιατί για είσοδο $ax(t)$ η έξοδος είναι

$$y_{x:=ax(t)}(t) = (2 + \sin(t))ax(t) = a(2 + \sin(t))x(t) = ay(t) \quad (2)$$

και άρα είναι ομογενές. Επίσης είναι αθροιστικό γιατί για είσοδο $x_1(t) + x_2(t)$ η έξοδος είναι

$$y_{x:=x_1(t)+x_2(t)}(t) = (2 + \sin(t))(x_1(t) + x_2(t)) = (2 + \sin(t))x_1(t) + (2 + \sin(t))x_2(t) = y_1(t) + y_2(t) \quad (3)$$

Άρα είναι γραμμικό.

- Δεν είναι Χ.Α. γιατί για είσοδο $x(t - t_0)$ η έξοδος είναι

$$y_{x:=x(t-t_0)}(t) = (2 + \sin(t))x(t - t_0) \quad (4)$$

ενώ η καθυστερημένη έξοδος κατά t_0 δίνεται ως

$$y(t - t_0) = (2 + \sin(t - t_0))x_1(t - t_0) \quad (5)$$

Οι δυο έξοδοι δεν είναι ίδιες οπότε το σύστημα είναι χρονικά μεταβλητό.

- Το σύστημα είναι ευσταθές γιατί για $|x(t)| < B \implies |y(t)| = |2 + \sin(t)||x(t)| < |2 + \sin(t)|B \leq 3B$.
- Είναι αιτιατό γιατί η έξοδος εξαρτάται μόνο από την τρέχουσα τιμή της εισόδου και όχι από μελλοντικές.
- Δεν είναι δυναμικό γιατί δεν απαιτείται μνήμη για την αποθήκευση άλλων χρονικών στιγμών (μελλοντικών ή παρελθοντικών) της εισόδου ή της εξόδου.

Άσκηση 2

Ένα σύστημα περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 16y(t) = x(t) + \frac{d}{dt}x(t) \quad (6)$$

και έχει αρχικές συνθήκες $y(0^-) = 1$, $\left. \frac{d}{dt}y(t) \right|_{t=0^-} = -1$.

- i. Βρείτε την απόκριση μηδενικής εισόδου, $y_{zi}(t)$.

- ii. Βρείτε την κρουστική του απόκριση, $h(t)$.
- iii. Βρείτε την απόκριση μηδενικής κατάστασης, $y_{zs}(t)$, για $x(t) = u(t)$.

Λύση:

- i. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι της μορφής

$$\lambda^2 + 16 \quad (7)$$

και άρα οι χαρακτηριστικές ρίζες είναι οι $\lambda_1 = j4$ και $\lambda_2 = -j4$. Οπότε η απόκριση μηδενικής εισόδου θα είναι της μορφής

$$y_{zi}(t) = c_1 e^{j4t} + c_2 e^{-j4t}, \quad t > 0 \quad (8)$$

Από τις αρχικές συνθήκες που μας δίνονται έχουμε

$$y_{zi}(0^-) = 1 \quad (9)$$

$$y'_{zi}(0^-) = -1 \quad (10)$$

Οπότε έχουμε το σύστημα

$$y_{zi}(0^-) = c_1 + c_2 = 1 \quad (11)$$

$$y'_{zi}(0^-) = j4c_1 - j4c_2 = -1 \quad (12)$$

και λύνοντάς το έχουμε

$$c_1 = \frac{1}{2} + j\frac{1}{8} \quad (13)$$

$$c_2 = \frac{1}{2} - j\frac{1}{8} \quad (14)$$

Οπότε

$$y_{zi}(t) = \left[\left(\frac{1}{2} + j\frac{1}{8} \right) e^{j4t} + \left(\frac{1}{2} - j\frac{1}{8} \right) e^{-j4t} \right] u(t) \quad (15)$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα θεωρείται σωστό αλλά μπορεί να απλοποιηθεί περισσότερο ως

$$y_{zi}(t) = \left[\frac{1}{2} e^{j4t} + \frac{1}{2} e^{-j4t} + j\frac{1}{8} e^{j4t} - j\frac{1}{8} e^{-j4t} \right] u(t) = \left[\cos(4t) - \frac{1}{4} \sin(4t) \right] u(t) \quad (16)$$

- ii. Θεωρούμε το σύστημα

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) + 16y(t) = x(t) \quad (17)$$

με κρουστική απόκριση $h_o(t)$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι της μορφής

$$\lambda^2 + 16 \quad (18)$$

και άρα οι χαρακτηριστικές ρίζες είναι οι $\lambda_1 = j4$ και $\lambda_2 = -j4$. Οπότε η κρουστική απόκριση θα είναι της μορφής

$$h_o(t) = c_1 e^{j4t} + c_2 e^{-j4t}, \quad t > 0 \quad (19)$$

Οι ψευδοαρχικές συνθήκες που εισάγει η συνάρτηση Δέλτα είναι οι

$$h_o(0^+) = 0 \quad (20)$$

$$h'_o(0^+) = 1 \quad (21)$$

Οπότε έχουμε το σύστημα

$$h_o(0^+) = c_1 + c_2 = 0 \quad (22)$$

$$h'_o(0^+) = j4c_1 - j4c_2 = 1 \quad (23)$$

και λύνοντάς το έχουμε

$$c_1 = \frac{1}{j8} = -\frac{j}{8} \quad (24)$$

$$c_2 = -\frac{1}{j8} = \frac{j}{8} \quad (25)$$

Οπότε

$$h_o(t) = -\frac{j}{8}e^{j4t} + \frac{j}{8}e^{-j4t}, \quad t > 0 \quad (26)$$

Η παραπάνω απάντηση θεωρείται σωστή αλλά απλοποιείται περαιτέρω:

$$h_o(t) = \frac{1}{4} \sin(4t)u(t) \quad (27)$$

Για το δοθέν στην εκφώνηση σύστημα, η κρουστική απόκριση θα είναι

$$h(t) = h_o(t) + \frac{d}{dt}h_o(t) = \left[\frac{1}{4} \sin(4t) + \cos(4t) \right] u(t) \quad (28)$$

Έκφραση της $h(t)$ με χρήση της Σχέσης (26) και της παραγώγου της θεωρείται σωστή.

iii. Θα είναι

$$y_{zs}(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{4} \sin(4\tau) + \cos(4\tau) \right] u(\tau)u(t-\tau)d\tau \quad (29)$$

Όμως

$$u(\tau)u(t-\tau) = 1 \quad (30)$$

για $0 < \tau < t$, οπότε

$$y(t) = \int_0^t \left[\frac{1}{4} \sin(4\tau) + \cos(4\tau) \right] d\tau = \frac{1}{16} + \frac{1}{4} \sin(4t) - \frac{1}{16} \cos(4t) \quad (31)$$

για $t > 0$, οπότε

$$y_{zs}(t) = \left[\frac{1}{16} + \frac{1}{4} \sin(4t) - \frac{1}{16} \cos(4t) \right] u(t) \quad (32)$$

Άσκηση 3

Ένα *πραγματικό* περιοδικό σήμα όταν αναπτυχθεί σε εκθετική σειρά Fourier έχει συντελεστές

$$X_k = [2e^{-j\pi/3}, 3e^{j\pi/4}, e^{j\pi/2}, e^{-j\pi}, 2e^{-j\pi/4}] \quad (33)$$

για $k = 1, 2, 3, 4, 5$ αντίστοιχα, και $X_0 = 3$. Πόση είναι η ισχύς του σήματος και τι ποσοστό της ισχύος αυτής βρίσκεται στα 2 πρώτα **ημίτονα** ($k = 1, k = 2$) της σειράς Fourier;

Λύση:

Από το θεώρημα του Parseval έχουμε ότι

$$P_x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 \quad (34)$$

Το σήμα είναι πραγματικό, οπότε θα έχει και αρνητικά k για τα οποία θα ισχύει ότι $X_k^* = X_{-k}$, και επειδή για κάθε μιγαδικό αριθμό $Ae^{j\theta}$ ισχύει ότι $|Ae^{j\theta}| = |A|$, θα είναι

$$P_x = |X_0|^2 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} |X_k|^2 = 3^2 + 2[2^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2] = 9 + 2(4 + 9 + 1 + 1 + 4) = 9 + 38 = 47 \quad (35)$$

Τα δυο πρώτα ημίτονα σχηματίζονται από τα εκθετικά με συντελεστές $X_{-1} = X_1^*$, $X_{-2} = X_2^*$, X_1 , X_2 , και άρα έχουν ισχύ

$$P_{1,2} = \sum_{k=-2, k \neq 0}^2 |X_k|^2 = 2^2 + 3^2 + 3^2 + 2^2 = 4 + 9 + 9 + 4 = 26 \quad (36)$$

Άρα το ζητούμενο ποσοστό είναι

$$\rho = \frac{P_{1,2}}{P_x} = \frac{26}{47} = 0.553 \text{ ή } 55.3\% \quad (37)$$

Άσκηση 4

Δείξτε ότι για το περιοδικό σήμα $x(t)$ το οποίο σε μια περίοδο $T_0 = 2$ δίνεται ως

$$x_{T_0}(t) = \begin{cases} e^{-t}, & 0 < t < 1 \\ 0, & 1 < t < 2 \end{cases} \quad (38)$$

οι συντελεστές Fourier του είναι

$$X_k = \frac{1 - e^{-1}(-1)^k}{2 + j2\pi k}, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad (39)$$

Λύση:

Γνωρίζουμε τις σχέσεις

$$f_0 T_0 = 1 \quad (40)$$

$$e^{\pm j\pi k} = (-1)^k \quad (41)$$

Είναι

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_0^1 e^{-t} e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad (42)$$

$$= \frac{1}{T_0} \int_0^1 e^{-t(1+j2\pi k f_0)} dt = \frac{1}{T_0} \frac{1}{[-(1+j2\pi k f_0)]} e^{-t(1+j2\pi k f_0)} \Big|_0^1 \quad (43)$$

$$= -\frac{1}{T_0 + j2\pi k f_0 T_0} (e^{-(1+j2\pi k f_0)} - 1) \quad (44)$$

και για $T_0 = 2 \implies f_0 = 1/2$, μαζί με τη σχέση (41)

$$X_k = -\frac{1}{2 + j2\pi k} (e^{-(1+j\pi k)} - 1) = \frac{1}{2 + j2\pi k} (1 - e^{-1} e^{-j\pi k}) = \frac{1 - e^{-1}(-1)^k}{2 + j2\pi k} \quad (45)$$

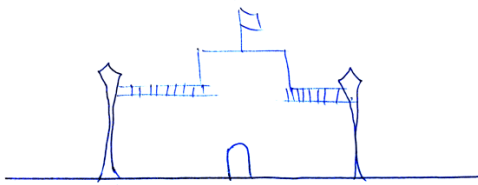
Παρατηρώ ότι για $k = 0$ δεν υπάρχει κάποια απροσδιοριστία στους συντελεστές, οπότε δε χρειάζεται να το βρω ξεχωριστά.

Άσκηση 5

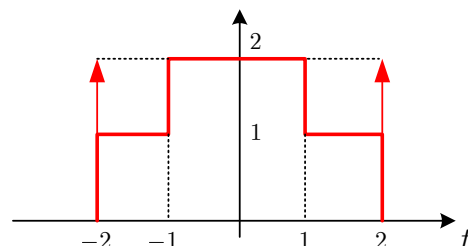
Ο φίλος σας πήγε διακοπές στο Ηνωμένο Βασίλειο, και μεταξύ άλλων φωτογράφησε το παλάτι του Buckingham, όπως στο Σχήμα 1(α). Ο μικρός του αδελφός προσπάθησε να το ζωγραφίσει, αλλά το άφησε στη μέση - Σχήμα 1(β). Εσείς είδατε το ημιτελές σχέδιο και επειδή έχετε διαβάσει πολύ για το HY215, κάθε ζωγραφία τη βλέπετε ως σήμα! Βρείτε το Μετασχηματισμό Fourier του παλατιού-σήματος του Σχήματος 1(γ).



(α)



(β)



(γ)

Σχήμα 1: Παλάτι του Buckingham σε διάφορες “εκδόσεις”.

Hint: “Σπάστε” το σήμα σας σε γνωστά υποσήματα, βρείτε ξεχωριστά το μετασχ. Fourier τους, και αθροίστε τα αποτελέσματα που παίρνετε.

Λύση:

Η παρακάτω λύση είναι μια από τις πιθανές και χρησιμοποιεί έτοιμα ζεύγη και ιδιότητες, “διατρέχοντας” το σήμα από αριστερά προς τα δεξιά, και διασπώντας το σε:

- μια συνάρτηση δέλτα στο $t_0 = -2$ με συντελεστή 2
- έναν παλμό στο $(-2, -1)$ με πλάτος 1
- έναν παλμό στο $(-1, 1)$ με πλάτος 2
- έναν παλμό στο $(1, 2)$ με πλάτος 1
- μια συνάρτηση δέλτα στο $t_0 = 2$ με συντελεστή 2

Έχουμε

$$x(t) = 2\delta(t+2) + 2\delta(t-2) + \text{rect}\left(\frac{t+\frac{3}{2}}{1}\right) + 2\text{rect}\left(\frac{t}{2}\right) + \text{rect}\left(\frac{t-\frac{3}{2}}{1}\right) \quad (46)$$

οπότε θα είναι

$$X(f) = F\left\{2\delta(t+2) + 2\delta(t-2) + \text{rect}\left(\frac{t+\frac{3}{2}}{1}\right) + 2\text{rect}\left(\frac{t}{2}\right) + \text{rect}\left(\frac{t-\frac{3}{2}}{1}\right)\right\} \quad (47)$$

$$= 2e^{j2\pi 2f} + 2e^{-j2\pi 2f} + \text{sinc}(f)e^{j2\pi\frac{3}{2}f} + 4\text{sinc}(2f) + \text{sinc}(f)e^{-j2\pi\frac{3}{2}f} \quad (48)$$

$$= 4\cos(4\pi f) + 2\text{sinc}(f)\cos(2\pi\frac{3}{2}f) + 4\text{sinc}(2f) \quad (49)$$

$$= 4\cos(4\pi f) + 2\text{sinc}(f)\cos(3\pi f) + 4\text{sinc}(2f) \quad (50)$$

Μια άλλη λύση είναι να διασπάσετε το σήμα σε:

- μια συνάρτηση δέλτα στο $t_0 = -2$ με συντελεστή 2

- έναν παλμό στο $(-2, -2)$ με πλάτος 1
- έναν παλμό στο $(-1, 1)$ με πλάτος 1
- μια συνάρτηση δέλτα στο $t_0 = 2$ με συντελεστή 2

Λύστε τη μόνι/ες σας και επιβεβαιώστε ότι δίνει αποτέλεσμα

$$X(f) = 4 \cos(4\pi f) + 4\text{sinc}(4f) + 2\text{sinc}(2f) \quad (51)$$

που είναι μια διαφορετική, ισοδύναμη (αλλά πιο κομψή) γραφή του προηγούμενου αποτελέσματος.

Άσκηση 6

Η Διαμόρφωση Πλάτους (Amplitude Modulation - AM) ήταν ο κυρίαρχος τρόπος εκπομπής σήματος κατά τα πρώτα ογδόντα χρόνια του 20ού αιώνα και παραμένει σε ευρεία χρήση και κατά τον 21ο. Οι σταθμοί που εκπέμπουν στα AM παγκοσμίως αριθμούνται σε 16265. Η κύρια εφαρμογή της διαμόρφωσης AM είναι στη ραδιοφωνία ενώ με διαμόρφωση AM διαμορφώνεται και το σήμα εικόνας του αναλογικού τηλεοπτικού σήματος. Ένα AM-διαμορφωμένο σήμα γράφεται ως

$$x(t) = [1 + Am(t)] \cos(2\pi f_c t) \quad (52)$$

με $m(t)$ το σήμα πληροφορίας (π.χ. ραδιοφωνική εκπομπή) που θέλουμε να μεταδώσουμε. Ένα απλό AM-διαμορφωμένο σήμα είναι το

$$x(t) = [1 + \cos(2\pi 100t)] \cos(2\pi 1000t) \quad (53)$$

Αναπτύξτε σε εκθετική σειρά Fourier το παραπάνω σήμα και σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης της.

Λύση:

Είναι

$$x(t) = [1 + \cos(2\pi 100t)] \cos(2\pi 1000t) \quad (54)$$

$$= \cos(2\pi 1000t) + \cos(2\pi 100t) \cos(2\pi 1000t) \quad (55)$$

$$= \frac{1}{2} e^{j2\pi 1000t} + \frac{1}{2} e^{-j2\pi 1000t} + \frac{1}{4} (e^{j2\pi 100t} + e^{-j2\pi 100t}) (e^{j2\pi 1000t} + e^{-j2\pi 1000t}) \quad (56)$$

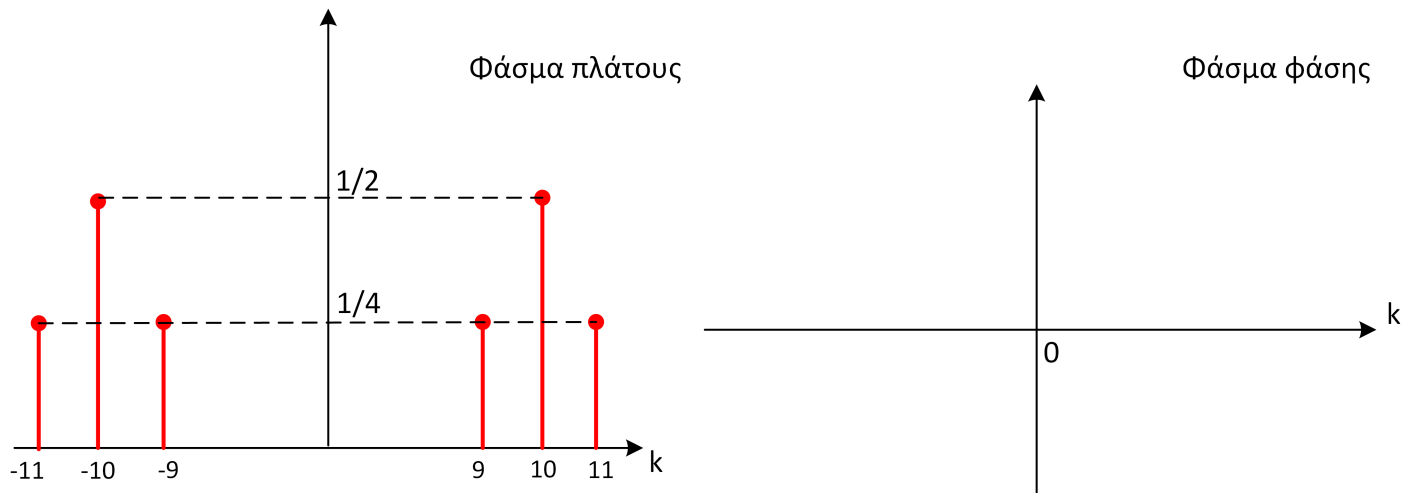
$$= \frac{1}{2} e^{j2\pi 1000t} + \frac{1}{2} e^{-j2\pi 1000t} + \frac{1}{4} (e^{j2\pi 1100t} + e^{-j2\pi 1100t} + e^{j2\pi 900t} + e^{-j2\pi 900t}) \quad (57)$$

$$= \frac{1}{2} e^{j2\pi 1000t} + \frac{1}{2} e^{-j2\pi 1000t} + \frac{1}{4} e^{j2\pi 1100t} + \frac{1}{4} e^{-j2\pi 1100t} + \frac{1}{4} e^{j2\pi 900t} + \frac{1}{4} e^{-j2\pi 900t} \quad (58)$$

Η σειρά Fourier έχει θεμελιώδη συχνότητα

$$f_0 = \text{ΜΚΔ}\{900, 1000, 1100\} = 100 \text{ Hz} \quad (59)$$

οπότε το φάσμα περιέχει την 9η, 10η, και 11η αρμονική. Τα φάσματα φαίνονται στο Σχήμα 2.



Σχήμα 2: Φάσματα πλάτους και φάσης Άσκησης 6.