Φροντιστήριο 5ο

Άσκηση 1 - Βαθμός: 15

Ελέγξτε αν το παρακάτω σύστημα είναι γραμμικό (**5 μ.**), χρονικά αμετάβλητο (**2.5 μ.**), ευσταθές (**2.5 μ.**), αιτιατό (**2.5 μ.**), και δυναμικό (**2.5 μ.**)

$$y(t) = (2 + \sin(t))x(t) \tag{1}$$

α) ομογένεια: ✓

$ax(t) \longrightarrow (2+\sin(t))ax(t) = a(2+\sin(t))x(t) = ay(t)$

αθροιστικότητα: ✓

$x_1(t) + x_2(t) \longrightarrow (2+\sin(t))(x_1(t)+x_2(t)) =$

$= (2+\sin(t))x_1(t) + (2+\sin(t))x_2(t) = y_1(t)+y_2(t)$

Άρα το σύστημα είναι γραμμικό.

β) $x(t-t_0) \longrightarrow (2+\sin(t))\,x(t-t_0)$

$y(t-t_0) = (2+\sin(t-t_0))x(t-t_0)$

$\neq$

Άρα δεν είναι χρονικά αμετάβλητο

γ) Ευστάθεια

$|x(t)| < B$

$|y(t)| = |2+\sin(t)||x(t)| < \underbrace{|2+\sin(t)|}B < 3B$

δ) Αιτιατότητα

Είναι αιτιατό επειδή η έξοδος εξαρτάται μόνο από την τρέχουσα τιμή της εισόδου και όχι από μελλοντικές.

ε) Δυναμικότητα

Δεν είναι δυναμικό γιατί δεν απαιτείται μνήμη για την αποθήκευση άλλων χρονικών στιγμών, της εισόδου ή της εξόδου.

Άσκηση 2 - Βαθμός: 30

Ένα σύστημα περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 16y(t) = \boxed{x(t) + \frac{d}{dt}x(t)} \qquad (6)$$

$$\left\{ \frac{1}{j} = \frac{-(j)^2}{j} \right.$$

$$\left\{ \frac{1}{j} = -j \right.$$

και έχει αρχικές συνθήκες $y(0^-) = 1$, $\frac{d}{dt}y(t)\Big|_{t=0^-} = -1$.

i. **(5 μ.)** Βρείτε την απόκριση μηδενικής εισόδου, $y_{zi}(t)$.

ii. **(10 μ.)** Βρείτε την κρουστική του απόκριση, $h(t)$.

iii. **(15 μ.)** Βρείτε την απόκριση μηδενικής κατάστασης, $y_{zs}(t)$, για $x(t) = u(t)$.

i) $\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 16y(t) = 0$ Χ.Π. $\lambda^2 + 16 = 0$ $\lambda_1 = 4j$, $\lambda_2 = -4j$

$$y_{zi}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} = \boxed{c_1 e^{4jt} + c_2 e^{-4jt}}, \ t>0$$

$$\left.\begin{aligned} y(0^-) = 1 &\Leftrightarrow c_1 + c_2 = 1 \\ y'(0^-) = -1 &\Leftrightarrow 4jc_1 - 4jc_2 = -1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} &c_1 = 1 - c_2 \\ &4j - 4jc_2 - 4jc_2 = -1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} &c_1 = 1 - c_2 \\ &8jc_2 = 4j + 1 \end{aligned} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} &c_1 = 1 - c_2 \\ &c_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{8j} = \frac{1}{2} - j\frac{1}{8} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} &c_1 = \frac{1}{2} + j\frac{1}{8} \\ &c_2 = \frac{1}{2} - j\frac{1}{8} \end{aligned}}$$

$$y_{zi}(t) = \left[\left(\frac{1}{2} + j\frac{1}{8}\right)e^{j4t} + \left(\frac{1}{2} - j\frac{1}{8}\right)e^{-j4t}\right]u(t)$$

ii) $1\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 16y(t) = x(t) \xrightarrow{x(t)=\delta(t)} h_0(t)$

$$\left\{\begin{array}{l} h_0(0^+) = 0 \\ h_0'(0^+) = 0 \\ \vdots \\ h_0^{(N-1)}(0^+) = \frac{1}{a_N} \end{array}\right.$$

X. Π $\quad \lambda^2 + 16 = 0 \quad \begin{array}{l} \lambda_1 = 4j \\ \lambda_2 = -4j \end{array}$

$$h_0(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} = c_1 e^{4jt} + c_2 e^{-4jt}, \quad t>0$$

$$\begin{array}{l} h_0(0^+) = 0 \\ h_0'(0^+) = \frac{1}{1} = 1 \end{array} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} c_1 + c_2 = 0 \\ 4jc_1 - 4jc_2 = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} c_1 = -c_2 \\ -4jc_2 - 4jc_2 = 1 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} c_1 = -c_2 \\ -8jc_2 = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} c_1 = -c_2 \\ c_2 = -\frac{1}{8j} \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} c_1 = -j\frac{1}{8} \\ c_2 = j\frac{1}{8} \end{array}}$$

$$h_0(t) = \frac{1}{8j}e^{4jt} - \frac{1}{8j}e^{-4jt} = \frac{1}{4}\sin(4t)u(t)$$

$$h(t) = h_0(t) + \frac{d}{dt}h_0(t) = \left[\frac{1}{4}\sin(4t) + \cos(4t)\right]u(t)$$

iii) $y_{zs}(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau =$

$$\boxed{\begin{aligned} &x(t) = u(t) \\ &h(t) = \left(\tfrac{1}{4}\sin(4t) + \cos(4t)\right)u(t) \end{aligned}}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\tfrac{1}{4}\sin(4\tau) + \cos(4\tau)\right] \underline{u(\tau)}\ \underline{u(t-\tau)}\, d\tau =$$

$$u(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau > 0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \longrightarrow u(\tau)u(t-\tau) = \begin{cases} 1, & 0 < \tau < t \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$u(t-\tau) = \begin{cases} 1, & \tau < t \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$\int_0^t \tfrac{1}{4}\sin(4\tau) + \cos(4\tau)\, d\tau = \tfrac{1}{4}\int_0^t \sin(4\tau)\, d\tau + \int_0^t \cos(4\tau)\, d\tau =$$

$$= \tfrac{1}{4}\left[-\tfrac{1}{4}\cos(4\tau)\right]_0^t + \left[\tfrac{1}{4}\sin(4\tau)\right]_0^t =$$

$$\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}\cos(4t)+\frac{1}{4}\cancelto{1}{\cos(0)}\right)+\frac{1}{4}\sin(4t)-\frac{1}{4}\cancelto{0}{\sin(0)}=$$

$$=\frac{1}{16}-\frac{1}{16}\cos(4t)+\frac{1}{4}\sin(4t)\,,\quad \underline{t>0}$$

$$=\left[\frac{1}{16}-\frac{1}{16}\cos(4t)+\frac{1}{4}\sin(4t)\right]u(t)$$

Άσκηση 3 - Βαθμός: 15

Ενα *πραγματικό* περιοδικό σήμα όταν αναπτυχθεί σε εκθετική σειρά Fourier έχει συντελεστές

$$X_k = [2e^{-j\pi/3}, 3e^{j\pi/4}, e^{j\pi/2}, e^{-j\pi}, 2e^{-j\pi/4}] \quad (33)$$

για $k = 1, 2, 3, 4, 5$ αντίστοιχα, και $X_0 = 3$. Πόση είναι η ισχύς του σήματος (**10 μ.**) και τι ποσοστό της ισχύος αυτής βρίσκεται στα 2 πρώτα ***ημίτονα*** ($k = 1,\ k = 2$) της σειράς Fourier (**5 μ.**);

$$P_x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 , \quad X_{-k} = X_k^* \qquad |Ae^{\pm j\theta}| = |A|$$

$$P_x = |X_0|^2 + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{+\infty} |X_k|^2 = |X_0|^2 + 2\sum_{k=1}^{5} |X_k|^2 =$$

$$= 3^2 + 2\left[|2e^{-j\pi/3}|^2 + |3e^{j\pi/4}|^2 + |e^{j\pi/2}|^2 + |e^{-j\pi}|^2 + |2e^{-j\pi/4}|^2\right] =$$

$$= 9 + 2(2^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2) = 9 + 2\cdot(4 + 9 + 1 + 1 + 4) =$$

$$= \boxed{47}$$

$$X_{-k} = X_k^* \qquad X_{-4} = X_4^* = |1e^{+j\pi}| = |1|$$

Τα δύο πρώτα ημίτονα σχηματίζονται από τα εκθετικά με συντελεστές $\underline{X_1}$, $\underline{X_2}$, $X_{-1} = X_1^*$, $X_{-2} = X_2^*$

$$P_{1,2} = \sum_{\substack{k=-2 \\ k \neq 0}}^{2} |X_k|^2 = 2^2 + 3^2 + 3^2 + 2^2 = \boxed{26}$$

$$p = \frac{P_{1,2}}{P} = \frac{26}{47} = \underline{55,3\ \%}$$

Άσκηση 4 - Βαθμός: 30

Δείξτε ότι για το περιοδικό σήμα $x(t)$ το οποίο σε μια περίοδο $T_0 = 2$ δίνεται ως

$$x_{T_0}(t) = \begin{cases} e^{-t}, & 0 < t < 1 \\ 0, & 1 < t < 2 \end{cases} \tag{38}$$

$f_0 T_0 = 1$

$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2}$

οι συντελεστές Fourier του είναι

$$\boxed{X_k = \frac{1 - e^{-1}(-1)^k}{2 + j2\pi k}, \ \forall \ k \in Z} \tag{39}$$

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-t} e^{-j2\pi k f_0 t} dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-t(1+j2\pi k f_0)} dt = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{-(1+j2\pi f_0 k)} e^{-t(1+j2\pi f_0 k)}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{-1-j2\pi f_0 k}}{-(1+j2\pi f_0 k)} - \frac{1}{-(1+j2\pi f_0 k)}\right) = -\frac{1}{2+j4\pi k \underset{\frac{1}{2}}{f_0}}\left(e^{-(1+j2\pi \underset{\frac{1}{2}}{f_0} k)} - 1\right)$$

$$= -\frac{1}{2+j2\pi k}\left(e^{-(1+j\pi k)} - 1\right) =$$

$$= -\frac{1}{2+j2\pi k}\left(e^{-(1+j\pi k)} - 1\right) = \frac{1 - e^{-1}e^{-j\pi k}}{2+j2\pi k} = \boxed{\frac{1 - e^{-1}(-1)^k}{2+j2\pi k}}$$

$$e^{-j\pi k} = (-1)^k$$

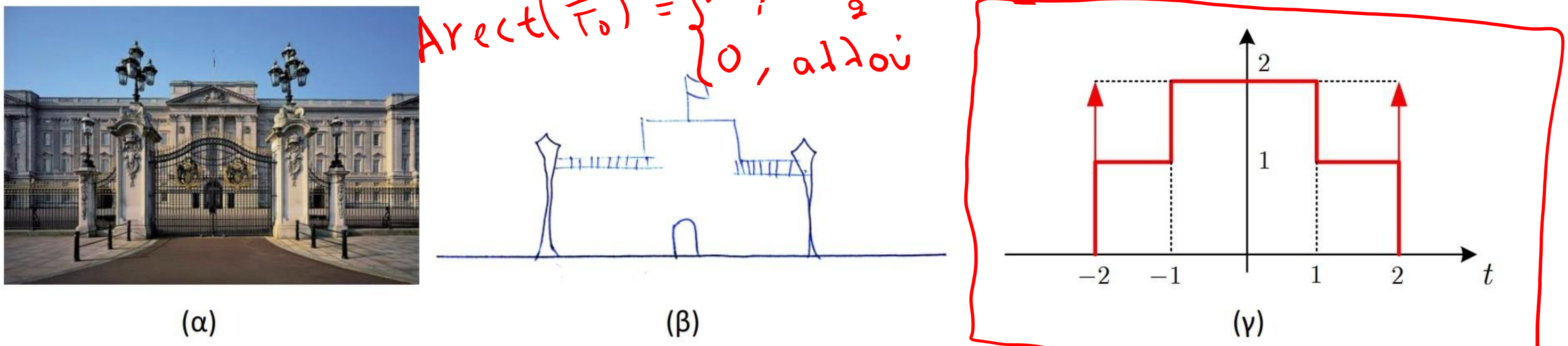
$$X_0 = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\,dt$$

$$k=0 \rightarrow \boxed{X_0 = \frac{1-e^{-1}}{2}}$$

Άσκηση 5 - Βαθμός: 25

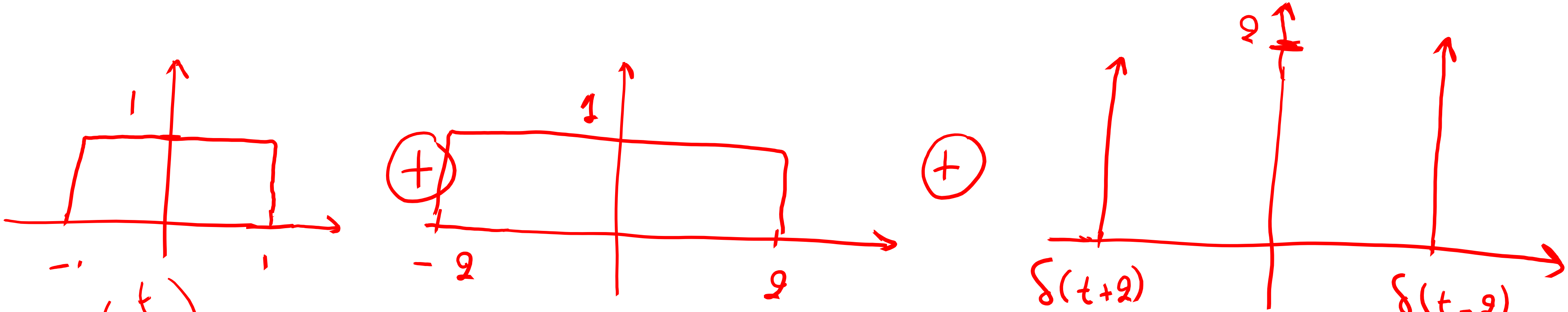
Ο φίλος σας πήγε διακοπές στο Ηνωμένο Βασίλειο, και μεταξύ άλλων φωτογράφισε το παλάτι του Buckingham, όπως στο Σχήμα 1(α). Ο μικρός του αδελφός προσπάθησε να το ζωγραφίσει, αλλά το άφησε στη μέση - Σχήμα 1(β). Εσείς είδατε το ημιτελές σχέδιο και επειδή έχετε διαβάσει πολύ για το ΗΥ215, κάθε ζωγραφία τη βλέπετε ως σήμα! Βρείτε το Μετασχηματισμό Fourier του παλατιού-σήματος του Σχήματος 1(γ).

$$A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T_0}\right) = \begin{cases} A, & -\frac{T_0}{2} < t < \frac{T_0}{2} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$



Σχήμα 1: *Παλάτι του Buckingham σε διάφορες "εκδόσεις".*

Hint: "Σπάστε" το σήμα σας σε γνωστά υποσήματα, βρείτε ξεχωριστά το μετασχ. Fourier τους, και αθροίστε τα αποτελέσματα που παίρνετε.



$\mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right) + \mathrm{rect}\left(\frac{t}{4}\right) + 2\delta(t+2) + 2\delta(t-2)$

$$2\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right) \xleftrightarrow{F} 2\,\mathrm{sinc}(2f)$$

$$1\cdot \mathrm{rect}\left(\frac{t}{4}\right) \xleftrightarrow{F} 4\,\mathrm{sinc}(4f)$$

$$2\delta(t-2)+2\delta(t+2) \xleftrightarrow{F} 2e^{-j2\pi f\cdot 2} + 2e^{j2\pi f\cdot 2} = 4\cos(4\pi f)$$

$$\boxed{F\{x(t)\} = 4\cos(4\pi f) + 2\,\mathrm{sinc}(2f) + 4\,\mathrm{sinc}(4f)}$$