

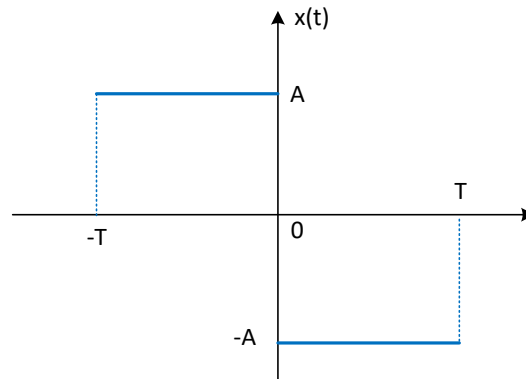
ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2021-22

Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Πέμπτο Φροντιστήριο

Άσκηση 1 - Μετασχηματισμός Fourier και Ιδιότητες I

Βρείτε το μετασχ. Fourier του σήματος που φαίνεται στο Σχήμα 1 με τους ακόλουθους τρόπους:



Σχήμα 1: Σχήμα Άσκησης 1.

(α) Χρησιμοποιώντας τον ορισμό.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε ότι $1 - \cos(2\theta) = 2 \sin^2(\theta)$.

(β) Χρησιμοποιώντας τα γνωστά σας ζεύγη μετασχ. Fourier που γνωρίζετε και την ιδιότητα της μετατόπισης.

(γ) Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της παραγωγίσισης/ολοκλήρωσης και μετατόπισης.

Λύση:

α) Είναι

$$X(f) = \int_{-T}^0 A e^{-j2\pi ft} dt + \int_0^T (-A) e^{-j2\pi ft} dt \quad (1)$$

$$= A \left[\frac{1}{-j2\pi f} e^{-j2\pi ft} \right]_{-T}^0 - \frac{A}{-j2\pi f} \left[e^{-j2\pi ft} \right]_0^T \quad (2)$$

$$= -\frac{A}{j2\pi f} (1 - e^{j2\pi fT}) + \frac{A}{j2\pi f} (e^{-j2\pi fT} - 1) \quad (3)$$

$$= \frac{A}{j2\pi f} (e^{-j2\pi fT} - 1 - 1 + e^{j2\pi fT}) \quad (4)$$

$$= \frac{A}{j2\pi f} (2 \cos 2\pi fT - 2) = \frac{A}{j2\pi f} (-4 \sin^2(\pi fT)) \quad (5)$$

$$= -\frac{2A}{j\pi f} \sin^2(\pi fT) = \frac{2Aj}{\pi f} \sin^2(\pi fT) \quad (6)$$

β) Παρατηρούμε ότι το σχήμα περιλαμβάνει 2 τετραγωνικούς παλμούς στις θέσεις $t = \pm \frac{T}{2}$, με πλάτος A και διάρκεια T ο καθένας.

Γνωρίζουμε ότι

$$\text{Arect}\left(\frac{t \pm t_0}{T}\right) \xleftrightarrow{F} AT \text{sinc}(fT) e^{\pm j2\pi f t_0}$$

Άρα

$$x(t) = \text{Arect}\left(\frac{t + \frac{T}{2}}{T}\right) - \text{Arect}\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right) \xleftrightarrow{F} X(f) = AT \text{sinc}(fT) e^{j2\pi f \frac{T}{2}} - AT \text{sinc}(fT) e^{-j2\pi f \frac{T}{2}} \quad (7)$$

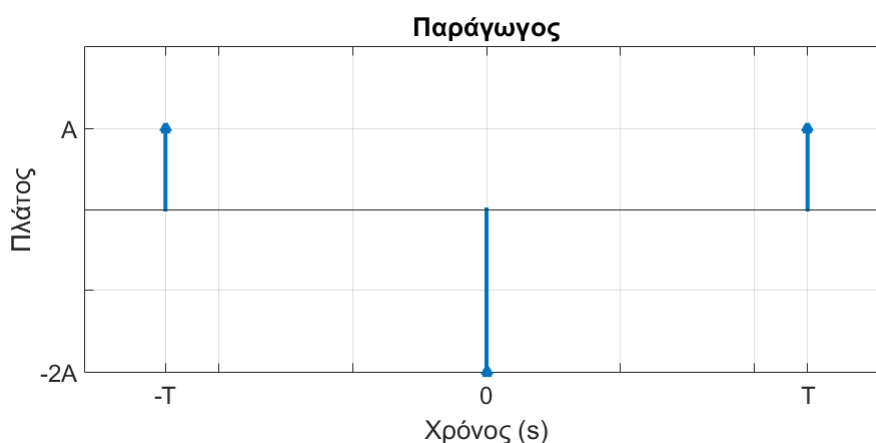
$$= AT \text{sinc}(fT) (e^{j\pi f T} - e^{-j\pi f T}) \quad (8)$$

$$= AT \text{sinc}(fT) 2j \sin(\pi f T) \quad (9)$$

$$= AT \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} 2j \sin(\pi f T) \quad (10)$$

$$= \frac{2Aj}{\pi f} \sin^2(\pi f T) \quad (11)$$

γ) Αν παραγωγίσουμε το $x(t)$, θα έχουμε:



Το σήμα παραπάνω γράφεται ως:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A\delta(t + T) - 2A\delta(t) + A\delta(t - T)$$

κι έχει Μ.Φ. ως

$$F\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = Ae^{j2\pi f T} - 2A + Ae^{-j2\pi f T} \quad (12)$$

$$= 2A \cos(2\pi f T) - 2A = -4A \sin^2(\pi f T) \quad (13)$$

Παρατηρούμε ότι $F\{x'(t)\}|_{f=0} = 0$ και άρα από ιδιότητα της παραγωγίσισης/ολοκλήρωσης έχουμε ότι

$$F\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = -4A \sin^2(\pi f T) = j2\pi f X(f) \iff X(f) = \frac{-4A \sin^2(\pi f T)}{j2\pi f} + 0 \cdot \delta(f) = -\frac{2Aj}{\pi f} \sin^2(\pi f T) \quad (14)$$

Άσκηση 2 - Μετασχηματισμός Fourier και Ιδιότητες - II

Χρησιμοποιήστε τις ιδιότητες και τους πίνακες με ζεύγη μετασχ. Fourier των σημειώσεών σας για να υπολογίσετε το μετασχ. Fourier των παρακάτω σημάτων:

$$(α) x(t) = \sin(2\pi t)e^{-t}u(t)$$

$$(β) x(t) = te^{-3|t-1|}$$

$$(γ) x(t) = \frac{2 \sin(3\pi t) \sin(2\pi t)}{\pi t}$$

$$(δ) x(t) = \frac{d}{dt}(te^{-2t} \sin(t)u(t))$$

$$(ε) x(t) = \int_{-\infty}^t \frac{\sin(2\pi\tau)}{\pi\tau} d\tau$$

$$(ς) x(t) = e^{-t+2}u(t-2)$$

$$(ζ) x(t) = \frac{\sin(t)}{\pi t} * \frac{d \sin(2t)}{dt \pi t}$$

Λύση:

$$(α) \text{ Από πίνακα ζευγών: } X(f) = \frac{2\pi}{(1 + j2\pi f)^2 + 4\pi^2}$$

$$(β) \text{ Είναι } x(t) = te^{-3|t-1|}, \text{ και}$$

- $s(t) = e^{-3|t|} \xleftrightarrow{F} S(f) = \frac{6}{9 + 4\pi^2 f^2}$
- $w(t) = s(t-1) \xleftrightarrow{F} W(f) = e^{-j2\pi f} S(f)$
- $x(t) = tw(t) \xleftrightarrow{F} X(f) = \frac{j}{2\pi} \frac{dW(f)}{df}$

Άρα:

$$X(f) = \frac{j}{2\pi} \frac{d}{df} \left[e^{-j2\pi f} \frac{6}{9 + 4\pi^2 f^2} \right] \quad (15)$$

$$= \frac{j}{2\pi} \left(-\frac{12j\pi e^{-j2\pi f}}{9 + 4\pi^2 f^2} - \frac{48\pi^2 f e^{-j2\pi f}}{(9 + 4\pi^2 f^2)^2} \right) \quad (16)$$

$$(γ) \text{ Είναι } x(t) = 2 \frac{\sin(3\pi t) \sin(2\pi t)}{\pi t}$$

- $s(t) = \frac{\sin(3\pi t)}{\pi t} = 3\text{sinc}(3t) \xleftrightarrow{F} S(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{3}\right) = \begin{cases} 1, & -\frac{3}{2} < f < \frac{3}{2} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$
- $w(t) = \frac{\sin(2\pi t)}{\pi t} = 2\text{sinc}(2t) \xleftrightarrow{F} W(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{2}\right) = \begin{cases} 1, & -1 < f < 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

Άρα

$$x(t) = 12\text{sinc}(3t)\text{sinc}(2t) = 2s(t)w(t) \xleftrightarrow{F} X(f) = 2W(f) * S(f) = 2\text{rect}\left(\frac{f}{3}\right) * \text{rect}\left(\frac{f}{2}\right) \quad (17)$$

Εκτελώντας τη συνέλιξη παίρνουμε

$$X(f) = \begin{cases} 2f + 5, & -\frac{5}{2} < f < -\frac{1}{2} \\ 4, & -\frac{1}{2} < f < \frac{1}{2} \\ -2f + 5, & \frac{1}{2} < f < \frac{5}{2} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (18)$$

$$(\delta) \text{ Είναι } x(t) = \frac{d}{dt} te^{-2t} \sin(t) u(t) = \frac{d}{dt} \left[te^{-2t} u(t) \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j} \right]$$

$$\bullet s(t) = te^{-2t} u(t) \xleftrightarrow{F} S(f) = \frac{1}{(2 + j2\pi f)^2}$$

$$\bullet w_1(t) = e^{jt} s(t) \xleftrightarrow{F} W_1(f) = S\left(f - \frac{1}{2\pi}\right)$$

$$\bullet w_2(t) = e^{-jt} s(t) \xleftrightarrow{F} W_2(f) = S\left(f + \frac{1}{2\pi}\right)$$

$$\bullet x(t) = \frac{d}{dt} \frac{1}{2j} [w_1(t) + w_2(t)] \xleftrightarrow{F} X(f) = \pi f (W_1(f) + W_2(f))$$

Άρα

$$X(f) = \pi f \left(\frac{1}{(2 + j2\pi(f - \frac{1}{2\pi}))^2} - \frac{1}{(2 + j2\pi(f + \frac{1}{2\pi}))^2} \right) \quad (19)$$

$$(\epsilon) \text{ Είναι } x(t) = \int_{-\infty}^t \frac{\sin(2\pi\tau)}{\pi\tau} d\tau$$

$$\bullet s(t) = \frac{\sin(2\pi\tau)}{\pi\tau} = 2\text{sinc}(2\tau) \xleftrightarrow{F} S(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{2}\right) = \begin{cases} 1, & -1 < f < 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$\bullet x(t) = \int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau \xleftrightarrow{F} X(f) = \frac{1}{j2\pi f} S(f) + \frac{S(0)}{2} \delta(f)$$

Άρα

$$X(f) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & f = 0 \\ \frac{1}{j2\pi f}, & |f| < 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (20)$$

$$(\zeta) \text{ Είναι } x(t) = e^{-t+2} u(t-2)$$

$$\bullet s(t) = e^{-t} u(t) \xleftrightarrow{F} S(f) = \frac{1}{1 + j2\pi f}$$

$$\bullet x(t) = s(t-2) \xleftrightarrow{F} X(f) = e^{-j4\pi f} S(f)$$

Άρα

$$X(f) = e^{-j4\pi f} \frac{1}{1 + j2\pi f} \quad (21)$$

$$(\zeta) \text{ Είναι } x(t) = \frac{\sin(t)}{\pi t} * \frac{d}{dt} \frac{\sin(2t)}{\pi t}$$

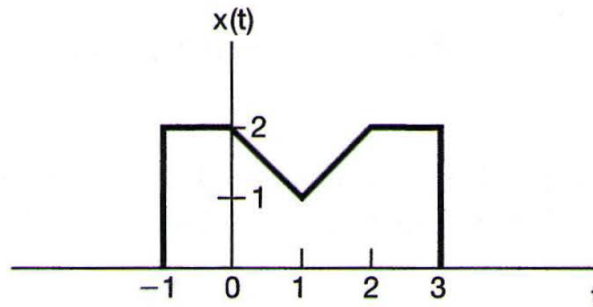
- $s(t) = \frac{\sin(t)}{\pi t} = \frac{\sin(\pi \frac{t}{\pi})}{\pi t} = \frac{\sin(\pi \frac{t}{\pi})}{\pi^2(\frac{t}{\pi})} = \frac{1}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{1}{\pi}t\right) \xleftrightarrow{F} S(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{\frac{1}{\pi}}\right) = \begin{cases} 1, & -\frac{1}{2\pi} < f < \frac{1}{2\pi} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$
- $w(t) = \frac{\sin(2t)}{\pi t} = 2 \frac{\sin(2\pi \frac{t}{\pi})}{2\pi t} = 2 \frac{\sin(2\pi \frac{t}{\pi})}{2\pi^2(\frac{t}{\pi})} = \frac{2}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{2}{\pi}t\right) \xleftrightarrow{F} W(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{\frac{2}{\pi}}\right) = \begin{cases} 1, & -\frac{1}{\pi} < f < \frac{1}{\pi} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$
- $z(t) = \frac{d}{dt}w(t) \xleftrightarrow{F} Z(f) = j2\pi fW(f)$
- $x(t) = s(t) * z(t) \xleftrightarrow{F} X(f) = S(f)Z(f) = j2\pi fW(f)S(f)$

Άρα

$$X(f) = \begin{cases} j2\pi f, & |f| < \frac{1}{2\pi} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (22)$$

Άσκηση 3 - Μετασχηματισμός Fourier και Ιδιότητες - III

Εστω $X(f)$ ο μετασχ. Fourier του σήματος $x(t)$, το οποίο φαίνεται στο Σχήμα 2.

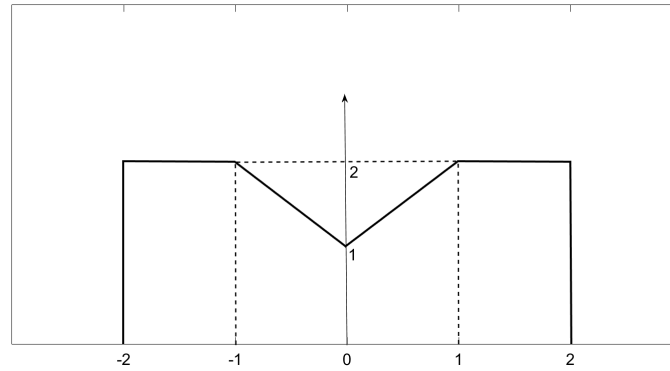


Σχήμα 2: Σήμα $x(t)$ Άσκησης 3.

- (α) Ο μετασχηματισμός μπορεί να γραφεί στη μορφή $A(f)e^{j\Theta(f)}$, με $A(f)$ και $\Theta(f)$ πραγματικές συναρτήσεις. Βρείτε τη $\Theta(f)$.
- (β) Υπολογίστε το $X(0)$.
- (γ) Υπολογίστε το $\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)df$.
- (δ) Υπολογίστε το $\int_{-\infty}^{+\infty} 2X(f) \frac{\sin(2\pi f)}{2\pi f} e^{j4\pi f} df$.
- (ε) Υπολογίστε το $\int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$.

Λύση:

- (α) Αν το $x(t)$ ήταν όπως στο Σχήμα 3 τότε λόγω άρτιας συμμετρίας θα είχε μηδενική ή σταθερή φάση. Η μετατόπιση δεξιά κατά $t_0 = 1$ θα του δώσει φάση $\Theta(f) = -2\pi f$, σύμφωνα με την ιδιότητα της μετατόπισης.
- (β) $X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi \cdot 0 \cdot t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt = \text{Εμβαδό } x(t) = 7$



Σχήμα 3: Μειωτισμένο σχήμα Άσκησης 3.

$$(\gamma) \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)df = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{-j2\pi f \cdot 0} = x(0) = 2$$

$$(\delta) \text{ Έστω } Y(f) = \frac{2 \sin(2\pi f)}{2\pi f} e^{j2\pi f} \xleftrightarrow{F} y(t) = \text{rect}\left(\frac{t+2}{2}\right), \text{ οπότε:}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)Y(f)df = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)Y(f)e^{j2\pi ft}df \Big|_{t=0} \quad (23)$$

$$= F^{-1}\{X(f)Y(f)\} \Big|_{t=0} = x(t) * y(t) \Big|_{t=0} \quad (24)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(-\tau)d\tau = \frac{7}{2} \quad (25)$$

$$(\epsilon) \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt = \frac{38}{3}, \text{ γιατί το τετράγωνο του σήματος γράφεται ως}$$

$$x^2(t) = \begin{cases} 4, & -1 < t < 0 \\ (-t+2)^2, & 0 \leq t < 1 \\ t^2, & 1 \leq t < 2 \\ 4, & 2 \leq t < 3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (26)$$

Ολοκληρώνοντας καταλήγουμε στο ζητούμενο αποτέλεσμα.

Άσκηση 4 - ΓΧΑ συστήματα στο χώρο του Fourier I

Βρείτε την απόκριση σε συχνότητα, $H(f)$, και την κρουστική απόκριση, $h(t)$, του παρακάτω συστήματος.

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 5\frac{d}{dt}y(t) + 6y(t) = -\frac{d}{dt}x(t) \quad (27)$$

Χρησιμοποιήστε την ιδιότητα της παραγώγισης.

Λύση:

Μεταφέροντας τη διαφορική στο χώρο της συχνότητας

$$(j2\pi f)^2 Y(f) + j2\pi f \cdot 5Y(f) + 6Y(f) = -j2\pi f X(f) \quad (28)$$

$$(j2\pi f)^2 Y(f) + j10\pi f Y(f) + 6Y(f) = -j2\pi f X(f) \quad (29)$$

$$Y(f) \left((j2\pi f)^2 + j10\pi f + 6 \right) = -j2\pi f X(f) \quad (30)$$

$$\frac{Y(f)}{X(f)} = H(f) = \frac{-j2\pi f}{(j2\pi f)^2 + j2\pi 5f + 6} \quad (31)$$

Το πολυώνυμο

$$(j2\pi f)^2 + j2\pi 5f + 6 \rightarrow u^2 + 5u + 6$$

παραγοντοποιείται ως

$$(u - u_1)(u - u_2)$$

με

$$u_1, u_2 = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2} = -3, -2$$

άρα

$$u_1 = -3, u_2 = -2$$

Οπότε η (31) γράφεται ως:

$$H(f) = \frac{j2\pi f}{(j2\pi f + 3)(j2\pi f + 2)} \quad (32)$$

Ο βαθμός του παρανομαστή είναι μεγαλύτερος από του αριθμητή άρα μπορούμε να κάνουμε PFE:

$$H(f) = \frac{A}{j2\pi f + 3} + \frac{B}{j2\pi f + 2} \quad (33)$$

με

$$A = \frac{j2\pi f}{(j2\pi f + 3)(j2\pi f + 2)} (j2\pi f + 3) \Big|_{j2\pi f = -3} = -3 \quad (34)$$

και

$$B = \frac{j2\pi f}{(j2\pi f + 3)(j2\pi f + 2)} (j2\pi f + 2) \Big|_{j2\pi f = -2} = 2 \quad (35)$$

Άρα

$$H(f) = -3 \cdot \frac{1}{j2\pi f + 3} + 2 \cdot \frac{1}{j2\pi f + 2}$$

και από γνωστά ζεύγη έχουμε

$$h(t) = -3e^{-3t}u(t) + 2e^{-2t}u(t)$$

Άσκηση 5 - ΓΧΑ συστήματα στο χώρο του Fourier II

Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα το οποίο παράγει έξοδο

$$y(t) = (2e^{-t} - 2e^{-4t})u(t) \quad (36)$$

όταν στην είσοδο εμφανίζεται το σήμα

$$x(t) = (e^{-t} + e^{-3t})u(t) \quad (37)$$

(α) Βρείτε την απόκριση συχνότητας $H(f)$ του συστήματος.

(β) Βρείτε την κρουστική απόκριση του συστήματος, $h(t)$.

(γ) Μπορείτε να βρείτε μια διαφορική εξίσωση που να σχετίζει την παραπάνω είσοδο με την παραπάνω έξοδο;

Λύση:

(α) Ισχύει ότι

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} \quad (38)$$

με

$$Y(f) = \frac{2}{1 + j2\pi f} - \frac{2}{4 + j2\pi f}$$

και

$$X(f) = \frac{1}{1 + j2\pi f} + \frac{1}{3 + j2\pi f} \quad (39)$$

οπότε

$$H(f) = \frac{3(3 + j2\pi f)}{(4 + j2\pi f)(2 + j2\pi f)}$$

μετά από πράξεις.

(β) Είναι

$$h(t) = F^{-1}\{H(f)\} = F^{-1}\left\{\frac{A}{4 + j2\pi f} + \frac{B}{2 + j2\pi f}\right\} \quad (40)$$

με

$$A = \frac{3(3 + j2\pi f)}{(4 + j2\pi f)(2 + j2\pi f)}(4 + j2\pi f) \Big|_{j2\pi f = -4} = \frac{3(3 - 4)}{2 - 4} = \frac{3}{2}$$

και

$$B = \frac{3(3 + j2\pi f)}{(4 + j2\pi f)(2 + j2\pi f)}(2 + j2\pi f) \Big|_{j2\pi f = -2} = \frac{3(3 - 2)}{4 - 2} = \frac{3}{2}$$

άρα

$$H(f) = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{4 + j2\pi f} + \frac{1}{2 + j2\pi f} \right) \xleftrightarrow{F} h(t) = \frac{3}{2} (e^{-4t} + e^{-2t})u(t) \quad (41)$$

(γ) Είναι

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{9 + 3j2\pi f}{8 + 4j2\pi f + 2j2\pi f + (j2\pi f)^2} \quad (42)$$

$$9X(f) + 3j2\pi f X(f) = 8Y(f) + 4j2\pi f Y(f) + 2j2\pi f Y(f) + (j2\pi f)^2 Y(f) \quad (43)$$

Επειδή:

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \xleftrightarrow{F} (j2\pi f)^n X(f)$$

η (43) δίνει:

$$8y(t) + 4\frac{d}{dt}y(t) + 2\frac{d}{dt}y(t) + \frac{d^2}{dt^2}y(t) = 9x(t) + 3\frac{d}{dt}x(t) \quad (44)$$

Άρα η διαφορική εξίσωση είναι η:

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 6\frac{d}{dt}y(t) + 8y(t) = 9x(t) + 3\frac{d}{dt}x(t)$$