1

ΗΥ-215 Φροντιστήριο

$$\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

$$-4\sin^2(x) = 2\cos(2x) - 2 \quad (2)$$

Άσκηση 1

(α') Ο ορισμός είναι: $X(f) = \int_{T_0} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$, που

στην περίπτωσή μας γίνεται:

$$\cos(x) = \frac{e^{jx}+e^{-jx}}{2}$$

$$2\cos(x) = e^{jx}+e^{-jx} \quad (1)$$

$$X(f) = \int_{-T}^{0} A e^{-j2\pi f t}\, dt + \int_{0}^{T} -A e^{-j2\pi f t}\, dt =$$

$$= A\left[\frac{e^{-j2\pi f t}}{-j2\pi f}\right]_{-T}^{0} - A\left[\frac{e^{-j2\pi f t}}{-j2\pi f}\right]_{0}^{T} =$$

$$= A\left(\frac{1}{-j2\pi f} - \frac{e^{+j2\pi f T}}{-j2\pi f}\right) - A\left(\frac{e^{-j2\pi f T}}{-j2\pi f} - \frac{1}{-j2\pi f}\right) =$$

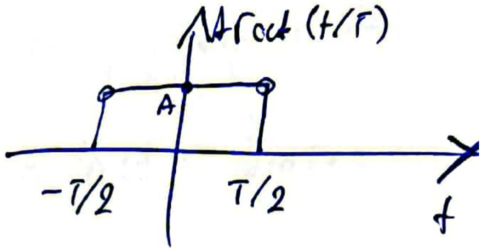
$$= \frac{A}{j2\pi f}\left(-1 + e^{j2\pi f T} + e^{-j2\pi f T} - 1\right) \overset{(1)}{=} \frac{A}{j2\pi f}\left(2\cos(2\pi f T) - 2\right) \overset{(2)}{=}$$

$$\overset{(2)}{=} \frac{-4A\sin^2(\pi f T)}{j2\pi f} = \boxed{\frac{2Aj}{\pi f}\sin^2(\pi f T) = X(f)}$$

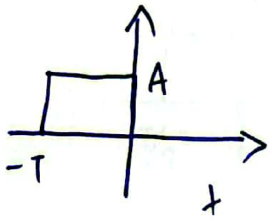
Scanned with CamScanner

(β') Το $x(t)$ είναι ουσιαστικά δύο τετραγωνικοί παλμοί με κέντρα $\pm T/2$ και πλάτος $\pm A$, διάρκειας T. Ο ορισμός του rect είναι:

$$A\,\mathrm{rect}(t/T) = \begin{cases} A, & -T/2 < t < T/2 \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$



Ποια είναι ακριβώς αυτά τα rect που έχουμε στην άσκηση;



$$: \quad A, \quad -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \Leftrightarrow -\frac{T}{2} - \frac{T}{2} < t - \frac{T}{2} < \frac{T}{2} - \frac{T}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{-T < t - \frac{T}{2} < 0}$$, άρα θα είναι το

$$A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t + T/2}{T}\right) = \begin{cases} A, & -T < t + \frac{T}{2} - \frac{T}{2} < 0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$, και

παρόμοια το άλλο $-A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$. Η ιδιότητα εδώ:

$$\boxed{A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t \pm t_0}{T}\right) \overset{F}{\longleftrightarrow} AT\,\mathrm{sinc}(fT)\, e^{\pm j 2\pi f t_0}}$$

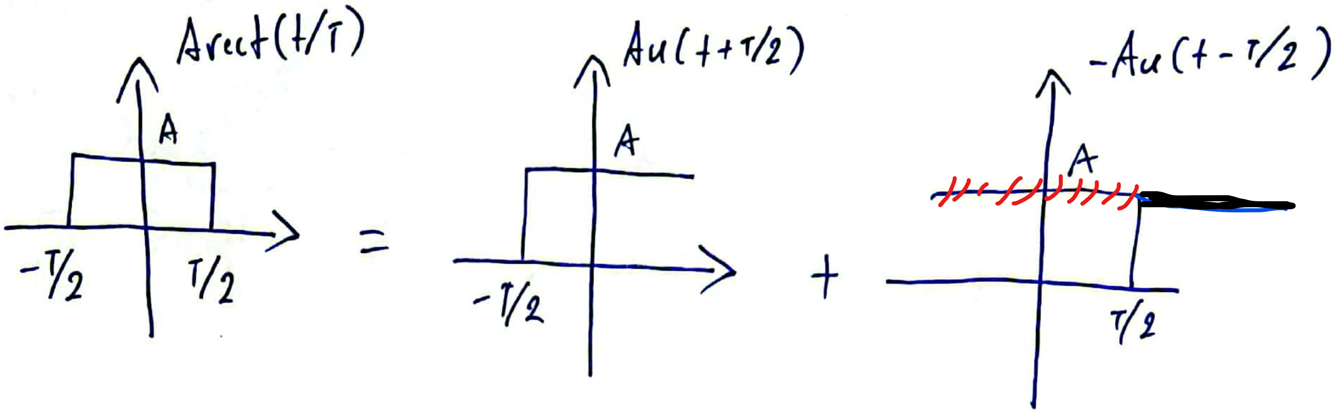
Θα είναι σε εμάς: $x(t) = A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t + T/2}{T}\right) - A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$

$$\downarrow F \qquad\qquad \downarrow F \qquad\qquad \downarrow F$$

$$X(f) = AT\,\mathrm{sinc}(fT)\left(e^{j\pi f T} - e^{-j\pi f T}\right) =$$

$$= AT \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T}\left(2j \sin(\pi f T)\right) = \boxed{\frac{2Aj}{\pi f} \sin^2(\pi f T) = X(f)}$$

δ') Για να χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα της παραγώγισης πρέπει να παραγωγίσουμε το σήμα μας $x(t)$. Εάν δεν ξέρουμε απ' έξω την παράγωγο του rect, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την παράγωγο της βηματικής $\frac{d}{dt}u(t) = \delta(t)$, διότι:



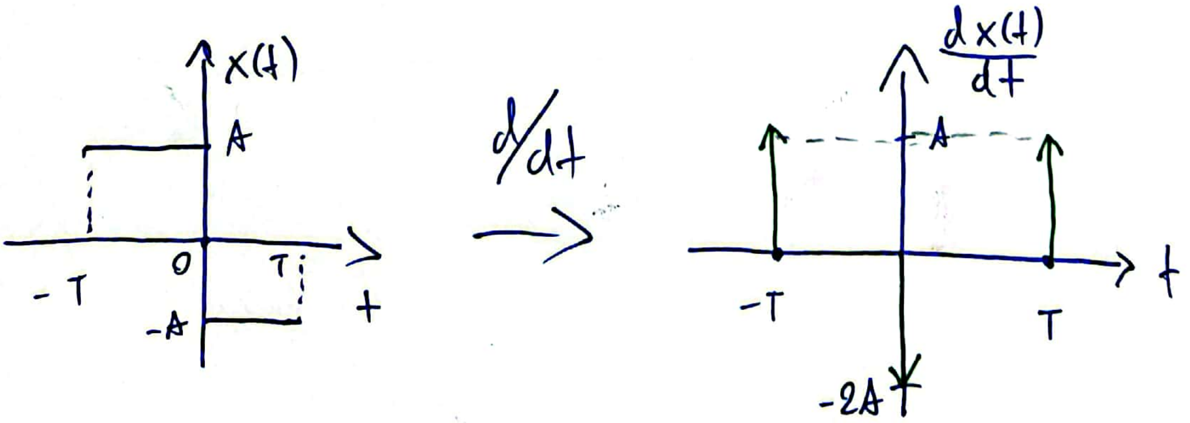
Άρα αφού: $A\mathrm{rect}(t/T) = Au(t+T/2) - Au(t-T/2)$:

$$A\mathrm{rect}\left(\frac{t+T/2}{T}\right) = Au(t+T) - Au(t)$$

$$-A\mathrm{rect}\left(\frac{t-T/2}{T}\right) = -Au(t) + Au(t-T)$$

το $x(t)$ είναι η πρόσθεση των δύο

οπότε: $$\boxed{\frac{d}{dt}x(t) = A\delta(t+T) - 2A\delta(t) + A\delta(t-T)}$$



Δηλ. ως αποτέλεσμα παίρνουμε δύο συναρτήσεις δέλτα για κάθε τετραγωνικό παλμό.

$$\delta(t \pm t_0) \overset{F}{\longleftrightarrow} e^{\pm j2\pi f t_0}$$

→ Ιδιότητα παραγώγισης στο χρόνο:

(3), $$\frac{dx(t)}{dt} \overset{F}{\longleftrightarrow} j2\pi f \cdot X(f)$$, άρα:

$$A\delta(t+T) - 2A\delta(t) + A\delta(t-T) \overset{F}{\longleftrightarrow}$$

$$A e^{j2\pi f T} - 2A \underbrace{e^{j2\pi f}}_{=1} + A e^{-j2\pi f T} = A\left(e^{j2\pi f T} + e^{-j2\pi f T}\right) - 2A =$$

$$\left(1 : e^{j\pi} + 1 = 0 \Leftrightarrow e^{j\pi} = -1 \Leftrightarrow e^{j2\pi} = 1 \Leftrightarrow e^{j2\pi f} = 1 \right)$$

$$= 2A\cos(2\pi f T) - 2A = -4A\sin^2(\pi f T)$$, δηλ:

$$F\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = -4A\sin^2(\pi f T) \overset{(3)}{=} j2\pi f \cdot X(f) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{X(f) = \frac{2Aj}{\pi f}\sin^2(\pi f T)}$$ όμοιο με (α'), (β')

Άσκηση 3

(α') $x(t) = \sin(2\pi t)e^{-t}u(t)$, Ιδιότητα/Ζεύγος:

$$\boxed{\sin(2\pi f_0 t)e^{-at}u(t),\ a>0 \ \overset{F}{\longleftrightarrow}\ \frac{2\pi f_0}{(a+j2\pi f)^2+4\pi^2 f_0^2}}$$

Έχουμε $a=1$, και $f_0=1$ οπότε:

$$X(f) = \frac{2\pi}{(1+j2\pi f)^2+4\pi^2}$$

(β') $x(t) = t\cdot e^{-3|t-1|}$, Ζεύγος:

$$\boxed{\begin{aligned} &e^{-a|t|},\ \mathrm{Re}\{a\}>0 \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{2a}{a^2+4\pi^2 f^2} \\ &y(t-t_0) \overset{F}{\longleftrightarrow} Y(f)\cdot e^{-j2\pi f t_0} \\ &t\cdot y(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} \left(\frac{d}{df}X(f)\right)\frac{j}{2\pi} \end{aligned}}$$

, και ιδιότητες

$a=3$
$t_0=1$

$$X(f) = \frac{j}{2\pi}\cdot\frac{d}{df}\left(\frac{6}{9+4\pi^2 f^2}\cdot e^{-j2\pi f}\right) = \dots =$$

$$= \frac{j}{2\pi}\cdot\left(-\frac{12j\pi e^{-j2\pi f}}{9+4\pi^2 f^2} - \frac{48\pi^2 f e^{-j2\pi f}}{(9+4\pi^2 f^2)^2}\right)$$

(γ') $x(t) = \dfrac{2\sin(3\pi t)}{\pi t} \cdot \dfrac{\sin(2\pi t)}{\pi t}$

$$= 6 \cdot \frac{\sin(3\pi t)}{3\pi t} \cdot 2\,\frac{\sin(2\pi t)}{2\pi t}$$

$$\underline{= 12\,\mathrm{sinc}(3t)\,\mathrm{sinc}(2t) = x(t)}$$

Ιδιότητα:
$x(t) \rightarrow x(-f)$
Ζεύγη:
$\mathrm{sinc} \longleftrightarrow \mathrm{rect}$

$AT\,\mathrm{sinc}(tT) \overset{F}{\longleftrightarrow} A\,\mathrm{rect}(-f/T)$, άρα:

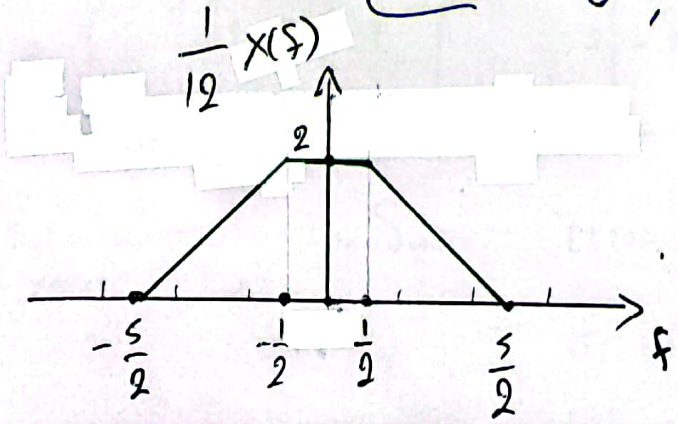
$\mathrm{sinc}(3t) \overset{F}{\longleftrightarrow} \mathrm{rect}(-f/3)$, και

$\mathrm{sinc}(2t) \overset{F}{\longleftrightarrow} \mathrm{rect}(-f/2)$, άρα:

$$X(f) = 12\,\mathrm{rect}(-f/3) * \mathrm{rect}(-f/2)$$

$$= 12\,\mathrm{rect}(f/3) * \mathrm{rect}(f/2)$$

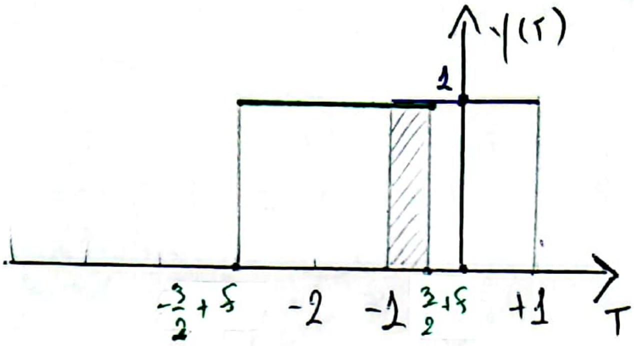
$$= \dots = 12 \cdot \begin{cases} f + 5/2, & -5/2 < f < -1/2 \\ 2, & -1/2 < f < 1/2 \\ -f + 5/2, & 1/2 < f < 5/2 \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$



Ακολουθεί ο υπολογισμός της συνέλιξης $\mathrm{rect}(f/3) * \mathrm{rect}(f/2)$

$$C_{xy} = rect(f/3) * rect(f/2) = \int_{-\infty}^{+\infty} rect(\tau/2)\, rect\left(\frac{f-\tau}{3}\right) d\tau$$

1η περίπτωση:



$$-1 < 1.5 + f < 1 \iff$$
$$-2.5 < f < -0.5$$

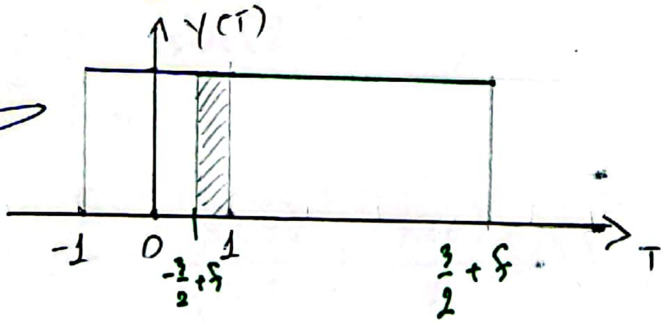
$$C_{xy} = \int_{-1}^{1.5+f} 1\, d\tau = \Big[\tau\Big]_{-1}^{1.5+f} = \boxed{f + 5/2, \quad -\frac{5}{2} < f < -\frac{1}{2}}$$

2η περίπτωση:

$$1.5 + f > 1 \iff f > -0.5$$
$$-1.5 + f < -1 \iff f < 0.5$$

$$C_{xy} = \int_{-1}^{1} 1\, d\tau = \boxed{2, \quad -\frac{1}{2} < f < \frac{1}{2}}$$

3η περίπτωση:



$$-1 < -1.5 + f < 1 \iff$$
$$0.5 < f < 2.5$$

$$C_{xy} = \int_{-1.5+f}^{1} 1\, d\tau = \Big[\tau\Big]_{-1.5+f}^{1} = \boxed{-f + \frac{5}{2}, \quad \frac{1}{2} < f < \frac{5}{2}}$$

4η περίπτωση: Οποιοδήποτε εκτός των παραπάνω διαστημάτων:

$C_{xy} = 0$, σε κάθε άλλη περίπτωση.

$$x(t) = \frac{d}{dt}\left(t\, e^{-2t} \sin(t)\, u(t)\right) = \frac{d}{dt}\left(t\, e^{-2t} u(t) \left(\frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2j} \underbrace{\frac{d}{dt}}_{\overset{F}{\longleftrightarrow}\; X(f)\, j2\pi f} \Big(\underbrace{t \cdot e^{-2t} u(t)}_{\overset{F}{\longleftrightarrow}\; \frac{1}{(2+j2\pi f)^2}} \cdot \underbrace{e^{jt}}_{\overset{F}{\longleftrightarrow}\; \delta\left(f - \frac{1}{2\pi}\right)} - t\, e^{-2t} u(t) \cdot e^{-jt} \Big)$$

$$X(f) = \frac{\cancel{j}2\pi f}{2\cancel{j}} \left(\frac{1}{\left(2 + j2\pi\left(f - \frac{1}{2\pi}\right)\right)^2} - \frac{1}{\left(2 + j2\pi\left(f + \frac{1}{2\pi}\right)\right)^2} \right)$$

(ε') $$x(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{\sin(2\pi\tau)}{\pi\tau}\, d\tau = 2\int_{-\infty}^{t} \frac{\sin(2\pi\tau)}{2\pi\tau}\, d\tau =$$

$$= 2\int_{-\infty}^{t} \mathrm{sinc}(2\tau)\, d\tau$$, άρα θα χρησιμοποιήσουμε:

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{X(0)}{2}\delta(f)$$, $$\mathrm{sinc}(2\tau) \overset{F}{\longleftrightarrow} \mathrm{rect}\left(-\frac{f}{2}\right) =$$

$$= \mathrm{rect}(f/2) = \begin{cases} 1, & -1 < f < 1 \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$, άρα:

$$\boxed{X(f) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & f = 0 \\ \frac{1}{j2\pi f}, & f \in (-1,1) - \{0\} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}}$$

Scanned with CamScanner

(στ') $x(t) = e^{-t+2} u(t-2)$, θα χρησιμοποιήσουμε:

$$e^{-t} u(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1+j2\pi f}, \quad s(t-t_0) \overset{F}{\longleftrightarrow} e^{-j2\pi f t_0} S(f)$$

↳ σε εμάς $t_0 = 2$

$$X(f) = e^{-j4\pi f} \cdot \frac{1}{1+j2\pi f}$$

$$\operatorname{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

$$\frac{1}{\pi}\operatorname{sinc}(t/\pi) = \frac{\sin(t)}{\pi t} \checkmark$$

$$\frac{2}{\pi}\operatorname{sinc}(2t/\pi) = \frac{\sin(2t)}{\pi t} \checkmark$$

(ζ') $x(t) = \dfrac{\sin(t)}{\pi t} * \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\sin(2t)}{\pi t}\right)$

- $AT \operatorname{sinc}(tT) \overset{F}{\longleftrightarrow} A \operatorname{rect}(f/T)$
- $\dfrac{\sin(t)}{\pi t} = \dfrac{1}{\pi}\operatorname{sinc}(t/\pi) \overset{F}{\longleftrightarrow} \operatorname{rect}(\pi f)$
- $\dfrac{\sin(2t)}{\pi t} = \dfrac{2}{\pi}\operatorname{sinc}(2t/\pi) \overset{F}{\longleftrightarrow} \operatorname{rect}(\pi f/2)$, άρα:

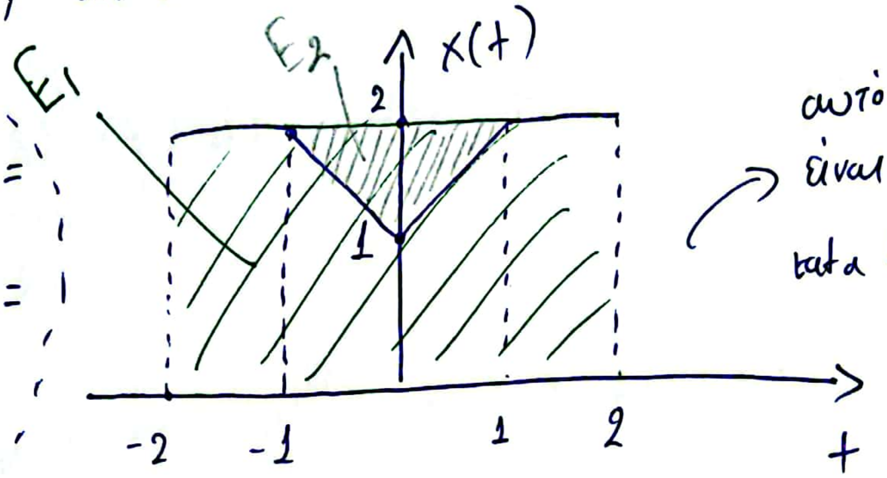
$$X(f) = \operatorname{rect}(\pi f) \cdot j2\pi f \cdot \operatorname{rect}(\pi f/2) =$$

$$= j2\pi f \operatorname{rect}(\pi f) = \begin{cases} j2\pi f, & -\frac{1}{2\pi} < f < \frac{1}{2\pi} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Άσκηση 4

(α') Ουσιαστικά το εκθετικό $e^{j\theta(f)}$ υποδηλώνει μετατόπιση από τις γνωστές ιδιότητες: $x(t-t_0) \xleftrightarrow{F} \underbrace{X(f)}_{A(f)} \cdot \underbrace{e^{-j2\pi f t_0}}_{e^{j\theta(f)}}$,

και όντως, αν αυτό ήταν το αρχικό:



$E = E_1 - E_2 =$

$= 4 \cdot 2 - \frac{2 \cdot 1}{2} =$

$= 8 - 1 = 7$

αυτό της άσκησης είναι μετατοπισμένο κατά $t_0 = 1$.

στο Fourier

$X(f) \cdot e^{-j2\pi f}$

Άρα $\theta(f) = -2\pi f$.

(β') $X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$, άρα για $f = 0$:

$$X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{0}\, dt = \int_{-2}^{2} x(t)\, dt = E = 7$$

(γ') $\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, df$ = αντίστροφος μετ/χ. Fourier για $t=0$?

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{+j2\pi f \cdot 0}\, df = x(0) = 2$$

δ') $\Delta = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{2X(f)\,\frac{\sin(2\pi f)}{2\pi f}\, e^{j4\pi f}}_{Y(f)}\, df$

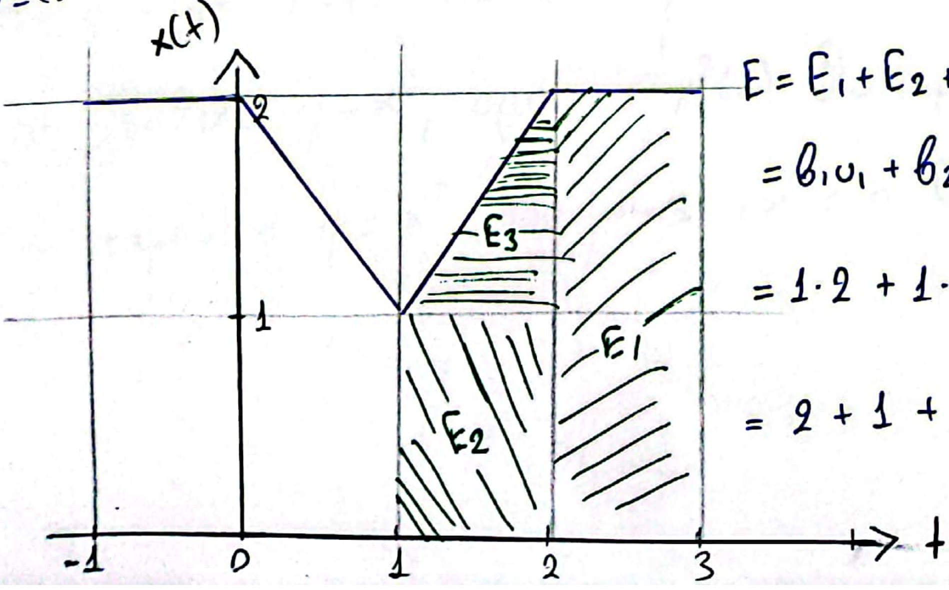
$$Y(f) = 2\,\mathrm{sinc}(2f)\cdot e^{j\pi f 4} \xleftrightarrow{F^{-1}} \mathrm{rect}\left(\frac{t+2}{2}\right)$$

• $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{X(f)\,Y(f)}_{H(f)}\, df =$ πάλι μπορούμε να πούμε ότι είναι ο F^{-1} για $t=0$?

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)Y(f)\cdot e^{j2\pi f\cdot 0}\, df = \Big[x(t) * y(t)\Big]_{t=0} =$$

$$= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,y(t-\tau)\, d\tau\right]_{t=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,y(-\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,\mathrm{rect}\left(\frac{-\tau+2}{2}\right) d\tau = \int_{1}^{3} x(\tau)\, d\tau = E = \frac{7}{2}$$, όπου:



$$E = E_1 + E_2 + E_3 =$$

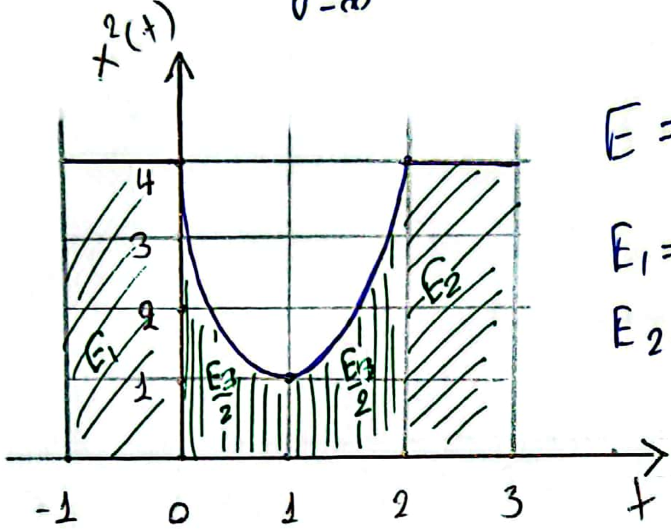
$$= b_1 u_1 + b_2 u_2 + \frac{b_3 u_3}{2} =$$

$$= 1\cdot 2 + 1\cdot 1 + \frac{1\cdot 1}{2} =$$

$$= 2 + 1 + \frac{1}{2} = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$$

ι) Από το θεώρημα του Parseval θα είναι:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-1}^{3} x^2(t)\, dt = E, \text{ όπου:}$$



$E = E_1 + E_2 + E_3$, με:

$E_1 = b_1 \cdot u_1 = 1 \cdot 4 = 4$,

$E_2 = b_2 u_2 = 1 \cdot 4 = 4$, και:

$$E_3^{(*)} = 2\int_1^2 x^2 dx = 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = 2\left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{14}{3}, \text{ άρα:}$$

$$E = 4 + 4 + \frac{14}{3} = \frac{12+12+14}{3} = \boxed{\frac{38}{3} = E}$$ η απάντηση.

(*) Αρχικά το $x(t)$ στο διάστημα $(1,2)$ περιγράφεται από την ευθεία $y=x$, άρα το $x^2(t)$ θα περιγράφεται από την καμπύλη $y=x^2$. Παρομοίως και στο $(0,1)$.

$$\frac{d^n}{dt^n}x(t) \xleftrightarrow{F} (j2\pi f)^n X(f)$$

Άσκηση 2.1

A) $$\frac{d^2}{dt^2}y_1(t) + 5\frac{d}{dt}y_1(t) + 6y_1(t) = -\frac{d}{dt}x_1(t)$$

F

$$(j2\pi f)^2 Y_1(f) + 5(j2\pi f)Y_1(f) + 6Y(f) = -j2\pi f\, X_1(f) \Leftrightarrow$$

$$Y_1(f)\left((j2\pi f)^2 + j10\pi f + 6\right) = -j2\pi f\, X_1(f) \Leftrightarrow$$

$$\frac{Y_1(f)}{X_1(f)} = \boxed{\frac{-j2\pi f}{(j2\pi f)^2 + j10\pi f + 6} = H_1(f)}$$

↳ Για να βρούμε το $F^{-1}\{H_1(f)\} = h_1(t)$, πρέπει να σπάσουμε το $H_1(f)$ σε απλούστερα (πιθανόν γνωστά) σήματα. Θέτω $u = j2\pi f$, άρα ο παρανομαστής γίνεται:

$u^2 + 5u + 6$, με ρίζες: $u_1, u_2 = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4\cdot 6}}{2}$ → $u_1 = -3$, $u_2 = -2$

Άρα το $H_1(f)$ μπορεί να γραφεί ως:

$$H_1(u) = \frac{-u}{(u+3)(u+2)} = \frac{A}{u+3} + \frac{B}{u+2} \Leftrightarrow$$

$-u = A(u+2) + B(u+3)$

- Για $u = -2$: $2 = A(0) + B(1) \Leftrightarrow B = 2$
- Για $u = -3$: $3 = A\cdot(-1) + B(0) \Leftrightarrow A = -3$

Άρα θα είναι με $a = j2\pi f$, $A = -3$, $B = 2$:

για $a = 3$
και $a = 2$

$$H_1(f) = 2 \cdot \frac{1}{j2\pi f + 2} - 3 \cdot \frac{1}{j2\pi f + 3}$$

↳ Είναι το γνωστό ζεύγος $e^{-at} u(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{1}{j2\pi f + a}$, $Re\{a\} > 0$

$$F^{-1}\{H_1(f)\} = \boxed{h_1(t) = 2e^{-2t} u(t) - 3e^{-3t} u(t)}$$

B.) $h_2 = e^{-3t} u(t)$ σαν διαφορική : είναι ουσιαστικά η αντίστροφη διαδικασία από το A) :

$$H_2(f) = F\{e^{-3t} u(t)\} \overset{a=3}{\Rightarrow} H_2(f) = \frac{1}{j2\pi f + 3} \Leftrightarrow \frac{Y_2(f)}{X_2(f)} = \frac{1}{j2\pi f + 3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Y_2(f)(j2\pi f + 3) = X_2(f) \Leftrightarrow j2\pi f \cdot Y_2(f) + 3Y_2(f) = X_2(f)$$

ιδιότητα παραγ. $\downarrow F^{-1}$

$$\boxed{\frac{d}{dt} y_2(t) + 3y(t) = x(t)}$$

Άσκηση 2.3

$$e^{-at}u(t) \overset{F}{\Updownarrow} \frac{1}{j2\pi f + a},\ Re\{a\} > 0$$

ΓΧΑ : $x(t) = e^{-t}u(t) + e^{-3t}u(t)$

$y(t) = 2e^{-t}u(t) - 2e^{-4t}u(t)$

(α') Θα είναι: $H(f) = \dfrac{Y(f)}{X(f)}$, οπότε από γνωστή σχέση:

$$Y(f) = F\{y(t)\} = \frac{2}{j2\pi f + 1} - \frac{2}{j2\pi f + 4}$$, και

$$X(f) = F\{x(t)\} = \frac{1}{j2\pi f + 1} + \frac{1}{j2\pi f + 3}$$, άρα:

$$H(f) = \frac{\dfrac{2}{j2\pi f+1} - \dfrac{2}{j2\pi f+4}}{\dfrac{1}{j2\pi f+1} + \dfrac{1}{j2\pi f+3}}$$, θέτω $a = j2\pi f$:

$$H(a) = \frac{\dfrac{2}{a+1} - \dfrac{2}{a+4}}{\dfrac{1}{a+1} + \dfrac{1}{a+3}} = \frac{\dfrac{2(a+4) - 2(a+1)}{(a+1)(a+4)}}{\dfrac{(a+3) + (a+1)}{(a+1)(a+3)}} =$$

$$= \frac{(\cancel{2a}+8-\cancel{2a}-2)}{(\cancel{a+1})(a+4)} \cdot \frac{(\cancel{a+1})(a+3)}{2a+4} =$$

$$= \frac{6(u+3)}{2(u+4)(u+2)} \Rightarrow \boxed{H(f) = \frac{3(j2\pi f+3)}{(j2\pi f+4)(j2\pi f+2)}}$$

(β') Θέλουμε το $\mathcal{F}^{-1}\{H(f)\} = h(t)$

$$H(u) = \frac{3(u+3)}{(u+4)(u+2)} = \frac{A}{u+4} + \frac{B}{u+2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3(u+3) = A(u+2) + B(u+4)$$

- Για $u=-2$: $3 = A\cdot(0) + B(2) \Leftrightarrow \underline{B = 3/2}$
- Για $u=-4$: $-3 = A(-2) + B\cdot(0) \Leftrightarrow \underline{A = 3/2}$, άρα:

$$H(f) = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{j2\pi f+4} + \frac{1}{j2\pi f+2}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-2}}$$

$$\boxed{h(t) = \frac{3}{2}\left(e^{-4t} + e^{-2t}\right)u(t)}$$

Διαφορική για $y(t)$, $x(t)$: αντίστροφη διαδικασία:

$$\frac{Y(f)}{X(f)} = H(f) = \frac{3(3+j2\pi f)}{(4+j2\pi f)(2+j2\pi f)} \quad , \quad u = j2\pi f :$$

$$\left\{ \frac{d^n}{dt^n}x(t) \xleftrightarrow{F} (j2\pi f)^n X(f) \right\}$$

$$Y(u)(4+u)(2+u) = X(u)\, 3(3+u) \iff$$

$$(4Y(u) + uY(u))(2+u) = X(u)(9+3u) \iff$$

$$8Y(u) + 2uY(u) + 4uY(u) + u^2Y(u) = 9X(u) + 3uX(u) \xRightarrow{u=j2\pi f}$$

$$(j2\pi f)^2 Y(f) + 6(j2\pi f)Y(f) + 8Y(f) = 3(j2\pi f)X(f) + 9X(f)$$

$$\Big\updownarrow F^{-1}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 6\frac{d}{dt}y(t) + 8y(t) = 3\frac{d}{dt}x(t) + 9x(t)$$

ΤΕΛΟΣ