ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2024-25
Διδάσκων: Γ. Καφεντζής

4ο Φροντιστήριο

Ασκηση 1

Ενα πραγματικό περιοδικό σήμα όταν αναπτυχθεί σε εκθετική σειρά Fourier έχει συντελεστές

$$[\,X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\,] = [\,2e^{-j\pi/5}, \sqrt{3}e^{j\pi/4}, 2e^{j\pi/12}, \sqrt{3}e^{-j\pi/5}, e^{j\pi/3}\,] \tag{1}$$

Πόση είναι η ισχύς P_x του σήματος; Τι ποσοστό της συνολικής ισχύος του σήματος οφείλεται στον πρώτο όρο της τριγωνομετρικής (ή μονόπλευρης) αναπαράστασής του σε Σειρά Fourier (δηλ. στο πρώτο ημίτονο - $k = 1$);

Λύση:

Γνωρίζουμε ότι η ισχύς δίνεται ως

$$P_x = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 \tag{2}$$

Μας δίνονται μόνο οι συντελεστές για $k > 0$ αλλά εφ'όσον το σήμα είναι πραγματικό, για $k < 0$ θα είναι οι συζυγείς τους, και μάλιστα $|X_k| = |X^*_{-k}|$. Από τη δεύτερη σχέση έχουμε

$$P_x = 2\Big[|2e^{-j\pi/5}|^2 + |\sqrt{3}e^{j\pi/4}|^2 + |2e^{j\pi/12}|^2 + |\sqrt{3}e^{-j\pi/5}|^2 + |e^{j\pi/3}|^2\Big] = 2(4+3+4+3+1) = 2\times 15 = 30 \tag{3}$$

Στο πρώτο ημίτονο αντιστοιχούν οι συντελεστές $X_1, X_{-1} = X_1^*$, οπότε για αυτά η ισχύς τους είναι $4 + 4 = 8$, άρα το ποσοστό είναι $8/30 \approx 26\%$.

Ασκηση 2

Λύστε την εξίσωση

$$2\cos(2\pi 100t + \pi/3) + \cos(2\pi 100t + \pi/4) = A\cos(2\pi f_0 t + \phi) - 3\cos(2\pi 100t - \pi/4) \tag{4}$$

ως προς το άγνωστο ημίτονο.

Λύση:

Έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned}
2\cos(2\pi 100t + \pi/3) + \cos(2\pi 100t + \pi/4) &= A\cos(2\pi f_0 t + \phi) - 3\cos(2\pi 100t - \pi/4) && (5)\\
A\cos(2\pi f_0 t + \phi) &= 2\cos(2\pi 100t + \pi/3) + \cos(2\pi 100t + \pi/4) + 3\cos(2\pi 100t - \pi/4) && (6)\\
\Re\{Ae^{j\phi}e^{j2\pi f_0 t}\} &= \Re\{2e^{j\pi/3}e^{j2\pi 100t} + e^{j\pi/4}e^{j2\pi 100t} + 3e^{-j\pi/4}e^{j2\pi 100t}\} && (7)\\
&= \Re\{(2e^{j\pi/3} + e^{j\pi/4} + 3e^{-j\pi/4})e^{j2\pi 100t}\} && (8)\\
&= \Re\{(a + jb)e^{j2\pi 100t}\} && (9)
\end{aligned}$$

με

$$a = 2\cos(\pi/3) + \cos(\pi/4) + 3\cos(-\pi/4) = 2\cos(\pi/3) + 4\cos(\pi/4) = 1 + 2\sqrt{2} \tag{10}$$

$$b = 2\sin(\pi/3) + \sin(\pi/4) + 3\sin(-\pi/4) = 2\sin(\pi/3) - 2\sin(\pi/4) = \sqrt{3} - \sqrt{2} \tag{11}$$

Οπότε

$$a + jb = (1 + 2\sqrt{2}) + j(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 3.8284 + j0.3178 = 3.8416e^{j0.0263\pi} \tag{12}$$

Οπότε

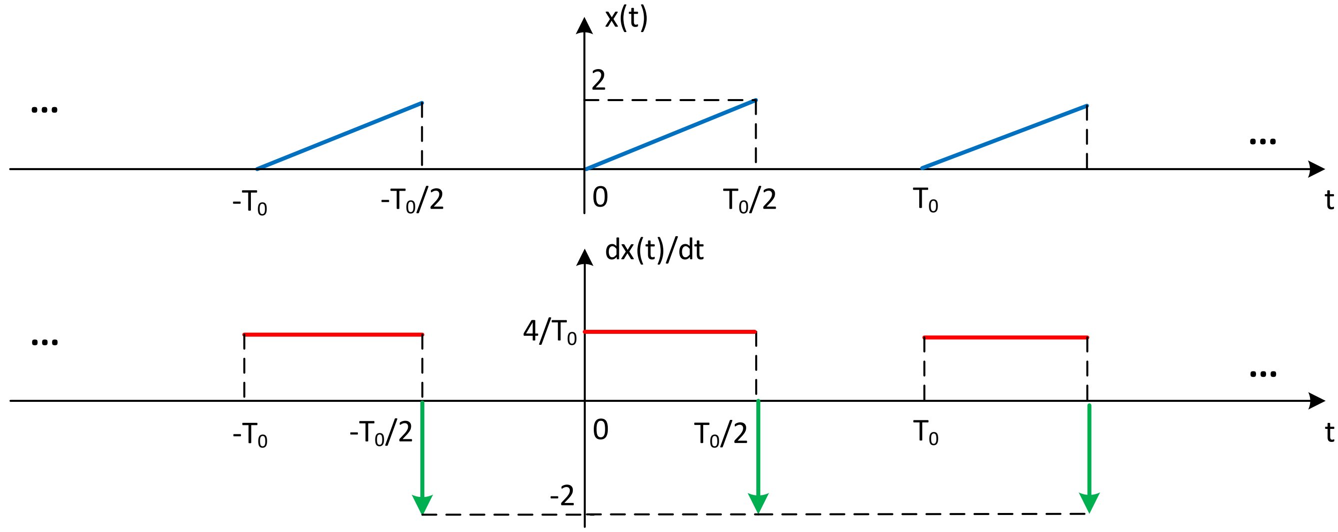
$$A\cos(2\pi f_0 t + \phi) = \Re\{3.8416e^{j0.0263\pi}e^{j2\pi 100t}\} \tag{13}$$
$$= 3.8416\cos(2\pi 100t + 0.0263\pi) \tag{14}$$

Ασκηση 3

Για το περιοδικό σήμα $x(t)$ το οποίο φαίνεται στο Σχήμα 1(επάνω μέρος), δείξτε ότι οι συντελεστές της εκθετικής Σειράς Fourier του δίνονται ως

$$X_k = \begin{cases} \frac{2}{\pi^2 k^2}e^{-j\pi} + \frac{1}{\pi k}e^{-j\pi/2}, & k \text{ περιττό} \\ \frac{1}{\pi k}e^{j\pi/2}, & k \text{ άρτιο} \end{cases} \tag{15}$$

με $k \neq 0$. Συνίσταται να χρησιμοποιήσετε ιδιότητες.



Σχήμα 1: *Σήμα $x(t)$ και παράγωγός του $\frac{d}{dt}x(t)$ Άσκησης 3.*

Λύση:

Παραγωγίζοντας το σήμα στο χρόνο θα έχουμε το περιοδικό σήμα του Σχήματος 1(κάτω μέρος). Αυτό μπορούμε εύκολα να το διασπάσουμε σε δυο υποσήματα, $dx_1(t)/dt$ και $dx_2(t)/dt$. Το πρώτο είναι μια σειρά παλμών με πλάτος $4/T_0$ και το δεύτερο μια σειρά συναρτήσεων Δέλτα με τιμή -2. Έχουμε

$$X_{k_1} = \frac{4}{T_0}\frac{1}{\pi k}e^{-j\pi/2}, \ k \text{ περιττά} \ = \frac{4}{\pi k T_0}e^{-j\pi/2}, \ k \text{ περιττά} \tag{16}$$

από το τυπολόγιο. Το δεύτερο σήμα έχει συντελεστές

$$X_{k_2} = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}(-2\delta(t - T_0/2))e^{-j2\pi k f_0 t}dt = -\frac{2}{T_0}e^{-j2\pi k f_0 T_0/2} = -\frac{2}{T_0}e^{-j\pi k} = -\frac{2}{T_0}(-1)^k \ \forall k \tag{17}$$

από το τυπολόγιο και τις ιδιότητες της συνάρτησης Δέλτα. Συνολικά

$$X_d = X_{k_1} + X_{k_2} = \begin{cases} \frac{4}{\pi k T_0} e^{-j\pi/2} + \frac{2}{T_0}, & k \text{ περιττά} \\ \\ -\frac{2}{T_0}, & k \text{ άρτια} \end{cases} \tag{18}$$

Από την ιδιότητα της ολοκλήρωσης, μπορούμε να βρούμε τους συντελεστές του αρχικού σήματος, ως

$$X_k = \begin{cases} \frac{1}{j2\pi k f_0}\left(\frac{4}{\pi k T_0} e^{-j\pi/2} + \frac{2}{T_0}\right), & k \text{ περιττά} \\ \\ -\frac{1}{j2\pi k f_0}\frac{2}{T_0}, & k \text{ άρτια} \end{cases} = \begin{cases} \frac{2}{j\pi^2 k^2} e^{-j\pi/2} + \frac{1}{j\pi k}, & k \text{ περιττά} \\ \\ -\frac{1}{j\pi k}, & k \text{ άρτια} \end{cases} \tag{19}$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{\pi^2 k^2} e^{-j\pi} + \frac{1}{\pi k} e^{-j\pi/2}, & k \text{ περιττά} \\ \\ \frac{1}{\pi k} e^{j\pi/2}, & k \text{ άρτια} \end{cases} \tag{20}$$

Λύσεις με τον ορισμό ή με άλλη διάσπαση είναι αποδεκτές αλλά η παραπάνω λύση είναι η ευκολότερη.

Ασκηση 4

Αναπτύξτε σε εκθετική Σειρά Fourier το σήμα:

$$x(t) = [6 + 2\cos(2\pi 5t)]\,\cos(2\pi 100 t)$$

και σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης του.

Λύση:

Είναι

$$x(t) = [6 + 2\cos(2\pi 5t)]\,\cos(2\pi 100t) = 6\cos(2\pi 100t) + 2\cos(2\pi 5t)\cos(2\pi 100t) \tag{21}$$

$$= 3e^{j2\pi 100t} + 3e^{-j2\pi 100t} + \left(e^{j2\pi 5t} + e^{-j2\pi 5t}\right)\left(\frac{1}{2}e^{j2\pi 100t} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi 100t}\right) \tag{22}$$

$$= 3e^{j2\pi 100t} + 3e^{-j2\pi 100t} + \frac{1}{2}e^{j2\pi 5t}e^{j2\pi 100t} + \frac{1}{2}e^{j2\pi 5t}e^{-j2\pi 100t} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi 5t}e^{j2\pi 100t} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi 5t}e^{-j2\pi 100t} \tag{23}$$

$$= 3e^{j2\pi 100t} + 3e^{-j2\pi 100t} + \frac{1}{2}e^{j2\pi 105t} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi 95t} + \frac{1}{2}e^{j2\pi 95t} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi 105t} \tag{24}$$

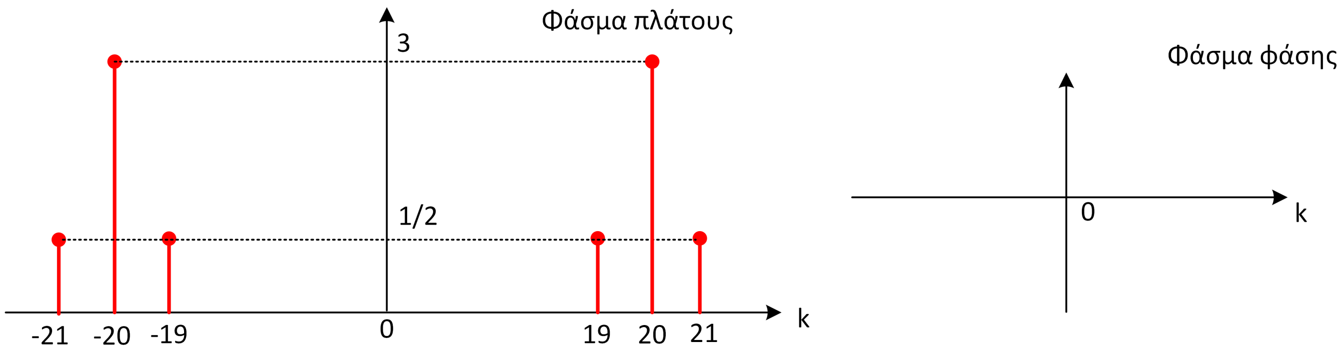
Η θεμελιώδης συχνότητα του σήματος είναι

$$f_0 = \text{Μ.Κ.Δ}\{100, 105, 95\} = 5 \text{ Hz} \tag{25}$$

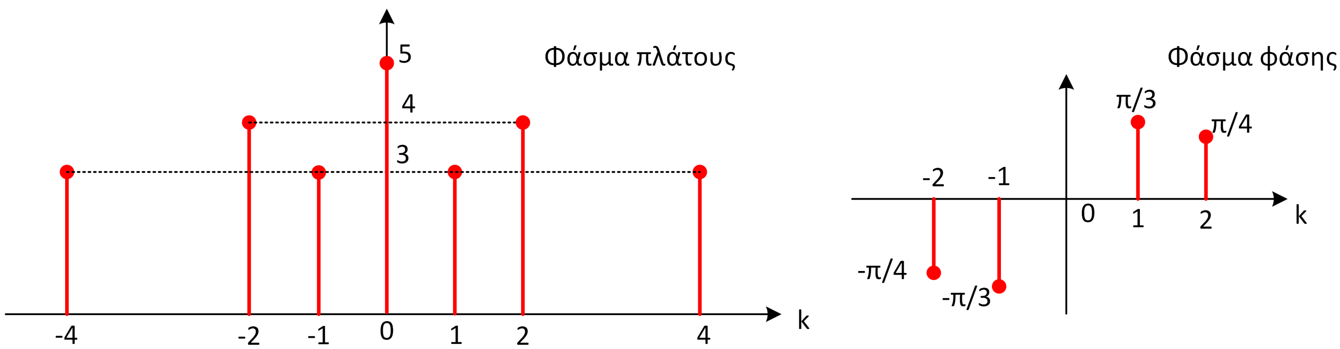
άρα όλες οι συχνότητες παραπάνω θα είναι ακέραια πολλαπλάσιά της. Τα φάσματα φαίνονται στο Σχήμα 2.

Ασκηση 5

Αναπτύξτε σε τριγωνομετρική (ή μονόπλευρη) Σειρά Fourier το σήμα του οποίου το φάσμα πλάτους και φάσης της εκθετικής Σειράς Fourier φαίνεται στο παρακάτω Σχήμα 3.



Σχήμα 2: *Φάσματα Άσκησης 4.*



Σχήμα 3: *Φάσματα άσκησης 5.*

<u>Λύση</u>:
Έχουμε

$$x(t) = 5 + 3e^{j\pi/3}e^{j2\pi f_0 t} + 4e^{j\pi/4}e^{j2\pi 2 f_0 t} + 3e^{j2\pi 4 f_0 t} + 3e^{-j\pi/3}e^{-j2\pi f_0 t} + 4e^{-j\pi/4}e^{-j2\pi 2 f_0 t} + 3e^{-j2\pi 4 f_0 t} \tag{26}$$

$$= 5 + 6\cos(2\pi f_0 t + \pi/3) + 8\cos(2\pi 2 f_0 t + \pi/4) + 6\cos(2\pi 4 f_0 t) \tag{27}$$

η οποία αποτελεί και τη ζητούμενη τριγωνομετρική Σειρά Fourier.

Ασκηση 6
Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{t} \cos(\tau)u(\tau)d\tau$
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{t} \cos(\tau)\delta(\tau)d\tau$
3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(t)u(t-1)\delta(t)dt$
4. $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} t\sin(t/2)\delta(\pi - t)dt$

Λύση:

1. Αφού $u(t) = 1,\ t > 0$, έχουμε

$$\int_{-\infty}^{t} \cos(\tau)u(\tau)d\tau = \int_{0}^{t} \cos(\tau)\cdot 1\, d\tau = \sin(t) \tag{28}$$

οπότε

$$\int_{-\infty}^{t} \cos(\tau)u(\tau)d\tau = \begin{cases} \sin(t), & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \tag{29}$$

2. Αφού $\cos(t)\delta(t) = \cos(0)\delta(t)$, έχουμε

$$\int_{-\infty}^{t} \cos(\tau)\delta(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} \cos(0)\delta(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} = u(t) \tag{30}$$

3. Αφού $u(t-1) = 1,\ t > 1$, έχουμε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(t)u(t-1)\delta(t)dt = \int_{1}^{+\infty} \cos(t)\delta(t)dt = \int_{1}^{+\infty} \cos(0)\delta(t)dt = \int_{1}^{+\infty} \delta(t)dt = 0 \tag{31}$$

αφού η συνάρτηση Δέλτα εντός του ολοκληρώματος "ζει" στο $t = 0$, που είναι εκτός διαστήματος ολοκλήρωσης. Άρα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(t)u(t-1)\delta(t)dt = 0 \quad \forall t \tag{32}$$

4. Είναι

$$\int_{0}^{2\pi} t\sin(t/2)\delta(\pi - t)dt = \int_{0}^{2\pi} \pi\sin(\pi/2)\delta(\pi - t)dt = \int_{0}^{2\pi} \pi\cdot 1\cdot\delta(\pi - t)dt = \pi\int_{0}^{2\pi} \delta(\pi - t)dt = \pi \tag{33}$$

αφού η συνάρτηση Δέλτα βρίσκεται στη θεση $t = \pi$.