ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2023-24
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

4ο Φροντιστήριο

Άσκηση 1 - Μετασχηματισμός Fourier I - Ορισμός

Χρησιμοποιήστε τον ορισμό για να βρείτε το μετασχ. Fourier των παρακάτω σημάτων.

(α΄) $x(t) = e^{-2t}u(t-3)$

(β΄) $x(t) = e^{-4|t|}$

(γ΄) $x(t) = te^{-2t}u(t)$

<u>Λύση:</u>

(α΄) Είναι

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2t}u(t-3)e^{-j2\pi ft}dt = \int_{3}^{+\infty} e^{-2t}e^{-j2\pi ft}dt \tag{1}$$

$$= \int_{3}^{+\infty} e^{-(2+j2\pi f)t}dt = -\frac{1}{2+j2\pi f}e^{-(2+j2\pi f)t}\Big]_3^{+\infty} \tag{2}$$

$$= -\frac{1}{2+j2\pi f}(0 - e^{-3(2+j2\pi f)}) = \frac{1}{2+j2\pi f}e^{-3(2+j2\pi f)} \tag{3}$$

(β΄) Είναι

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-4|t|}e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-\infty}^{0} e^{4t}e^{-j2\pi ft}dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-4t}e^{-j2\pi ft}dt \tag{4}$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{(4-j2\pi f)t}dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-(4+j2\pi f)t}dt \tag{5}$$

$$= \frac{1}{4-j2\pi f}e^{(4-j2\pi f)t}\Big]_{-\infty}^{0} - \frac{1}{4+j2\pi f}e^{-(4+j2\pi f)t}\Big]_{0}^{\infty} \tag{6}$$

$$= \frac{1}{4-j2\pi f}(1-0) - \frac{1}{4+j2\pi f}(0-1) \tag{7}$$

$$= \frac{1}{4-j2\pi f} + \frac{1}{4+j2\pi f} \tag{8}$$

$$= \frac{8}{(4-j2\pi f)(4+j2\pi f)} \tag{9}$$

$$= \frac{8}{16+4\pi^2 f^2} \tag{10}$$

(γ΄) Είναι

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-2t}u(t)e^{-j2\pi ft}dt = \int_{0}^{+\infty} te^{-2t}e^{-j2\pi ft}dt \tag{11}$$

$$= \int_{0}^{+\infty} te^{-(2+j2\pi f)t}dt = e^{-(2+j2\pi f)t}\Big(\frac{-(2+j2\pi f)t-1}{(-(2+j2\pi f))^2}\Big)\Big]_0^{+\infty} \tag{12}$$

$$= \lim_{t\to+\infty} e^{-(2+j2\pi f)t}\Big(\frac{-(2+j2\pi f)t-1}{(-(2+j2\pi f))^2}\Big) + \frac{1}{(2+j2\pi f)^2} \tag{13}$$

$$= -\frac{1}{(2+j2\pi f)^2}\lim_{t\to+\infty} e^{-(2+j2\pi f)t}(1+(2+j2\pi f)t) + \frac{1}{(2+j2\pi f)^2} \tag{14}$$

$$= 0 + \frac{1}{(2+j2\pi f)^2} = \frac{1}{(2+j2\pi f)^2} \tag{15}$$

μετά από εφαρμογή του κανόνα του De L'Hospital.

Άσκηση 2 - Μετασχηματισμός Fourier II - Ιδιότητες

Σας δίνεται ο μετασχ. Fourier ενός σήματος $x(t)$ ως

$$X(f) = \frac{4}{3+j2\pi f} \tag{16}$$

Βρείτε το μετασχ. Fourier των παρακάτω σημάτων με αποκλειστική χρήση ιδιοτήτων.

(α΄) $x(-2t)$

(β΄) $x(t-5)$

(γ΄) $x(8t-2)$

(δ΄) $tx(t)$

(ε΄) $e^{j6t}x(t)$

(ϛ΄) $\frac{dx(t)}{dt}$

<u>Λύση:</u>

(α΄) Είναι

$$Y(f) = \frac{1}{2}X(-f/2) = \frac{1}{2}\frac{4}{3-j2\pi\frac{f}{2}} = \frac{2}{3-j\pi f} \tag{17}$$

(β΄) Είναι

$$Y(f) = X(f)e^{-j2\pi 5f} = \frac{4}{3+j2\pi f}e^{-j10\pi f} = \frac{4e^{-j10\pi f}}{3+j2\pi f} \tag{18}$$

(γ΄) Είναι

$$Y(f) = \frac{1}{8}X(f/8)e^{-j2\pi f/4} = \frac{1}{8}\frac{4}{3+j2\pi\frac{f}{8}}e^{-j\pi f/2} = \frac{4e^{-j\pi f/2}}{24+j2\pi f} \tag{19}$$

(δ΄) Είναι

$$Y(f) = \frac{j}{2\pi}\frac{d}{df}X(f) = \frac{j}{2\pi}\frac{d}{df}\frac{4}{3+j2\pi f} = \frac{4}{(3+j2\pi f)^2} \tag{20}$$

(ε΄) Είναι

$$Y(f) = X\Big(f-\frac{6}{2\pi}\Big) = \frac{4}{3+j2\pi(f-\frac{6}{2\pi})} = \frac{4}{3+j(2\pi f-6)} \tag{21}$$

(ϛ΄) Είναι

$$Y(f) = j2\pi fX(f) = j2\pi f\frac{4}{3+j2\pi f} = \frac{j8\pi f}{3+j2\pi f} \tag{22}$$

Άσκηση 3 - Μετασχηματισμός Fourier - Γρίφος :-)

Έστω ότι για ένα σήμα $x(t)$ μας δίνονται οι παρακάτω πληροφορίες:

- είναι πραγματικό
- $x(t) = 0$ για $t < 0$
- ισχύει
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Re\{X(f)\}e^{j2\pi ft}df = |t|e^{-|t|}$$
με $\Re\{X(f)\}$ το πραγματικό μέρος του μετασχ. Fourier του σήματος $x(t)$.

Βρείτε μια κλειστή έκφραση για το $x(t)$.

Λύση:
Εφ'όσον το σήμα είναι πραγματικό στο χρόνο, το $\Re\{X(f)\}$ θα αντιστοιχεί στο άρτιο μέρος του σήματος $x(t)$, δηλ. στο

$$x_e(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2} \tag{23}$$

;ρα

$$x_e(t) = |t|e^{-|t|} = \frac{x(t) + x(-t)}{2} \tag{24}$$

Αφού ισχύει ότι $x(t) = 0$, $t < 0$, τότε το $x(-t) = 0$ για $t > 0$. Οπότε

$$x(t) = 2|t|e^{-|t|}, \ \ t > 0 \tag{25}$$

και άρα

$$x(t) = 2te^{-t}u(t) \tag{26}$$

Άσκηση 4 - Αντίστροφος Μετασχ. Fourier - I
Αν γνωρίζετε ότι για ένα μετασχ. Fourier $X(f)$ ισχύει ότι

$$|X(f)| = 2(u(f + 3) - u(f - 3)) \tag{27}$$

με $u(\cdot)$ τη βηματική συνάρτηση, και

$$\phi_x(f) = -3\pi f + \pi \tag{28}$$

τότε βρείτε

(α') την πολική αναπαράσταση του μετασχ. Fourier $X(f)$

(β') το σήμα $x(t)$

(γ') τα σημεία μηδενισμού του σήματος $x(t)$

Λύση:
Αφού γνωρίζουμε το μέτρο και τη φάση του μετασχηματισμού, μπορούμε να τον βρούμε ως

$$X(f) = |X(f)|e^{j\phi_x(f)} = 2(u(f + 3) - u(f - 3))e^{j(-3\pi f+\pi)} \tag{29}$$

Παρατηρούμε ότι

$$u(f + 3) - u(f - 3) = \text{rect}\left(\frac{f}{6}\right) \tag{30}$$

(α') ;ρα η πολική μορφή δίνεται ως

$$X(f) = |X(f)|e^{j\phi_x(f)} = 2\text{rect}\left(\frac{f}{6}\right)e^{j(-3\pi f+\pi)} \tag{31}$$

(β΄) Θα έχουμε

$$x(t) = F^{-1}\{X(f)\} = F^{-1}\{2\text{rect}\Big(\frac{f}{6}\Big)e^{j(-3\pi f+\pi)}\} \tag{32}$$
$$= F^{-1}\{-2\text{rect}\Big(\frac{f}{6}\Big)e^{j(-3\pi f)}\} \tag{33}$$
$$= F^{-1}\{-2\text{rect}\Big(\frac{f}{6}\Big)\} * F^{-1}\{e^{j(-2\pi\frac{3}{2}f)}\} \tag{34}$$

λόγω της ιδιότητας της συνέλιξης στο χρόνο $\Longleftrightarrow$ γινόμενο στη συχνότητα. Στη συνέχεια,

$$x(t) = -12\text{sinc}(6t) * \delta(t - \frac{3}{2}) \tag{35}$$
$$= -12\text{sinc}(6(t - 3/2)) \tag{36}$$
$$= -12\text{sinc}(6t - 9)) \tag{37}$$
$$= -12\text{sinc}(9 - 6t) \tag{38}$$

από την ιδιότητα της συνέλιξης σήματος με τη συνάρτηση δέλτα και λόγω αρτιότητας της συνάρτησης sinc. Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε με εφαρμογή του ορισμού ή με εφαρμογή της ιδιότητας της κλιμάκωσης και χρονικής μετατόπισης - όλες αυτές οι λύσεις είναι σωστές.

(γ΄) Προφανώς τα σημεία μηδενισμού είναι τα σημεία μηδενισμού του αριθμητή $\sin(\pi(9 - 6t))$, οπότε

$$\pi(9 - 6t) = k\pi \Longleftrightarrow t = \frac{9 - k}{6}, \;\; k \in \mathrm{Z} \tag{39}$$

Άσκηση 5 - Αντίστροφος Μετασχ. Fourier - II

Έστω ο μετασχ. Fourier

$$X(f) = \frac{1}{2 - (2\pi f)^2 + j6\pi f} \tag{40}$$

Προσέξτε ότι

$$2 - (2\pi f)^2 + j6\pi f = 2 + (j2\pi f)^2 + j3(2\pi f) = (1 + j2\pi f)(2 + j2\pi f) \tag{41}$$

και εφαρμόστε ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα[1] για να βρείτε τον αντίστροφο Μετασχ. Fourier (δηλ. το σήμα στο χρόνο $x(t)$) χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της γραμμικότητας και γνωστά ζεύγη μετασχηματισμών που γνωρίζετε ήδη από τους Πίνακές σας.

Λύση:

Ο μετασχηματισμός γράφεται ως

$$X(f) = \frac{1}{2 - (2\pi f)^2 + j6\pi f} = \frac{1}{(1 + j2\pi f)(2 + j2\pi f)} \tag{42}$$

Αναπτύσσοντας σε μερικά κλάσματα θα έχουμε

$$X(f) = \frac{1}{(1 + j2\pi f)(2 + j2\pi f)} = \frac{A}{1 + j2\pi f} + \frac{B}{2 + j2\pi f} \tag{43}$$

με

$$A = X(f)(1 + j2\pi f)\Big]_{j2\pi f=-1} = \frac{1}{2 + j2\pi f}\Big]_{j2\pi f=-1} = 1 \tag{44}$$
$$B = X(f)(2 + j2\pi f)\Big]_{j2\pi f=-2} = \frac{1}{1 + j2\pi f}\Big]_{j2\pi f=-2} = -1 \tag{45}$$

[1]Θυμηθείτε τη διαδικασία όπως περιγράφεται στο κεφάλαιο Υποβάθρου.

και άρα

$$X(f) = \frac{1}{1 + j2\pi f} - \frac{1}{2 + j2\pi f} \tag{46}$$

Από τα ζεύγη μετασχηματισμών στους Πίνακες μας καταλήγουμε ότι

$$x(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t) \tag{47}$$