ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2020-21
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Εξέταση Προόδου

- **ΑΝΤΙΓΡΑΨΤΕ ΣΤΟ ΠΑΝΩ ΜΕΡΟΣ ΚΑΘΕ ΣΕΛΙΔΑΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ τον παρακάτω πίνακα, βάζοντας τα 4 ψηφία του ΑΜ σας κάτω από τις σταθερές** a, b, c, d:

a	b	c	d

- **Αντικαταστήστε πριν οποιαδήποτε λύση σας τις σταθερές** a, b, c, d **όπου εμφανίζονται στα παρακάτω θέματα (μόνο με <u>μικρά</u> γράμματα) με τα αντίστοιχα ψηφία του ΑΜ σας.**
- **Λύσεις ΧΩΡΙΣ αντικατάσταση ή με ΛΑΘΟΣ αντικατάσταση ψηφίων ΔΕΝ είναι αποδεκτές και ΜΗΔΕΝΙΖΟΝΤΑΙ.**
- **ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 1 ΩΡΑ και 45 ΛΕΠΤΑ**
- **ΠΡΟΘΕΣΜΙΑ ΠΑΡΑΔΟΣΗΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ: 16:15 ΑΥΣΤΗΡΑ μέσω ηλεκτρονικού ταχυδρομείου στο**

kafentz@csd.uoc.gr

- **Απαγορεύεται η συνεργασία με οποιοδήποτε φυσικό πρόσωπο ή πρόσωπα και η μεταξύ σας ή με τρίτους αντιγραφή. Οι διδάσκοντες διατηρούν, μετά το πέρας της εξέτασης, το δικαίωμα (α) να μηδενίσουν <u>κατ΄ ευθείαν</u> γραπτό ή γραπτά με προφανείς ομοιότητες και (β) να καλέσουν σε <u>προφορική εξέταση</u> μέσω Zoom αν υπάρξουν όποιες υποψίες.**
- **Αιτιολογήστε ΠΛΗΡΩΣ όσα γράφετε.**
- **Δεν επιτρέπονται ερωτήσεις. Γράφετε μόνοι/ες σας με βάση όσα γνωρίζετε.**

Θέμα 1ο - 30 μονάδες

Έστω το σύστημα που περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + (c+3)\frac{d}{dt}y(t) + (c+2)y(t) = x(t) \tag{1}$$

με αρχικές συνθήκες $y(0^-) = a-2$, $y'(0) = d+1$.

(α΄) **[5 μ.]** Υπολογίστε την απόκριση μηδενικής εισόδου, $y_{zi}(t)$.

(β΄) **[5 μ.]** Υπολογίστε την κρουστική απόκριση, $h(t)$.

(γ΄) **[15 μ.]** Υπολογίστε την απόκριση μηδενικής κατάστασης, $y_{zs}(t)$, για είσοδο $x(t) = e^{-at}u(t)$.

(δ΄) **[5 μ.]** Είναι το σύστημα ευσταθές; Αιτιολογήστε.

Λύση:

(α΄) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι

$$\lambda^2 + (c+3)\lambda + (c+2) \tag{2}$$

και οι χαρακτηριστικές ρίζες είναι

$$\lambda_1,\ \lambda_2 \tag{3}$$

πάντα διαφορετικές μεταξύ τους. ’ρα η απόκριση μηδενικής εισόδου θα είναι

$$y_{zi}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \tag{4}$$

με

$$y'_{zi}(t) = \lambda_1 c_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 c_2 e^{\lambda_2 t} \tag{5}$$

Λύνοντας το σύστημα

$$y_{zi}(0^-) = c_1 + c_2 = a-2 \tag{6}$$

$$y'_{zi}(0^-) = \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 = d+1 \tag{7}$$

βρίσκουμε τους συντελεστές c_1, c_2, και τελικά θα είναι

$$y_{zi}(t) = (c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t})u(t) \tag{8}$$

(β΄) Ακριβώς όμοια με παραπάνω, με αρχικές συνθήκες τώρα

$$h(0^+) = 0,\ h'(0^+) = 1 \tag{9}$$

’ρα η κρουστική απόκριση θα είναι

$$h(t) = \mu_1 e^{\lambda_1 t} + \mu_2 e^{\lambda_2 t} \tag{10}$$

με

$$h'(t) = \lambda_1 \mu_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 \mu_2 e^{\lambda_2 t} \tag{11}$$

Λύνοντας το σύστημα

$$h(0^+) = \mu_1 + \mu_2 = 0 \tag{12}$$

$$h'(0^+) = \lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2 = 1 \tag{13}$$

βρίσκουμε τους συντελεστές μ_1, μ_2, και τελικά θα είναι

$$h(t) = (\mu_1 e^{\lambda_1 t} + \mu_2 e^{\lambda_2 t})u(t) \tag{14}$$

(γ') Η απόκριση μηδενικής κατάστασης είναι η συνέλιξη μεταξύ των

$$h(t) = (\mu_1 e^{\lambda_1 t} + \mu_2 e^{\lambda_2 t})u(t) \tag{15}$$

και

$$x(t) = e^{-at}u(t) \tag{16}$$

η οποία μπορεί να λυθεί αναλυτικά ή με χρήση πινάκων από τις σημειώσεις σας.

(δ') Το σύστημα είναι πάντα ευσταθές γιατί οι χαρακτηριστικές του ρίζες είναι πάντα αρνητικές (ανεξαρτήτως των ψηφίων του ΑΜ σας).

Θέμα 2ο - 30 μονάδες

Έστω το περιοδικό σήμα $x(t)$ που σε μια περίοδό του γράφεται ως

$$x_{T_0}(t) = \begin{cases} a, & 0 < t < \dfrac{2T_0}{3} \\ \\ -(d+1), & \dfrac{2T_0}{3} < t < T_0 \end{cases} \tag{17}$$

Σχεδιάστε μια περίοδο του σήματος και βρείτε τους συντελεστές Fourier του.

<u>Λύση:</u>

Σχέδιο (**5 μ.**) και εύρεση

$$X_0 = \frac{2a}{3} - \frac{d+1}{3} \quad (\textbf{5 μ.}) \tag{18}$$

Οι συντελεστές δίνονται ως

$$X_k = \frac{a+d+1}{j2\pi k}(1 - e^{-j4\pi k/3}) \tag{19}$$

και αντιστοιχούν σε **20 μ**.

Θέμα 3ο - 10 μονάδες

Οι συντελεστές Fourier ενός περιοδικού σήματος είναι

$$X_k = \begin{cases} j, & k=1,\ k=2 \\ \\ -j, & k=-1,\ k=-2 \\ \\ \dfrac{1}{2j}, & k = a+2 \\ \\ -\dfrac{j}{2}, & k=-a-2 \\ \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{20}$$

(α') **[5 μ.]** *Σωστό ή λάθος*; "Το σήμα $x(t)$ που έχει αυτούς τους συντελεστές Fourier είναι πραγματικό, δηλ. $x(t) \in \mathbb{R}$." Αιτιολογήστε πλήρως.

(β') **[5 μ.]** *Σωστό ή λάθος*; "Το φάσμα $X_{k-100} + X_{k+100}$ αντιστοιχεί σε καθαρά φανταστικό σήμα στο χρόνο, δηλ. $x(t) \in \mathbb{I}$." Αιτιολογήστε πλήρως.

Λύση:

(α') Για να είναι πραγματικό το σήμα πρέπει $X_k = X^*_{-k}$ ή αλλιώς

$$X_{-k} = X^*_k \tag{21}$$

Αυτό δεν ισχύει για $k_0 = \pm(a+2)$, αφού $X_{k_0} = X_{-k_0}$ γιατί $1/2j = -j/2$. 'ρα το σήμα δεν είναι πραγματικό. Η πρόταση είναι **Λάθος: το σήμα ΔΕΝ είναι πραγματικό**.

(β') Το φάσμα με συντελεστές $Y_k = X_{k-100} + X_{k+100}$ αντιστοιχεί στο σήμα

$$y(t) = e^{j2\pi 100 f_0 t}x(t) + e^{-j2\pi 100 f_0 t}x(t) = 2\cos(2\pi 100 f_0 t)x(t) \tag{22}$$

από την ιδιότητα της μετατόπισης στη συχνότητα. 'ρα η απάντηση εξαρτάται από το αν $x(t) \in \mathbb{I}$, καθώς το $y(t)$ είναι απλά ένα γινόμενο με ένα πραγματικό σήμα, $2\cos(2\pi 100 f_0 t)$. Είναι

$$\begin{aligned}
x(t) &= je^{j2\pi f_0 t} - je^{-j2\pi f_0 t} + je^{j2\pi 2 f_0 t} - je^{-j2\pi 2 f_0 t} + \frac{1}{2j}e^{j2\pi(a+2)f_0 t} + \frac{1}{2j}e^{-j2\pi(a+2)f_0 t} && (23)\\
&= 2\cos(2\pi f_0 t + \pi/2) + 2\cos(2\pi 2 f_0 t + \pi/2) + \frac{1}{j}\cos(2\pi(a+2)f_0 t) && (24)\\
&= 2\cos(2\pi f_0 t + \pi/2) + 2\cos(2\pi 2 f_0 t + \pi/2) - j\cos(2\pi(a+2)f_0 t) && (25)\\
&= x_R(t) + jx_I(t) && (26)
\end{aligned}$$

με

$$\begin{aligned}
x_R(t) &= 2\cos(2\pi f_0 t + \pi/2) + 2\cos(2\pi 2 f_0 t + \pi/2) && (27)\\
x_I(t) &= -\cos(2\pi(a+2)f_0 t) && (28)
\end{aligned}$$

'ρα το σήμα είναι μιγαδικό (έχει μη μηδενικά πραγματικά και φανταστικά μέρη), οπότε και ο πολλαπλασιασμός του με ένα πραγματικό σήμα μας δίνει μιγαδικό αποτέλεσμα. Έτσι, η πρόταση είναι **Λάθος: το σήμα δεν είναι καθαρά φανταστικό - είναι μιγαδικό**.

Θέμα 4ο - 10 μονάδες

Υπολογίστε το μετασχ. Fourier της απόκρισης μηδενικής κατάστασης του Θέματος 1.

Λύση:

Ο μετασχηματισμός δίνεται απευθείας από πίνακες, χωρίς καθόλου πράξεις, μέσω των ζευγών

$$\begin{aligned}
e^{-at}u(t),\ a > 0 &\longleftrightarrow \frac{1}{a + j2\pi f} && (29)\\
te^{-at}u(t),\ a > 0 &\longleftrightarrow \frac{1}{(a + j2\pi f)^2} && (30)
\end{aligned}$$

του αποτελέσματος του Θέματος 1(γ), και την ιδιότητα της γραμμικότητας του μετασχ. Fourier.