Φροντιστήριο

a	b	c	d
3	2	6	6

Θέμα 1ο

$$x(t) = \frac{d^2}{dt^2}y(t) + (c+3)\frac{d}{dt}y(t) + (c+2)y(t)$$

$y(0^-) = a - 2 = 1$, $y'(0) = d + 1 = 7$

α') Απόκριση μηδενικής εισόδου $y_{zi}(t)$ => χαρακτηριστικό πολ/μο:

αν

$$x(t) = 1 \cdot \frac{d^{2}}{dt^{2}}y(t) + (6+3)\cdot\frac{d^{1}}{dt^{1}}y(t) + (6+2)\cdot y(t) = 0$$

χαρ. πολ: $1\lambda^2 + 9\lambda^1 + 8$

χαρ. ρίζες: $\lambda^2 + 9\lambda + 8 = 0$

$\Delta = b^2 - 4a\gamma = \dots$

$\lambda_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ → $\boxed{\lambda_1 = -1}$, $\boxed{\lambda_2 = -8}$ } χαρ. ρίζες

↳ Είναι διαφορετικές ($\lambda_1 \neq \lambda_2$), άρα θα είναι:

$$y_{zi}(t) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \xrightarrow[\lambda_2=-8]{\lambda_1=-1}$$

$$y_{zi}(t) = c_1 \cdot e^{-t} + c_2 \cdot e^{-8t}, \quad (1)$$

↳ Μέσω των αρχικών συνθηκών βρίσκουμε τις σταθερές c_1, c_2 :

$$(1) \xRightarrow{y(0^-)=1} c_1 \cdot e^0 + c_2 \cdot e^0 = 1 \Leftrightarrow \underline{c_1 + c_2 = 1} \ , \ (2)$$

↳ Για την άλλη αρχική συνθήκη χρειαζόμαστε την παράγωγο της (1), που θα είναι:

$$\frac{d}{dt} y_{zi}(t) = \frac{d}{dt} c_1 e^{-t} + \frac{d}{dt} c_2 e^{-8t} \Leftrightarrow$$

$$y'_{zi}(t) = -c_1 e^{-t} - c_2 8 e^{-8t} \ , \ (3)$$

$$(3) \xRightarrow{y'(0)=7} -c_1 \cdot e^0 - c_2 8 \cdot e^0 = 7 \Leftrightarrow \underline{c_1 + 8c_2 = -7} \ , \ (4)$$

↳ Άρα για τις c_1, c_2 αρκεί να λύσουμε το σύστημα :

$$(2),(4) : \left.\begin{array}{l} c_1 + c_2 = 1 \ , \ (2) \\ c_1 + 8c_2 = -7 \ , \ (4) \end{array}\right\} \text{Αφαιρούμε κατά μέλη την (2) από την (4)} \Rightarrow$$

$$c_1 - c_1 + 8c_2 - c_2 = -7 - 1 \Leftrightarrow 7c_2 = -8 \Leftrightarrow c_2 = -\frac{8}{7}$$

$$(2) \xRightarrow{c_2=-8/7} c_1 - \frac{8}{7} = 1 \Leftrightarrow c_1 = \frac{7}{7} + \frac{8}{7} \Leftrightarrow c_1 = \frac{15}{7}$$

↳ Συνολικά: $\boxed{y_{zi}(t) = \frac{15}{7} e^{-t} - \frac{8}{7} e^{-8t}} = \ldots$

Ερώτηση : Τι θα κάνατε σε πολ/λές ρίζες λ_i ;

πχ : $(\lambda - \lambda_1)^3$, τριπλή ρίζα

Απάντηση : $c_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + c_2 \cdot t \cdot e^{\lambda_1 t} + c_3 \cdot t^2 \cdot e^{\lambda_1 t}$

β') Κρουστική απόκριση $h(t)$ (δηλ. είσοδος $\delta(t)$)

↳ Λύνουμε την ίδια διαφορική με διαφορετικές αρχ. συνθ.

↳ Αν a_N είναι ο συντελεστής του παράγοντα με τη μεγαλύτερη δύναμη, τότε οι συνθήκες αυτές θα είναι:

$$h(0^+) = 0 , \; h'(0^+) = 0 , \; \ldots , \; h^{(N-1)}(0^+) = 1/a_N$$

↳ Σε εμάς : $h(0^+) = 0$, $h'(0^+) = 1/a_N = 1/1 = 1$

↳ Άρα αρκεί να βρούμε τις καινούργιες σταθερές της (1) =>

$$h(t) = \mu_1 \cdot e^{-t} + \mu_2 \cdot e^{-8t} \quad , (5)$$

$$h'(t) = -\mu_1 e^{-t} - 8\mu_2 e^{-8t} \quad , (6)$$

$$\left.\begin{array}{l} (5) \overset{h(0^+)=0}{\Rightarrow} \mu_1 + \mu_2 = 0 \\ (6) \overset{h'(0^+)=1}{\Rightarrow} -\mu_1 - 8\mu_2 = 1 \end{array}\right\}$$

Προσθέτω κατά μέλη άρα θα είναι:

$$\mu_1 - \mu_1 + \mu_2 - 8\mu_2 = 0 + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -7\mu_2 = 1 \Leftrightarrow \mu_2 = -1/7 \text{ , άρα } \mu_1 = 1/7$$

Οπότε η απάντηση: 5 $\xrightarrow[\mu_2=-1/7]{\mu_1=1/7}$

$$\boxed{h(t) = \frac{1}{7}e^{-t} - \frac{1}{7}e^{-8t}} = \dots$$, για $h(t) \geq 0$, ή

$$\boxed{h(t) = \left(\frac{1}{7}e^{-t} - \frac{1}{7}e^{-8t}\right)u(t)}$$

γ') Απόκριση μηδενικής κατάστασης $y_{zs}(t)$, για είσοδο:

$$x(t) = e^{-at}u(t) \overset{a=3}{=} e^{-3t}u(t)$$

↳ Αυτή δίνεται μέσω της συνέλιξης της εισόδου μας $x(t)$, με την κρουστική απόκριση του συστήματος $h(t)$ που βρήκαμε από το προηγούμενο ερώτημα β')

↳ Δηλ. αρκεί να υπολογίσουμε το:

- $y_{zs}(t) = x(t) * h(t) = \left(e^{-3t}u(t)\right) * \left(\frac{1}{7}e^{-t} - \frac{1}{7}e^{-8t}\right)u(t)$

↳ Πάμε να το υπολογίσουμε αναλυτικά από τον ορισμό:

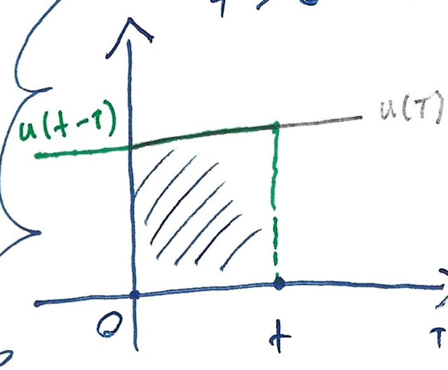
$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau$$

(της συνέλιξης)

$$y_{zs}(t) = \underbrace{e^{-3t}u(t) * \frac{1}{7}e^{-t}u(t)} - \underbrace{\frac{1}{7}e^{-t}u(t) * e^{-8t}u(t)}, \quad (7)$$

$$= \underbrace{y_1(t)} + \underbrace{y_2(t)}, \quad \text{ένα - ένα :}$$

$t > 0$



$\hookrightarrow$ εκτός $(0,t)$ είναι μηδεν!

$$y_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{7}e^{-3\tau}u(\tau)\cdot e^{-t+\tau}u(t-\tau)\,d\tau$$

$$= \frac{1}{7}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t-2\tau}u(\tau)u(t-\tau)\,d\tau$$

$$= \frac{1}{7}u(t)\int_0^t e^{-t-2\tau}\,d\tau$$

$$= \frac{1}{7}u(t)\left[\frac{e^{-t-2\tau}}{-2}\right]_0^t$$

$$= \frac{1}{7}u(t)\left(\frac{e^{-3t}}{-2} - \frac{e^{-t}}{-2}\right)$$

$$= \boxed{\frac{1}{14}\left(e^{-t} - e^{-3t}\right)u(t) = y_1(t)}, \quad (8)$$

Ομοίως για το $y_2(t)$ θα είναι:

$$y_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{1}{7} e^{-3\tau} \cdot e^{-8(t-\tau)} u(\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau$$

$$= -\frac{1}{7} u(t) \int_0^t e^{-8t+5\tau} d\tau$$

$$= -\frac{1}{7} u(t) \left[\frac{e^{-8t+5\tau}}{5} \right]_0^t$$

$$= \boxed{\frac{1}{35}\left(e^{-3t} - e^{-8t}\right) u(t) = y_2(t)} \quad ,(9)$$

Οπότε η απάντηση $y_{2s}(t)$ είναι η πρόσθεση των $y_1(t)$, $y_2(t)$:

$$y_{2s}(t) = y_1(t) + y_2(t) \overset{(8)}{\underset{(9)}{=}} \cdots = \left(\frac{1}{14} e^{-t} - \frac{3}{70} e^{-3t} - \frac{1}{35} e^{-8t}\right) u(t)$$

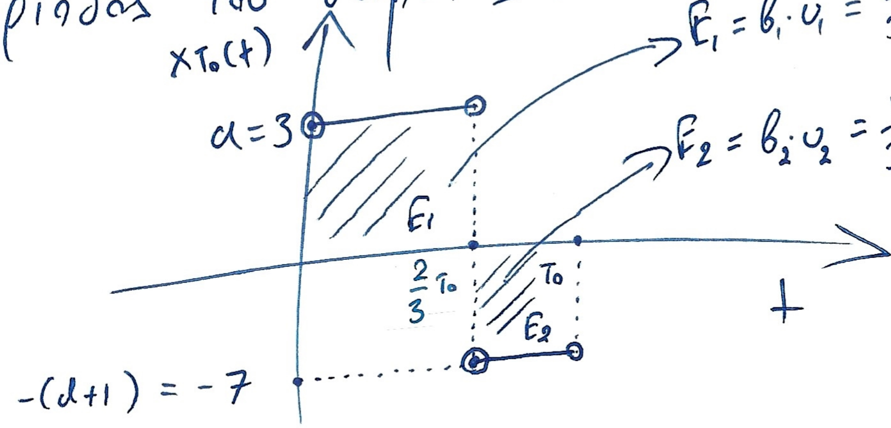
δ') Σε αυτό το μάθημα όταν μιλάτε για ευστάθεια εννοείτε BIBO ευστάθεια. (Bounded Input - Bounded Output)

→ Αν όλες οι ρίζες έχουν πραγματικό μέρος αρνητικό τότε είναι BIBO stable, σε κάθε άλλη περίπτωση δεν είναι.

→ σε εμάς είναι $\lambda_1 < 0$ και $\lambda_2 < 0$ άρα είναι BIBO ευσταθές.

Θέμα 2ο

Μια περίοδος του σήματος :



$E_1 = b_1 \cdot u_1 = \frac{2}{3} T_0 \cdot 3 = 2T_0$

$E_2 = b_2 \cdot u_2 = \frac{1}{3} T_0 \cdot 7 = \frac{7T_0}{3}$

$$x_{T_0}(t) = \begin{cases} a=3, & 0 < t < \frac{2}{3}T_0 \\ -(d+1)=-7, & \frac{2}{3}T_0 < t < T_0 \end{cases}$$

Βρίσκουμε τους συντελεστές ουσιαστικά λύνοντας το :

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t)\, e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt$$

↳ Ο 1ος είναι απλά για $f=0$:

$$\cdot \quad X_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t)\, e^0\, dt = \frac{1}{T_0}\left(\int_0^{\frac{2}{3}T_0} 3\, dt + \int_{\frac{2}{3}T_0}^{T_0} -7\, dt \right) =$$

$$= \frac{1}{T_0}(E_1 - E_2) = \frac{1}{T_0}\left(2T_0 - \frac{7T_0}{3}\right) = \frac{1}{T_0}\left(T_0\left(\frac{6}{3} - \frac{7}{3}\right)\right) =$$

$$= \boxed{\frac{1}{3} = X_0}$$

$$X_k = \frac{1}{T_0}\left(\int_0^{\frac{2T_0}{3}} 3e^{-j2\pi k f_0 t}\,dt + \int_{\frac{2T_0}{3}}^{T_0} -7e^{-j2\pi k f_0 t}\,dt\right) =$$

$f_0 T_0 = 1$

$$= \frac{1}{T_0}\left(\left[\frac{3}{-j2\pi k f_0} e^{-j2\pi k f_0 t}\right]_0^{\frac{2T_0}{3}} + \left[\frac{-7}{-j2\pi k f_0} e^{-j2\pi k f_0 t}\right]_{\frac{2T_0}{3}}^{T_0}\right) =$$

$$= \frac{1}{T_0}\left(\frac{3e^{-j2\pi k f_0 2T_0/3}}{-j2\pi k f_0} - \frac{3e^0}{-j2\pi k f_0} + \frac{-7e^{-j2\pi k f_0 T_0}}{-j2\pi k f_0} - \frac{-7e^{-j2\pi k f_0 2T_0/3}}{-j2\pi k f_0}\right) =$$

$f_0 T_0 = 1$

$e^{-j2\pi k} = 1$

$$= \frac{3e^{-j\frac{4\pi k}{3}}}{-j2\pi k} - \frac{3}{-j2\pi k} - \frac{7e^{-j2\pi k}}{-j2\pi k} + \frac{7e^{-j\frac{4\pi k}{3}}}{-j2\pi k} =$$

$e^{-j2\pi k} = 1$

$$= \boxed{\frac{10e^{-j\frac{4\pi k}{3}} - 10}{-j2\pi k} = X_k}$$

Θέμα 3ο

α) Για να είναι πραγματικό, αρκεί: $X_k = X^*_{-k}$.

(Είναι λάθος.)

$$X^*_{-k} = \begin{cases} -j, & k=-1, k=-2 \\ j, & k=1, k=2 \\ -\frac{j}{2}, & k=-5 \\ \frac{j}{2}, & k=5 \end{cases}$$

$\neq X_k$, αφού:

για $k=5$, $X_k = -\frac{j}{2} \neq \frac{j}{2}$,

διαφέρουν, άρα το $x(t)$ δεν είναι πραγματικό: $x(t) \notin \mathbb{R}$

β) Από το α) γνωρίζουμε ότι $x(t) \in \mathbb{C}$, όμως καλούμαστε να δείξουμε αν $\mathrm{Re}\{x(t)\} = 0$ ή όχι. Υπάρχει ιδιότητα:

Fourier / Χρόνος

ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ ΣΤΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ

$$\boxed{X_{k-M} \longleftrightarrow e^{j2\pi M f_0 t} x(t)}$$

, άρα στο χρόνο:

$$y(t) = e^{-j2\pi 100 f_0 t} x(t) + e^{j2\pi 100 f_0 t} x(t) = x(t)\left(\frac{2\left(e^{j2\pi 100 f_0 t} + e^{-j2\pi 100 f_0 t}\right)}{2}\right) =$$

$$= \underbrace{x(t)}_{\in ?} \cdot \underbrace{2\cos(2\pi 100 f_0 t)}_{\in \mathbb{R}}$$

, είναι το σήμα: $Y_k = X_{k-100} + X_{k+100}$. Επειδή $2\cos(2\pi 100 f_0 t) \in \mathbb{R}$, η απάντηση εξαρτάται μόνο από το $x(t)$. Θα έχουμε ένα εκθετικό για κάθε τιμή του k, δηλ. $H_k = a$, $k = k_0 \longleftrightarrow h(t) = a e^{j2\pi f_0 k_0 t}$.

$$X_k = \begin{cases} j, & k=1 \\ j, & k=2 \\ -j, & k=-1 \\ -j, & k=-2 \\ \frac{1}{2j}, & k=5 \\ -\frac{j}{2}, & k=-5 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \to j e^{j2\pi f_0 t} \quad + \\ \to j e^{j2\pi f_0 2t} \quad + \\ \to -j e^{-j2\pi f_0 t} \quad + \\ \to -j e^{-j2\pi f_0 2t} \quad + \\ \to -\frac{j}{2} e^{j2\pi f_0 5t} \quad + \\ \to -\frac{j}{2} e^{-j2\pi f_0 5t} \quad + \\ \to 0 \quad + \\ = x(t) \end{array}$$

$$x(t) = -2\left(\frac{e^{j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t}}{2j}\right) - 2\left(\frac{e^{j2\pi f_0 2t} - e^{-j2\pi f_0 2t}}{2j}\right) - j\left(\frac{e^{j2\pi f_0 5t} + e^{-j2\pi f_0 5t}}{2}\right)$$

$$= \underbrace{-2\sin(2\pi f_0 t) - 2\sin(2\pi f_0 2t)}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{-j\cos(2\pi f_0 5t)}_{\in \mathbb{I}}$$

↳ Άρα το $x(t)$ είναι μιγαδικό, με μη-μηδενικά φανταστικά μέρη. Η απάντηση είναι λοιπόν: Λάθος

$\mathrm{Re}\{x(t)\} \neq 0$

$\mathrm{Im}\{x(t)\} \neq 0$

Θέμα 4ο

α') Χρειαζόμαστε μόνο την ιδιότητα / ζεύγος (γνωστό):

Χρόνος		Fourier
$e^{-at}u(t),\ a>0$	$\overset{F}{\longleftrightarrow}$	$\dfrac{1}{a+j2\pi f}$

$$y_{2s}(t) = \left(\frac{1}{14}e^{-t} - \frac{3}{70}e^{-3t} - \frac{1}{35}e^{-8t}\right)u(t)$$

$$F\downarrow \qquad F\downarrow \qquad F\downarrow$$

$$\boxed{Y_{2s}(f) = \frac{1}{14}\cdot\frac{1}{1+j2\pi f} - \frac{3}{70}\cdot\frac{1}{3+j2\pi f} - \frac{1}{35}\cdot\frac{1}{8+j2\pi f}}$$