

Φροντιστήριο πριν την πρόοδο

Επιμέλεια: Γιώργος Μάνος

Άσκηση 1 - Βαθμός: 15

Ένα πραγματικό περιοδικό σήμα όταν αναπτυχθεί σε εκθετική σειρά Fourier έχει συντελεστές

$$X_k = [2e^{-j\phi_1}, \sqrt{3}e^{j\phi_2}, 2e^{j\phi_1}, \sqrt{3}e^{-j\phi_2}, e^{j\phi_2}]$$

για $k = 1, 2, 3, 4, 5$.

Πόση είναι η ισχύς του σήματος;

$$P = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2$$

$$= |X_0|^2 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} |X_k|^2 = 0^2 + 2(2^2 + (\sqrt{3})^2 + 2^2 + (\sqrt{3})^2 + 1^2)$$

$$= 2(4 + 3 + 4 + 3 + 1) = 30$$

$$\begin{aligned} |Ae^{j\phi}| &= |A| |e^{j\phi}| \\ &= |A| \cdot 1 = \\ &= |A| \end{aligned}$$

Άσκηση 2 - Βαθμός: 10

Ελέγξτε αν το παρακάτω σύστημα είναι γραμμικό, χρονικά αμετάβλητο, ευσταθές, αιτιατό, και δυναμικό

$$y(t) = (t-1)^2 x(1-t) + x^2(-t)$$

Γραμμικότητα: ΟΧΙ (πρέπει να είναι ομογενές και αδρειατικό)

- Ομογενές:

Για είσοδο $ax(t)$ η έξοδος είναι

$$y_o(t) = (t-1)^2 ax(1-t) + a^2 x^2(-t) \neq ay(t), \quad t \in y(t)$$

Δεν είναι ομογενές, άρα δεν είναι γραμμικό.

X.A : OXI

Για είσοδο $x(t-t_c)$ η έξοδος είναι

$$y_o(t) = (t-1)^2 x(1-t-t_c) + x^2(-t-t_c)$$

Όπως η καθυστέρηση κατά t_c έξοδος είναι

$$y(t-t_c) = (t-t_c-1)^2 x(1-(t-t_c)) + x^2(-(t-t_c))$$

\neq

Άρα δεν είναι X.A.

Ευσταθία: $|x(t)| < B_x \Rightarrow |y(t)| < B_y$

ΟΧΙ!

$$\begin{aligned} |y(t)| &= |(t-1)^2 x(1-t) + x^2(-t)| \leq |(t-1)^2| |x(1-t)| + |x^2(-t)| \\ &< |(t-1)|^2 B_x + B_x^2 \end{aligned}$$

Για $t \rightarrow \infty$, η έκδοσ δεν είναι ανόριστος γραγφών

Αρα δεν είναι ευσταθής.

Αιτιατότητα : ΟΧΙ : Το $y(c)$ εξαρτάται από το $x(1)$, άρα δεν είναι αιτιατό.



Δυναμικότητα : ΝΑΙ : για το $y(4)$ δίδουμε το $x(-3)$ και το $x^2(-4)$, άρα πρέπει να τα έχουμε αποθηκεύσει κάπου.

Άσκηση 3 - Βαθμός: 20

Ένα σύστημα περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 25y(t) = x(t)$$

και έχει αρχικές συνθήκες $y(0^-) = 1$, $\left. \frac{d}{dt}y(t) \right|_{t=0^-} = -1$.

- i. Βρείτε την κρουστική του απόκριση, $h(t)$.
- ii. Βρείτε την απόκριση μηδενικής κατάστασης, $y_{zs}(t)$, για $x(t) = u(t)$.

$$\lambda^2 + 25 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = j5, \lambda_2 = -j5$$

$$h(t) = c_1 e^{j5t} + c_2 e^{-j5t}, \quad t > 0$$

Αρχικές συνθήκες :

$$h(0^+) = 0, \quad h'(0^+) = 1$$

$$h(t) = c_1 e^{j5t} + c_2 e^{-j5t}, \quad t > 0$$

$$h(0^+) = c_1 e^{j5 \cdot 0} + c_2 e^{-j5 \cdot 0} = c_1 + c_2 = 0$$

$$h'(0^+) = \left[j5c_1 e^{j5t} - j5c_2 e^{-j5t} \right]_{t=0} = j5c_1 - j5c_2 = 1$$

} \Rightarrow

$$\Rightarrow c_1 = \frac{1}{j10}, \quad c_2 = -\frac{1}{j10}$$

Από

$$h(t) = \frac{1}{j10} e^{j5t} - \frac{1}{j10} e^{-j5t}, \quad t > 0$$

$$= \frac{1}{5} \sin(5t), \quad t > 0$$

$$= \frac{1}{5} \sin(5t) u(t)$$

Αν

$$y''(t) + 25y(t) = 4x(t) - 2x'(t)$$

τότε

θα είναι βρεμένο $h_0(t)$ το

$$y''(t) + 25y(t) = x(t)$$

όπου είναι και $f \in \mathcal{R}$

$$h(t) = 4h_0(t) - 2h_0'(t)$$

$$y_{zs}(t) = ? \quad \text{für } x(t) = u(t) \quad , \quad h(t) = \frac{1}{5} \sin(5t) u(t)$$

$$y_{zs}(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{5} \sin(5\tau) u(\tau) u(t-\tau) d\tau$$

$$= \frac{1}{5} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(5\tau) [u(\tau) u(t-\tau)] d\tau \quad \left. \vphantom{\int} \right\} \Rightarrow$$

Einen $u(\tau) u(t-\tau) = 1$, für $0 < \tau < t$

↓	↓
1, $\tau > 0$	1, $\tau < t$
0, $\tau < 0$	0, $\tau > t$

$$\Rightarrow y_{zs}(t) = \frac{1}{5} \int_0^t \sin(5\tau) d\tau = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{5} (-\cos(5\tau)) \right) \Big|_0^t = \frac{1}{25} (1 - \cos(5t))$$

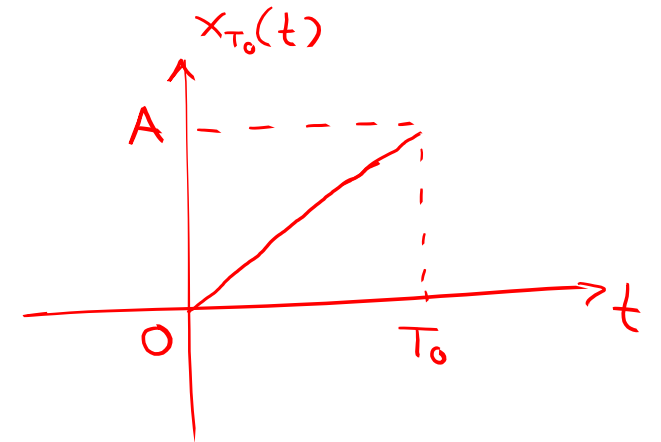
$$= \left[\frac{1}{25} - \frac{1}{25} \cos(5t) \right] \underline{\underline{u(t)}}$$

Άσκηση 4 - Βαθμός: 40

Αναπτύξτε σε σειρά Fourier το περιοδικό σήμα $x(t)$ το οποίο σε μια περίοδο δίνεται ως

$$x_{T_0}(t) = \frac{A}{T_0}t, \quad 0 \leq t < T_0$$

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{\langle T_0 \rangle} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt$$



$k=0$:

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{1}{T_0} \int_{\langle T_0 \rangle} x(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \frac{A}{T_0} t dt = \frac{A}{T_0^2} \frac{t^2}{2} \Big|_0^{T_0} = \\ &= \frac{A}{T_0^2} \frac{T_0^2}{2} = \frac{A}{2} \end{aligned}$$

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{<T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_c t} dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \frac{A}{T_0} t e^{-j2\pi k f_c t} dt \quad (1)$$

≡ εραφε ou $\int t e^{at} dt = e^{at} \frac{at-1}{a^2}$ xau ou $f_c = \frac{1}{T_0}$, $e^{\pm j2\pi k} = 1$

$$(1) \Rightarrow X_k = \frac{1}{T_0} \frac{A}{T_0} \left(e^{-j2\pi k f_c t} \left(\frac{-j2\pi k f_c t - 1}{(-j2\pi k f_c)^2} \right) \right) \Big|_0^{T_0} =$$

$$= \frac{A}{T_0^2} \left(\underbrace{e^{-j2\pi k f_c T_0}}_1 \left(\frac{-j2\pi k f_c T_0 - 1}{-4\pi^2 k^2 f_c^2} \right) - e^{-j0} \left(\frac{0 - 1}{-4\pi^2 k^2 f_c^2} \right) \right)$$

$$= \frac{A}{T_0^2} \left(\frac{-j2\pi k - 1}{-4\pi^2 k^2 f_c^2} - \frac{-1}{-4\pi^2 k^2 f_c^2} \right)$$

$$= \frac{A}{T_0^2} \left(\frac{-j2\pi k}{-4\pi^2 k^2 f_c^2} \right) = j \frac{2A\pi k}{4\pi^2 k^2 f_c^2 T_0^2} = j \frac{2A}{4\pi k} = j \frac{A}{2\pi k} = \frac{A}{2\pi k} e^{j\frac{\pi}{2}}$$

γατι $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$

$A_p \alpha$

$$\begin{aligned}x(t) &= X_0 + \sum_{\substack{k=-\infty \\ \neq 0}}^{+\infty} X_k e^{j 2\pi k f_0 t} \\&= \frac{A}{2} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ \neq 0}}^{+\infty} \frac{A}{2\pi k} e^{j \frac{\pi}{2}} e^{j 2\pi k f_c t} \\&= \frac{A}{2} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ \neq 0}}^{+\infty} \frac{A}{2\pi k} e^{j \left(2\pi k f_0 t + \frac{\pi}{2} \right)} \\&= \frac{A}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{A}{\pi k} \cos \left(2\pi k f_0 t + \frac{\pi}{2} \right) \\&= \frac{A}{2} - \frac{A}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \sin \left(2\pi k f_c t \right)\end{aligned}$$

Άσκηση 6 - Βαθμός: 15

Αναπτύξτε σε σειρά Fourier το σήμα:

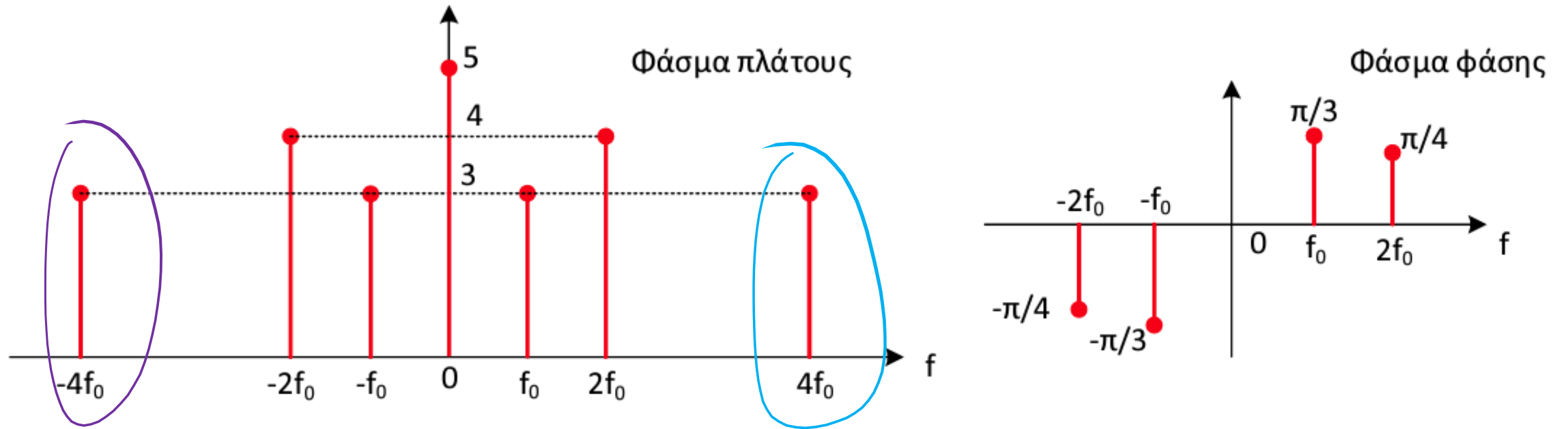
$$\text{Euler: } \cos(\vartheta) = \frac{1}{2} (e^{j\vartheta} + e^{-j\vartheta})$$

$$x(t) = [6 + 2 \cos(2\pi 5t)] \cos(2\pi 100t)$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \left[6 + e^{j2\pi 5t} + e^{-j2\pi 5t} \right] \left(\frac{1}{2} e^{j2\pi 100t} + \frac{1}{2} e^{-j2\pi 100t} \right) \\ &= \underbrace{3e^{j2\pi 100t} + 3e^{-j2\pi 100t}}_{\text{purple}} + \underbrace{\frac{1}{2} e^{j2\pi 100t} e^{j2\pi 5t} + \frac{1}{2} e^{-j2\pi 100t} e^{j2\pi 5t}}_{\text{yellow}} + \\ &\quad + \underbrace{\frac{1}{2} e^{j2\pi 100t} e^{-j2\pi 5t} + \frac{1}{2} e^{-j2\pi 100t} e^{-j2\pi 5t}}_{\text{green}} \\ &= \underbrace{6 \cos(2\pi 100t)}_{\text{purple}} + \underbrace{\cos(2\pi 105t)}_{\text{green}} + \underbrace{\cos(2\pi 95t)}_{\text{yellow}}. \end{aligned}$$

Άσκηση 7 - Βαθμός: 15

Αναπτύξτε σε σειρά Fourier το σήμα του οποίου το φάσμα φαίνεται στο παρακάτω Σχήμα 1.



Σχήμα 1: Φάσματα άσκησης 7.

$$\begin{aligned}
 x_{-4f_0}(t) &= 3 e^{j\vartheta} e^{-j 2\pi 4f_0 t} \\
 x_{4f_0}(t) &= 3 e^{j\vartheta} e^{j 2\pi 4f_0 t}
 \end{aligned}
 \quad \left. \begin{array}{l} \text{πλάτος} \\ \text{φάση} \end{array} \right\} \Rightarrow x_4(t) = 6 \cos(2\pi 4f_0 t + \vartheta) = 6 \cos(2\pi 4f_0 t)$$

Op. 1a,

$$x_0(t) = 5$$

$$x_1(t) = 6 \cos\left(2\pi f_c t + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$x_2(t) = 8 \cos\left(2\pi 2f_c t + \frac{\pi}{4}\right)$$

Apr

$$x(t) = x_0 + x_1(t) + x_2(t) + x_4(t)$$

$$= 5 + 6 \cos\left(2\pi f_c t + \frac{\pi}{3}\right) + 8 \cos\left(2\pi 2f_c t + \frac{\pi}{4}\right) + 6 \cos(2\pi 4f_c t)$$