ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2023-24
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

3ο Φροντιστήριο

Ασκηση 1 - Σειρά Fourier I
Έστω το περιοδικό σήμα $x(t) = |\sin(\pi t)|$.

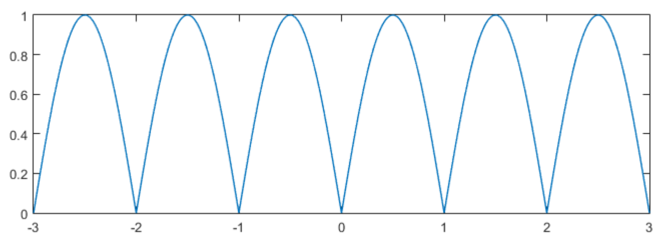
(α') Σχεδιάστε μερικές περιόδους του και βρείτε τη βασική του περίοδο T_0.

(β') Υπολογίστε αναλυτικά την εκθετική Σειρά Fourier του χρησιμοποιώντας τις σχέσεις του Euler.

(γ') Σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης χρησιμοποιώντας μόνο τα $k = \pm 4, \pm 3, \pm 2, \pm 1, 0$.

Λύση:

(α') Προφανώς από το Σχήμα 1, η περίοδός του είναι $T_0 = 1$ s.



Σχήμα 1: *Περιοδικό σήμα άσκησης 1.*

(β') Είναι

$$X_0 = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)dt = \int_0^1 \sin(\pi t)dt = -\frac{1}{\pi}\cos(\pi t)\Big]_0^1 = \frac{2}{\pi} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
X_k &= \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt = \int_0^1 \sin(\pi t)e^{-j2\pi k t}dt && (2)\\
&= \int_0^1 \frac{1}{2j}e^{j\pi t}e^{-j2\pi k t}dt - \int_0^1 \frac{1}{2j}e^{-j\pi t}e^{-j2\pi k t}dt && (3)\\
&= \frac{1}{2j}\Big(\int_0^1 e^{j\pi t}e^{-j2\pi k t}dt - \int_0^1 e^{-j\pi t}e^{-j2\pi k t}dt\Big) && (4)\\
&= \frac{1}{2j}\Big(\int_0^1 e^{-j(2\pi k-\pi)t}dt - \int_0^1 e^{-j(2\pi k+\pi)t}dt\Big) && (5)\\
&= \frac{1}{2j}\Big(\int_0^1 e^{-j(\pi(2k-1))t}dt - \int_0^1 e^{-j(\pi(2k+1))t}dt\Big) && (6)\\
&= \frac{1}{2j}\Big(\frac{1}{-j\pi(2k-1)}e^{-j(\pi(2k-1))t}\Big]_0^1 - \frac{1}{-j\pi(2k+1)}e^{-j(\pi(2k+1))t}\Big]_0^1\Big) && (7)\\
&= \frac{1}{-j^2 2\pi(2k-1)}\Big(e^{-j(\pi(2k-1))} - 1\Big) - \frac{1}{-j^2 2\pi(2k+1)}\Big(e^{-j(\pi(2k+1))} - 1\Big) && (8)\\
&= \frac{1}{2\pi(2k-1)}\Big(e^{-j(\pi(2k-1))} - 1\Big) - \frac{1}{2\pi(2k+1)}\Big(e^{-j(\pi(2k+1))} - 1\Big) && (9)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi(2k-1)}\Big((e^{-j\pi})^{2k-1} - 1\Big) - \frac{1}{2\pi(2k+1)}\Big((e^{-j\pi})^{2k+1} - 1\Big) \tag{10}$$

Ο αριθμός $2k \pm 1$ είναι περιττός για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Έτσι

$$X_k = \frac{1}{2\pi(2k-1)}\Big((e^{-j\pi})^{2k-1} - 1\Big) - \frac{1}{2\pi(2k+1)}\Big((e^{-j\pi})^{2k+1} - 1\Big) \tag{11}$$

$$= \frac{1}{2\pi(2k-1)}\Big((-1)^{2k-1} - 1\Big) - \frac{1}{2\pi(2k+1)}\Big((-1)^{2k+1} - 1\Big) \tag{12}$$

$$= \frac{1}{2\pi(2k-1)}\Big(-1-1\Big) - \frac{1}{2\pi(2k+1)}\Big(-1-1\Big) \tag{13}$$

$$= \frac{-2}{2\pi(2k-1)} - \frac{-2}{2\pi(2k+1)} = \frac{1}{\pi(2k+1)} - \frac{1}{\pi(2k-1)} \tag{14}$$

$$= \frac{2\pi k - 1 - 2\pi k - 1}{\pi(2k-1)(2k+1)} = \frac{-2}{\pi((2k)^2-1)} \tag{15}$$

$$= \frac{2}{\pi(1-4k^2)} \tag{16}$$

(γ') Η σχεδίαση μπορεί να γίνει υπολογίζοντας πρώτα τα X_k για $k > 0$ και βρίσκοντας το μέτρο και τη φάση τους, θα σχεδιάσουμε το φάσμα πλάτους και φάσης για $k > 0$. Στη συνέχεια λόγω συμμετρίας (το σήμα $x(t)$ είναι πραγματικό, άρα θα έχει άρτιο και περιττό φάσμα πλάτους και φάσης, αντίστοιχα), μπορούμε να σχεδιάσουμε τα φάσματα για $k < 0$. Οπότε για $k > 0$

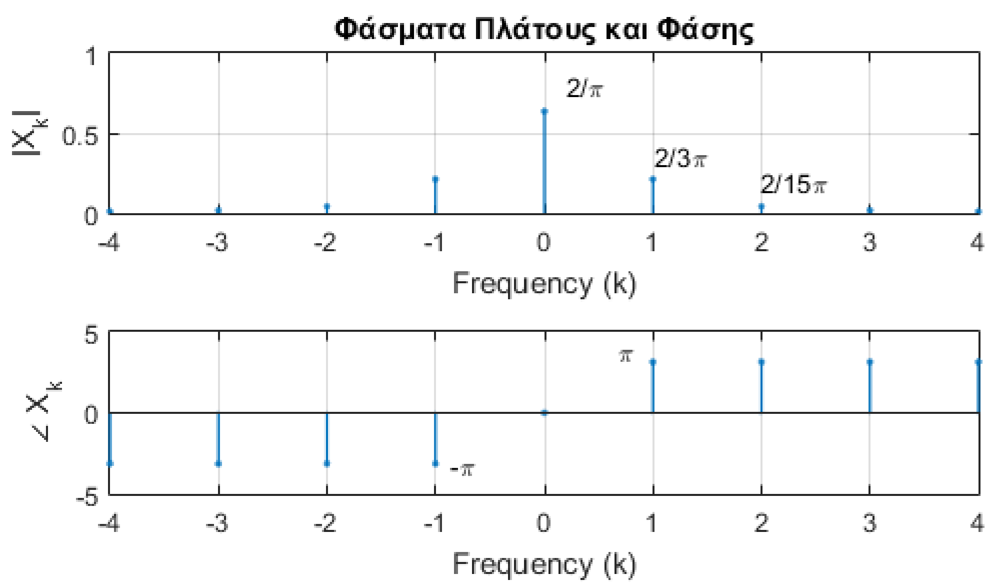
$$X_k = \frac{2}{\pi(1-4k^2)} = -\frac{2}{\pi(4k^2-1)} = \frac{2}{\pi(4k^2-1)}e^{j\pi} \tag{17}$$

και άρα

$$|X_k| = \frac{2}{\pi(4k^2-1)} \tag{18}$$

$$\phi_k = \pi \tag{19}$$

για $k > 0$, ενώ για $k = 0$, $X_0 = \frac{2}{\pi}$. Τα φάσματα φαίνονται στο Σχήμα 2.



Σχήμα 2: *Φάσματα άσκησης 1.*

Ασκηση 2 - Σειρά Fourier II

Έστω το περιοδικό σήμα $x(t)$ με περίοδο $T_0 = 2$, που σε μια περίοδό του εκφράζεται ως

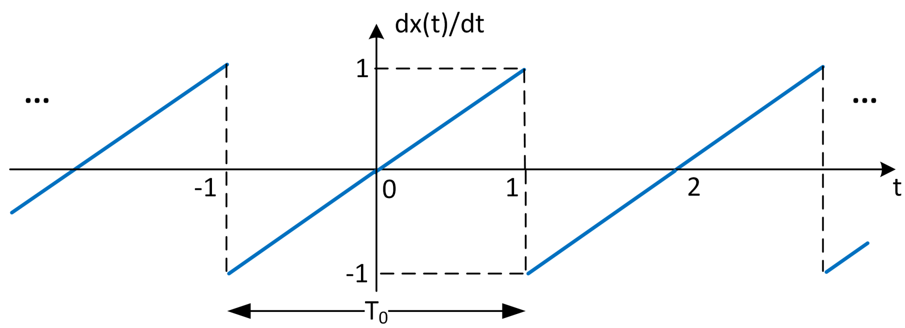
$$x_{T_0}(t) = \frac{t^2}{2}, \quad -\frac{T_0}{2} < t < \frac{T_0}{2} \tag{20}$$

(α') Δεδομένου ότι ένας αναλυτικός υπολογισμός είναι χρονοβόρος, υπολογίστε αναλυτικά την εκθετική Σειρά Fourier του μέσω της ιδιότητας της παραγώγισης - ολοκλήρωσης και γνωστές Σειρές Fourier που έχετε διδαχθεί στο μάθημα. Μια σχεδίαση τόσο του $x(t)$ όσο και της παραγώγου του, $dx(t)/dt$, θα σας βοηθήσει πολύ.

(β') Σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης χρησιμοποιώντας μόνο τα $k = \pm 4, \pm 3, \pm 2, \pm 1, 0$.

Λύση:

(α') Η παράγωγος του σήματος $x(t)$ φαίνεται στο Σχήμα 3. Αυτό το σήμα είναι γνωστό σήμα από τις σημειώσεις και έχει



Σχήμα 3: *Παράγωγος σήματος άσκησης 2.*

συντελεστές Fourier

$$X_k^d = \frac{1}{\pi k}(-1)^k e^{j\pi/2} \tag{21}$$

Οι συντελεστές του αρχικού σήματος δίνονται από την ιδιότητα της ολοκλήρωσης, και είναι

$$X_k = \frac{1}{j2\pi k f_0} X_k^d = \frac{1}{j2\pi k f_0}\frac{1}{\pi k}(-1)^k e^{j\pi/2} \tag{22}$$

$$= \frac{1}{j2\pi k \frac{1}{2}}\frac{1}{\pi k}(-1)^k e^{j\pi/2} = \frac{1}{j\pi^2 k^2}(-1)e^{j\pi/2} \tag{23}$$

$$= e^{-j\pi/2}\frac{1}{\pi^2 k^2}(-1)^k e^{j\pi/2} = \frac{1}{\pi^2 k^2}(-1)^k \tag{24}$$

κι επίσης

$$X_0 = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{t^2}{2}dt = \frac{1}{4}\frac{t^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{4}\frac{2}{3} = \frac{1}{6} \tag{25}$$

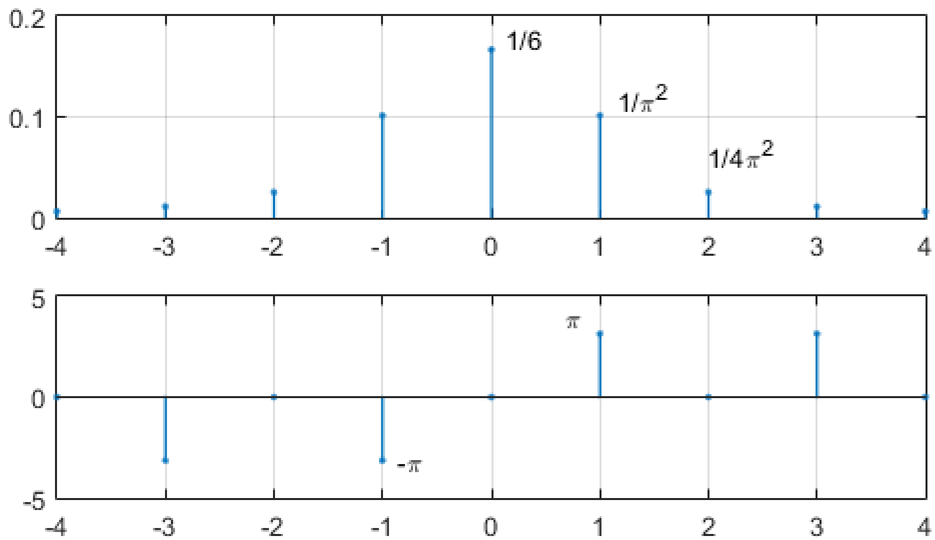
(β') Η σχεδίαση μπορεί να γίνει υπολογίζοντας πρώτα τα X_k για $k > 0$ και βρίσκοντας το μέτρο και τη φάση τους, θα σχεδιάσουμε το φάσμα πλάτους και φάσης για $k > 0$. Στη συνέχεια λόγω συμμετρίας (το σήμα $x(t)$ είναι πραγματικό, άρα θα έχει άρτιο και περιττό φάσμα πλάτους και φάσης, αντίστοιχα), μπορούμε να σχεδιάσουμε τα φάσματα για $k < 0$. Οπότε για $k > 0$

$$X_k = \frac{1}{\pi^2 k^2}(-1)^k = \begin{cases} \frac{1}{\pi^2 k^2}, & k \text{ άρτια} \\ -\frac{1}{\pi^2 k^2}, & k \text{ περιττά} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{\pi^2 k^2}, & k \text{ άρτια} \\ \frac{1}{\pi^2 k^2}e^{j\pi}, & k \text{ περιττά} \end{cases} \tag{26}$$

και άρα

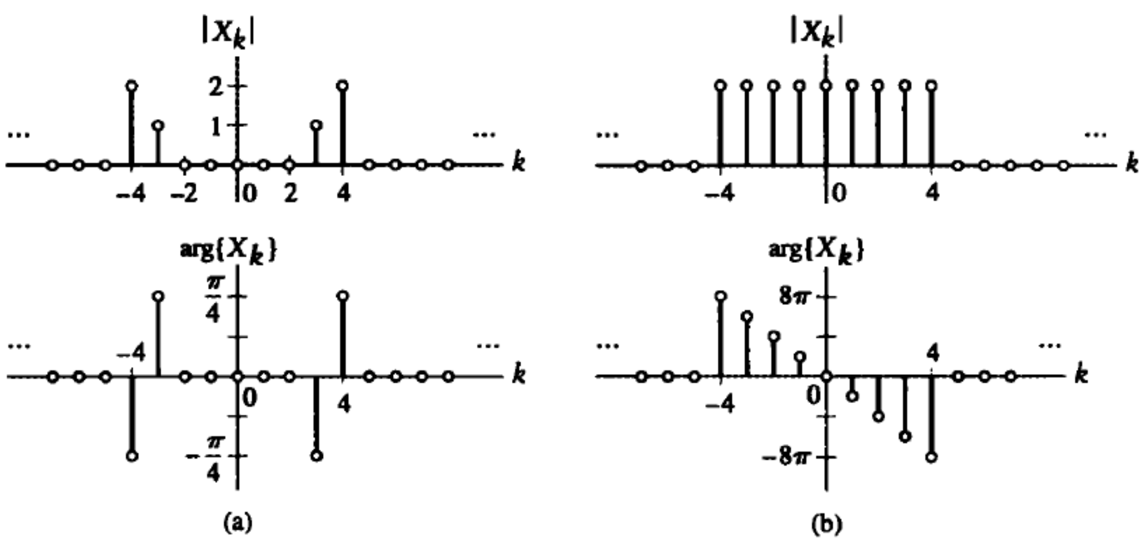
$$|X_k| = \frac{1}{\pi^2 k^2} \tag{27}$$
$$\phi_k = \pi \tag{28}$$

για $k > 0$. Τα φάσματα φαίνονται στο Σχήμα 4.



Σχήμα 4: *Φάσματα άσκησης 2.*

Ασκηση 3 - Σειρές Fourier III
Θεωρήστε τα ζεύγη φάσματος πλάτους και φάσης του Σχήματος 5, με $|X_k|$ το φάσμα πλάτους και $\arg\{X_k\}$ το φάσμα φάσης, ενώ ο οριζόντιος άξονας και των δυο συμβολίζει το δείκτη k των συντελεστών X_k. Έστω ότι οι περίοδοι για τα



Σχήμα 5: *Φάσματα πλάτους και φάσης Άσκησης 3.*

δυο σήματα είναι $T_0^{(a)} = 2$ και $T_0^{(b)} = 1$. Βρείτε τις Σειρές Fourier στο πεδίο του χρόνου στις οποίες αντιστοιχούν[1].

[1] Μη σας απασχολεί ότι η φάση του (b) δε βρίσκεται στο $(-\pi, \pi]$ όπως γνωρίζουμε.

Λύση:

(α΄) Για τα φάσματα (α) έχουμε

$$x(t) = 2e^{-j\pi/4}e^{-j2\pi 4\frac{1}{2}t} + 1e^{j\pi/4}e^{-j2\pi 3\frac{1}{2}t} + 1e^{-j\pi/4}e^{j2\pi 3\frac{1}{2}t} + 2e^{j\pi/4}e^{j2\pi 4\frac{1}{2}t} \tag{29}$$

$$= 4\cos\left(2\pi 2t + \frac{\pi}{4}\right) + 2\cos\left(2\pi\frac{3}{2}t - \frac{\pi}{4}\right) \tag{30}$$

(β΄) Για τα φάσματα (β) έχουμε ότι $|X_k| = 1$ και $\phi_k = -2\pi k$, για $-4 \leq k \leq 4$. Οπότε, γνωρίζοντας ότι

$$\sum_{k=N_1}^{N_2} a^k = \frac{a^{N_1} - a^{N_2+1}}{1-a} \tag{31}$$

θα έχουμε

$$x(t) = \sum_{k=-4}^{4} X_k e^{j2\pi k f_0 t} = \sum_{k=-4}^{4} e^{-j2\pi k} e^{j2\pi k t} = \sum_{k=-4}^{4} e^{j(2\pi k(t-1))} \tag{32}$$

$$= \frac{e^{-j8\pi(t-1)} - e^{j10\pi(t-1)}}{1 - e^{j2\pi(t-1)}} = \frac{e^{-j8\pi t} - e^{j10\pi t}}{1 - e^{j2\pi t}} \tag{33}$$

$$= \frac{e^{j\pi t}}{e^{j\pi t}} \frac{e^{-j9\pi t} - e^{j9\pi t}}{e^{-j\pi t} - e^{j\pi t}} = \frac{-2j\sin(9\pi t)}{-2j\sin(\pi t)} \tag{34}$$

$$= \frac{\sin(9\pi t)}{\sin(\pi t)} \tag{35}$$

Ασκηση 4 - Σειρές Fourier - Ιδιότητες Ι

Έστω ότι για ένα περιοδικό σήμα $x(t)$ μας δίνονται οι παρακάτω πληροφορίες:

- είναι πραγματικό και περιττό
- έχει περιόδο $T_0 = 2$ και συντελεστές Fourier X_k
- ισχύει $X_k = 0$ για $|k| > 1$
- ισχύει $\frac{1}{2}\int_0^2 |x(t)|^2 dt = 1$

Βρείτε δυο σήματα που ικανοποιούν τις παραπάνω προδιαγραφές.

Λύση:

Αφού το σήμα είναι πραγματικό ($X_k = X_k^*$) και έχει συντελεστές X_k μόνο για $|k| \leq 1$, θα είναι της μορφής

$$x(t) = X_1^* e^{-j2\pi\frac{1}{2}t} + X_0 + X_1 e^{j2\pi\frac{1}{2}t} \tag{36}$$

Επιπλέον, αφού είναι περιττό, τότε οι συντελεστές X_k θα είναι καθαρά φανταστικοί αριθμοί, δηλ.

$$X_k \in \Im \tag{37}$$

Θα είναι λοιπόν της μορφής $X_k = jb(k)$, με $b(k) \in \Re$. Λόγω της σχέσης $X_{-k} = X_k^*$ έχουμε $jb(-k) = -jb(k) \iff X_{-k} = -X_k$, δηλ.

$$X_k = -X_{-k} \tag{38}$$

Από την παραπάνω σχέση παίρνουμε ότι $X_0 = 0$. Από τη σχέση του ολοκληρώματος - που αποτελεί το θεώρημα του Parseval - θα έχουμε

$$\frac{1}{2}\int_0^2 |x(t)|^2 dt = 1 \iff \sum_{k=-1}^{1} |X_k|^2 = 1 \iff 2|X_1|^2 + |X_0|^2 = 1 \tag{39}$$

$$\iff 2|X_1|^2 = 1 \tag{40}$$

$$\iff |X_1| = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{41}$$

$$\iff X_1 = \pm j\frac{1}{\sqrt{2}} \tag{42}$$

$$\tag{43}$$

Έτσι, αν $X_1 = j\frac{1}{\sqrt{2}}$, τότε $-X_{-1} = X_1 = j\frac{1}{\sqrt{2}}$, και αν $X_1 = -j\frac{1}{\sqrt{2}}$, τότε $-X_{-1} = X_1 = -j\frac{1}{\sqrt{2}}$. Τα δυο σήματα που ικανοποιούν τα παραπάνω είναι τα

$$x_1(t) = \frac{1}{j\sqrt{2}}e^{j\pi t} - \frac{1}{j\sqrt{2}}e^{-j\pi t} = \sqrt{2}\sin(\pi t) \tag{44}$$

$$x_2(t) = -\frac{1}{j\sqrt{2}}e^{j\pi t} + \frac{1}{j\sqrt{2}}e^{-j\pi t} = -\sqrt{2}\sin(\pi t) \tag{45}$$

Ασκηση 5 - Σειρές Fourier - Ιδιότητες ΙΙ

Έστω ένα περιοδικό σήμα με συντελεστές Fourier

$$X_k = \begin{cases} 2, & k = 0 \\ j\left(\frac{1}{2}\right)^{|k|}, & k \neq 0 \end{cases} \tag{46}$$

Χρησιμοποιήστε ιδιοτητες για να αποφανθειτε για τα παρακάτω:

(α΄) Είναι το περιοδικό σήμα $x(t)$ πραγματικό;

(β΄) Είναι το περιοδικό σήμα $x(t)$ συζυγώς συμμετρικό; (δηλ. ισχύει $x(t) = x^*(-t)$;)

(γ΄) Είναι το περιοδικό σήμα $dx(t)/dt$ συζυγώς συμμετρικό; (δηλ. ισχύει $x'(t) = x'^*(-t)$;)

<u>Λύση</u>:

(α΄) Για να είναι πραγματικό, θα πρέπει $X_k = X^*_{-k}$, οπότε

$$X^*_{-k} = \begin{cases} 2, & k = 0 \\ \left(j\left(\frac{1}{2}\right)^{|-k|}\right)^*, & k \neq 0 \end{cases} = \begin{cases} 2, & k = 0 \\ -j\left(\frac{1}{2}\right)^{|k|}, & k \neq 0 \end{cases} \neq X_k \tag{47}$$

και άρα δεν είναι πραγματικό.

(β΄) Για να είναι συζυγώς συμμετρικό, θα πρέπει να "μεταφράσουμε" τη σχέση αυτή στο χώρο των συντελεστών Fourier, δηλ.

$$x(t) = x^*(-t) \longleftrightarrow X_k = X_k^* \tag{48}$$

από τον πίνακα με τις ιδιότητες. Η παραπάνω σχέση σημαίνει ότι οι συντελεστές Fourier είναι πραγματικοί αριθμοί. Ξεκάθαρα δεν είναι, οπότε το σήμα δεν είναι συζυγώς συμμετρικό.

(γ') Για να είναι το $dx(t)/dt$ συζυγώς συμμετρικό, θα πρέπει να "μεταφράσουμε" τη σχέση αυτή στο χώρο των συντελεστών Fourier. Αν X_k^d είναι οι συντελεστές της παραγώγου του σήματος, τότε

$$X_k^d = X_k^{d*} \tag{49}$$

ακριβώς όπως πριν. Ξανά, αυτό σημαίνει ότι οι συντελεστές Fourier της παραγώγου του σήματος είναι πραγματικοί αριθμοί. Άρα

$$X_k^d = \begin{cases} j4\pi k f_0, & k=0 \\ j2\pi k f_0 j\left(\frac{1}{2}\right)^{|k|}, & k \neq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & k=0 \\ -2\pi k f_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{|k|}, & k \neq 0 \end{cases} \tag{50}$$

που είναι πραγματικοί αριθμοί. Άρα η παράγωγος είναι συζυγώς συμμετρικό σήμα.

Ασκηση 6 - Σειρές Fourier - Ιδιότητες III

Υπολογίστε το άθροισμα

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(k\pi/8)}{k^2} \tag{51}$$

αν γνωρίζετε ότι

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq t_c \\ 0, & t_c < |t| \leq T_0/2 \end{cases} \longleftrightarrow X_k = \frac{\sin(2\pi k f_0 t_c)}{\pi k}, \; X_0 = \frac{2t_c}{T_0} \tag{52}$$

<u>Λύση</u>:

Από το θεώρημα του Parseval, θα έχουμε

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(2\pi k f_0 t_c)}{\pi^2 k^2} = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x^2(t)dt \tag{53}$$

Για $t_c = \frac{T_0}{16}$, έχουμε (σχεδόν) το ζητούμενο άθροισμα. Από την τελευταία σχέση θα έχουμε

$$\frac{1}{T_0}\int_{T_0} x^2(t)dt = \frac{1}{T_0}\int_{-t_c}^{t_c} 1^2 dt = \frac{1}{T_0} t\Big|_{-T_0/16}^{T_0/16} = \frac{1}{8} \tag{54}$$

δηλ.

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi k/8)}{\pi^2 k^2} = \frac{1}{8} \tag{55}$$

Οπότε για αυτήν την τιμή του t_c έχουμε

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi k/8)}{k^2} = \frac{\pi^2}{8} \tag{56}$$

Ασκηση 7 - Συντελεστές Fourier I

Ενα σήμα με περίοδο T_0 λέγεται ότι έχει "συμμετρία μισού κύματος " αν ικανοποιεί τη σχέση

$$x(t) = -x\left(t - \frac{T_0}{2}\right) \tag{57}$$

Αυτό σημαίνει ότι το μισό της μιας περιόδου του σήματος ειναι το αρνητικό του άλλου μισού. Δείξτε ότι οι συντελεστές Σειράς Fourier που αντιστοιχούν στους άρτιους συντελεστές X_{2k}, είναι μηδέν για τα σήματα με μισού-κύματος συμμετρία.

Λύση:
Έχουμε

$$
\begin{aligned}
X_{2k} &= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-j2\pi(2k)f_0t}dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} x(t)e^{-j2\pi(2k)f_0t}dt + \frac{1}{T_0}\int_{T_0/2}^{T_0} -x(t-T_0/2)e^{-j2\pi(2k)f_0t}dt && (58)\\
&= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} x(t)e^{-j2\pi(2k)f_0t}dt - \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} x(u)e^{-j2\pi(2k)f_0(u+T_0/2)}du && (59)\\
&= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} x(t)e^{-j2\pi(2k)f_0t}dt - \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} x(u)e^{-j2\pi(2k)f_0u}e^{-j2\pi(2k)f_0T_0/2}du && (60)\\
&= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} x(t)e^{-j2\pi(2k)f_0t}dt - \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} x(u)e^{-j2\pi(2k)f_0u}e^{-j2\pi k}du && (61)\\
&= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} x(t)e^{-j2\pi(2k)f_0t}dt - \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} x(u)e^{-j2\pi(2k)f_0u}du && (62)\\
&= 0 && (63)
\end{aligned}
$$

Ασκηση 8 - Σειρές Fourier - Ιδιότητες IV
Έστω το περιοδικό σήμα $x(t)$ που σε μια περίοδό του γράφεται ως

$$x(t) = t^2,\ \ -\pi < t < \pi \tag{64}$$

Αποδείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90} \tag{65}$$

Λύση:
Για το σήμα της εκφώνησης έχουμε

$$P_x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^4dt = \frac{1}{2\pi}\frac{t^5}{5}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\frac{2\pi^5}{5} = \frac{\pi^4}{5} \tag{66}$$

Από το θεώρημα του Parseval θα έχουμε

$$|X_0|^2 + \sum_{k=-\infty,k\neq 0}^{+\infty}|X_k|^2 = \frac{\pi^4}{5} \tag{67}$$

και

$$X_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2dt = \frac{1}{2\pi}\frac{t^3}{3}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\frac{2\pi^3}{3} = \frac{\pi^2}{3} \tag{68}$$

ενώ για τους συντελεστές του περιοδικού σήματος, παρατηρούμε ότι αν το παραγωγίσουμε παίρνουμε το σήμα

$$\frac{d}{dt}x(t) = 2t,\ \ -\pi < t < \pi \tag{69}$$

του οποίου γνωρίζουμε τους συντελεστές Fourier ως

$$X_k^d = \frac{2\pi}{\pi k}(-1)^k e^{j\pi/2} = \frac{2}{k}(-1)^k e^{j\pi/2},\ \ \forall k \tag{70}$$

Άρα οι συντελεστές του αρχικού σήματος θα είναι

$$X_k = \frac{1}{j2\pi k f_0}X_k^d = \frac{1}{j2\pi k f_0}\frac{2}{k}(-1)^k e^{j\pi/2} = \frac{2}{k^2}(-1)^k,\ \ \forall k \tag{71}$$

Οπότε

$$|X_0|^2 + \sum_{k=-\infty, k\neq 0}^{+\infty} |X_k|^2 = \frac{\pi^4}{5} \tag{72}$$

$$\frac{\pi^4}{9} + \sum_{k=-\infty, k\neq 0}^{+\infty} |X_k|^2 = \frac{\pi^4}{5} \tag{73}$$

$$\sum_{k=-\infty, k\neq 0}^{+\infty} |X_k|^2 = \frac{\pi^4}{5} - \frac{\pi^4}{9} \tag{74}$$

$$\sum_{k=-\infty, k\neq 0}^{+\infty} \frac{4}{k^4} = \frac{\pi^4}{5} - \frac{\pi^4}{9} \tag{75}$$

Η ακολουθία $1/k^4$ είναι άρτια, οπότε

$$\sum_{k=-\infty, k\neq 0}^{+\infty} \frac{4}{k^4} = \frac{\pi^4}{5} - \frac{\pi^4}{9} \tag{76}$$

$$2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{k^4} = \frac{4\pi^4}{45} \tag{77}$$

$$8\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{4\pi^4}{45} \tag{78}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{4\pi^4}{360} \tag{79}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90} \tag{80}$$

που είναι και το ζητούμενο.

Ασκηση 9 - Συντελεστές Fourier II

Δείξτε ότι ένα *μιγαδικό* περιοδικό σήμα $x(t)$ για το οποίο ισχύει $x(t) = x(-t)$, ικανοποιείται η συνθήκη

$$X_k = X_{-k} \tag{81}$$

Λύση:

Θα είναι

$$X_{-k} = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-j2\pi(-k)f_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{j2\pi k f_0 t}dt \tag{82}$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(-t)e^{j2\pi k f_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0}^{0} x(u)e^{j2\pi k f_0(-u)}du \tag{83}$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{-T_0}^{0} x(u)e^{-j2\pi k f_0 u}du = X_k \tag{84}$$

και άρα ισχύει το ζητούμενο.