HY215 Φροντιστήριο 3 – Σειρές Fourier

15/3/2024

Ασκηση 2 - Σειρά Fourier II

Έστω το περιοδικό σήμα $x(t)$ με περίοδο $T_0 = 2$, που σε μια περίοδό του εκφράζεται ως

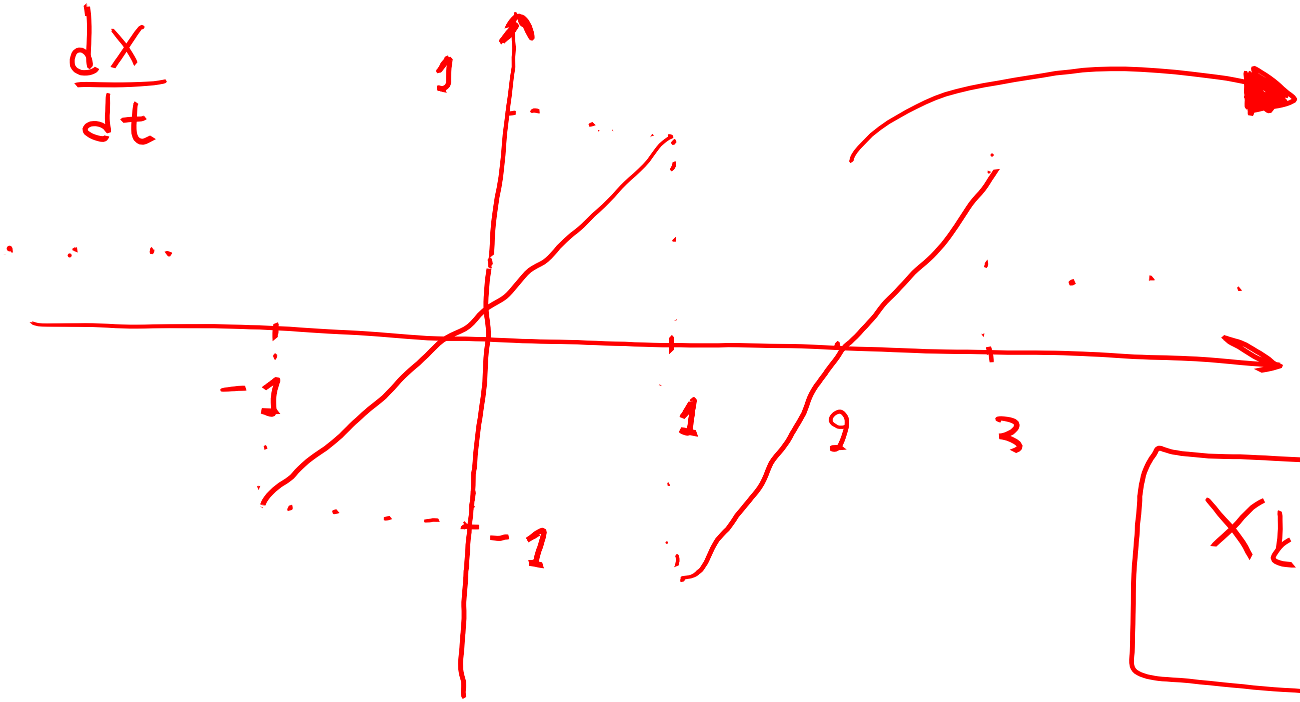
$$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2}$$

$$x_{T_0}(t) = \frac{t^2}{2}, \quad -\frac{T_0}{2} < t < \frac{T_0}{2} \qquad -1 < t < 1 \tag{20}$$

(α') Δεδομένου ότι ένας αναλυτικός υπολογισμός είναι χρονοβόρος, υπολογίστε αναλυτικά την εκθετική Σειρά Fourier του μέσω της ιδιότητας της παραγώγισης - ολοκλήρωσης και γνωστές Σειρές Fourier που έχετε διδαχθεί στο μάθημα. Μια σχεδίαση τόσο του $x(t)$ όσο και της παραγώγου του, $dx(t)/dt$, θα σας βοηθήσει πολύ.

(β') Σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης χρησιμοποιώντας μόνο τα $k = \pm 4, \pm 3, \pm 2, \pm 1, 0$.

$\frac{dx}{dt}$



$$X_k^d = \frac{1}{\pi k}(-1)^k e^{j\pi/2}$$

Από την ιδιότητα ολοκλήρωσης:

$$\boxed{X_k = \frac{1}{j2\pi k f_0} X_k^d}$$

$$X_k = \frac{1}{j2\pi k f_0} \cdot \frac{1}{\pi k}(-1)^k e^{j\pi/2} = \frac{1}{j2\pi k \frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\pi k}(-1)^k e^{j\pi/2} = \frac{1}{j\pi^2 k^2}(-1)^k e^{j\pi/2} =$$

$$\frac{1}{j\pi^2k^2}\cdot(-1)^k e^{j\pi/2} = \frac{1}{\pi^2k^2}(-1)^k \cancel{e^{j\frac{\pi}{2}} e^{-j\frac{\pi}{2}}}^{\,1} = \boxed{\frac{1}{\pi^2k^2}(-1)^k}$$

$$\left\{ \frac{1}{j} = e^{-j\frac{\pi}{2}} \right.$$

$$X_0 = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{t^2}{2}\,dt = \frac{1}{4}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

$$\boxed{X_k = \frac{1}{\pi^2k^2}(-1)^k \quad \forall k \neq 0}, \quad \boxed{X_0 = \frac{1}{6}}$$

$$x(t) = X_0 + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{+\infty} |X_k|\, e^{-j2\pi k f_0 t}$$

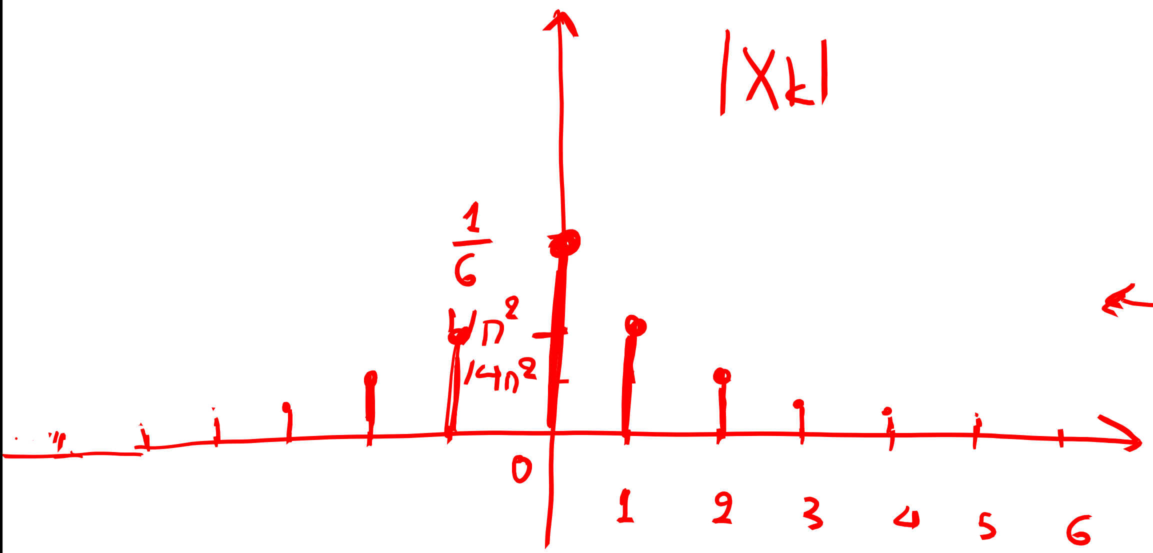
$$X_k = \frac{1}{\pi^2 k^2}(-1)^k = \begin{cases} \frac{1}{\pi^2 k^2}, & k \text{ άρτια} \\ -\frac{1}{\pi^2 k^2}, & k \text{ περιττά} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{\pi^2 k^2}, & k \text{ άρτια} \\ \frac{1}{\pi^2 k^2} e^{j\pi}, & k \text{ περιττά} \end{cases}$$

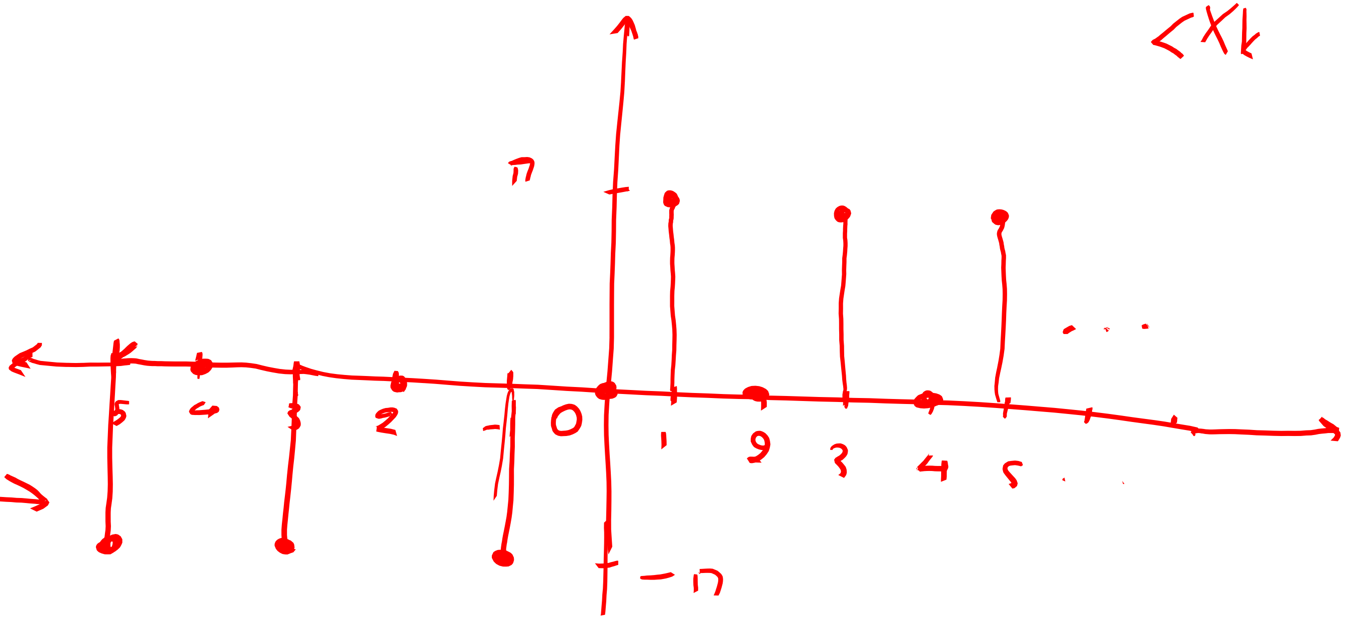
$k>0$

$$|e^{j\pi}| = 1$$

$$|X_k| = \frac{1}{\pi^2 k^2}, \quad k>0$$

$$\phi_k = \begin{cases} 0, & k \text{ άρτια} \\ \pi, & k \text{ περιττά} \end{cases}, \quad k>0$$





Ασκηση 4 - Σειρές Fourier - Ιδιότητες I

Έστω ότι για ένα περιοδικό σήμα $x(t)$ μας δίνονται οι παρακάτω πληροφορίες:

- είναι πραγματικό και περιττό
- έχει περιόδο $T_0 = 2$ και συντελεστές Fourier X_k → $f_0 = \frac{1}{2}$
- ισχύει $X_k = 0$ για $|k| > 1$
- ισχύει $\boxed{\frac{1}{2}\int_0^2 |x(t)|^2 dt = 1}$

Βρείτε δυο σήματα που ικανοποιούν τις παραπάνω προδιαγραφές.

Επειδή είναι περιττό τότε

$X_k \in I$

$X_k = j\,b(k)$, $b(k) \in R$

Πραγματικό: $\boxed{X_k = X^*_{-k}}$

$|k| \leq 1$

$$x(t) = X_0 + X_1 e^{j2\pi\frac{1}{2}t} + \underbrace{X_{-1} e^{-j2\pi\frac{1}{2}t}}_{X_1^* e^{-j2\pi\frac{1}{2}t}} = \boxed{X_0 + X_1 e^{j2\pi\frac{1}{2}t} + X_1^* e^{-j2\pi\frac{1}{2}t}}$$

$$x(t) = X_0 + \sum_{\substack{k=-1 \\ k\neq 0}}^{1} X_k e^{j2\pi k f_0 t} = X_0 + X_{-1} e^{-j2\pi f_0 t} + X_1 e^{j2\pi f_0 t} =$$

$$= \boxed{X_0 + X_1^* e^{-j2\pi f_0 t} + X_1 e^{j2\pi f_0 t}}$$

$X_{-k} = X_k^*$ $\quad jb(-k) = -jb(k) \Leftrightarrow X_{-k} = -X_k$ άρα $\boxed{X_k = -X_{-k}}$ $\boxed{X_0 = 0}$

$$\frac{1}{2}\int_0^2 |x(t)|^2 dt = 1 \Leftrightarrow \sum_{k=-1}^{1} |X_k|^2 = 1 \Leftrightarrow |\underline{X_1}|^2 + |\underline{X_0}|^2 + |\underline{X_{-1}}|^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2|X_1|^2 + \cancel{|X_0|^2}^{\,0} = 1 \Leftrightarrow 2|X_1|^2 = 1 = |X_1|^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \boxed{X_1 = \pm\frac{1}{j\sqrt{2}}}$$

Αν $X_1 = j\frac{1}{\sqrt{2}}$ τότε $-X_{-1} = X_1 = j\frac{1}{\sqrt{2}}$

Αν $X_1 = -j\frac{1}{\sqrt{2}}$ τότε $-X_{-1} = X_1 = -j\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$x_1(t) = \frac{1}{j\sqrt{2}} e^{j\cancel{2}\pi \underbrace{\cancel{f_0}}_{\frac{1}{2}} t} - \frac{1}{j\sqrt{2}} e^{-j2\pi \underbrace{f_0}_{\frac{1}{2}} t} = \frac{1}{j\sqrt{2}} e^{j\pi t} - \frac{1}{j\sqrt{2}} e^{-j\pi t} =$$

$$= \sqrt{2}\sin(\pi t), \quad x_2(t) = -j\frac{1}{\sqrt{2}} e^{j\pi t} + j\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j\pi t} = -\sqrt{2}\sin(\pi t)$$

Ασκηση 5 - Σειρές Fourier - Ιδιότητες ΙΙ

Έστω ένα περιοδικό σήμα με συντελεστές Fourier

$$X_k = \begin{cases} 2, & k = 0 \\ j\left(\frac{1}{2}\right)^{|k|}, & k \neq 0 \end{cases} \tag{46}$$

Χρησιμοποιήστε ιδιοτητες για να αποφανθειτε για τα παρακάτω:

(α') Είναι το περιοδικό σήμα $x(t)$ πραγματικό;

(β') Είναι το περιοδικό σήμα $x(t)$ συζυγώς συμμετρικό; (δηλ. ισχύει $x(t) = x^*(-t)$;)

(γ') Είναι το περιοδικό σήμα $dx(t)/dt$ συζυγώς συμμετρικό; (δηλ. ισχύει $x'(t) = x'^*(-t)$;)

α) Αν x(t) πραγματικό τότε $X_k = X^*_{-k}$

$$X^*_{-k} = \begin{cases} 2, & k = 0 \\ -j\left(\frac{1}{2}\right)^{|-k|}, & k \neq 0 \end{cases} = \begin{cases} 2, & k = 0 \\ -j\left(\frac{1}{2}\right)^{|k|}, & k \neq 0 \end{cases} \neq X_k$$ άρα όχι πραγματικό

β) $x(t) = x^*(-t) \longleftrightarrow X_k = X_k^*$

δεν είναι συζυγώς συμμετρικό επειδή $X_k \neq X_k^*$

γ) $\underline{x'(t) = x'^{*}(-t)} \longleftrightarrow \underbrace{X_k^d = X_k^{d*}} \rightarrow$ οι X_k^d είναι πραγματικοί αριθμοί.

Αν $x'(t) \longleftrightarrow X_k^d$

$x'^{*}(-t) = X_k^{d*}$

$$X_k^d = \begin{cases} \underline{2}\; j\,\underline{2\pi k f_0}, & k=0 \\ j 2\pi k f_0\, j \left(\frac{1}{2}\right)^{|k|}, & k \neq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & k=0 \\ -2\pi k f_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{|k|}, & k \neq 0 \end{cases} \in \mathbb{R}$$

Άρα $\frac{dx(t)}{dt}$ είναι συζυγώς συμμετρικό

Ασκηση 7 - Συντελεστές Fourier I

Ενα σήμα με περίοδο T_0 λέγεται ότι έχει "συμμετρία μισού κύματος" αν ικανοποιεί τη σχέση

$$\underline{x(t) = -x\left(t - \frac{T_0}{2}\right)} \quad (57)$$

$$f_0 = \frac{1}{T_0} \Leftrightarrow \underline{f_0 \cdot T_0 = 1}$$

Αυτό σημαίνει ότι το μισό της μιας περιόδου του σήματος ειναι το αρνητικό του άλλου μισού. Δείξτε ότι οι συντελεστές Σειράς Fourier που αντιστοιχούν στους άρτιους συντελεστές X_{2k}, είναι μηδέν για τα σήματα με μισού-κύματος συμμετρία.

$$X_{2k} = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\, e^{-j2\pi(2k)f_0 t}\, dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} x(t)\, e^{-j2\pi(2k)f_0 t}\, dt +$$

$$+ \frac{1}{T_0}\int_{\frac{T_0}{2}}^{T_0} -x\underline{\left(t - \frac{T_0}{2}\right)}\, e^{-j2\pi(2k)f_0 t}\, dt =$$

$$\boxed{\text{αλλαγή μεταβλητής } u = t - \frac{T_0}{2}}$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} x(t)\, e^{-j2\pi(2k)f_0 t}\, dt - \frac{1}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} x(u)\, e^{-j2\pi(2k)f_0\left(\underline{u} + \underline{\frac{T_0}{2}}\right)}\, du =$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} x(t)\, e^{-j2\pi(2k)f_0 t}\, dt - \frac{1}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} x(u)\, e^{-j2\pi(2k)f_0 u}\, e^{-j\pi(2k)\cancelto{1}{f_0 T_0}}\, du =$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} x(t)\, e^{-j2\pi(2k)f_0 t}\, dt - \frac{1}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} x(u)\, e^{-j2\pi(2k)f_0 u}\, \underbrace{e^{-j2\pi k}}_{1}\, du =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} x(t)\, e^{-j2\pi(2k)f_0 t}\, dt}\; - \underbrace{\frac{1}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} x(u)\, e^{-j2\pi(2k)f_0 u}\, du}_{u=t \text{ χωρίς βλάβη γενικότητας}} = \boxed{0}$$

Ασκηση 8 - Σειρές Fourier - Ιδιότητες IV

Έστω το περιοδικό σήμα $x(t)$ που σε μια περίοδό του γράφεται ως

$$x(t) = t^2, \quad -\pi < t < \pi \tag{64}$$

$$T_0 = \frac{1}{f_0} \Leftrightarrow f_0 = \frac{1}{2\pi}$$

Αποδείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90} \tag{65}$$

$$P_x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |t^2|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^4 dt = \frac{1}{2\pi} \left.\frac{t^5}{5}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi^5}{5} + \frac{\pi^5}{5}\right) = \frac{\pi^5}{5\pi} = \boxed{\frac{\pi^4}{5}}$$

$$\boxed{|X_0|^2 + \sum_{k=-\infty, \neq 0}^{+\infty} |X_k|^2 = \frac{\pi^4}{5}}$$

$$X_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{1}{2\pi} \left.\frac{t^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi^3}{3}\right) = \frac{\cancel{2}\pi^3}{\cancel{2}\pi 3} = \boxed{\frac{\pi^2}{3}} \quad (1)$$

$$x'(t) = 2t, \ -\pi < t < \pi \longleftrightarrow X_k^d = \frac{2\pi}{\pi k}(-1)^k e^{j\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{k}(-1)^k e^{j\frac{\pi}{2}}, \ \forall k$$

$$X_k = \frac{1}{j2\pi k f_0} X_k^d = \frac{1}{\cancel{j}2\pi k f_0} \cdot \frac{2}{k}(-1)^k \cancel{e^{j\frac{\pi}{2}}} = \frac{1}{\pi k^2 f_0}(-1)^k = \frac{2\pi}{\pi k^2}(-1)^k = \boxed{\frac{2}{k^2}(-1)^k}$$

Από $$|X_0|^2 + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{+\infty} |X_k|^2 = \frac{\pi^4}{5} \Leftrightarrow \frac{\pi^4}{9} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{+\infty} |X_k|^2 = \frac{\pi^4}{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{+\infty} |X_k|^2 = \frac{\pi^4}{5} - \frac{\pi^4}{9} \Leftrightarrow \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{+\infty} \left|\frac{2}{k^2}\cdot(-1)^k\right|^2 = \frac{\pi^4}{5} - \frac{\pi^4}{9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{+\infty} \frac{4}{k^4}\cdot \cancel{(-1)^{2k}}^{\,1} = \frac{\pi^4}{5} - \frac{\pi^4}{9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{k^4} = \frac{4\pi^4}{45} \Leftrightarrow 8\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{4\pi^4}{45} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{4\pi^4}{360} = \boxed{\frac{\pi^4}{90}}$$

Η ακολουθία $\frac{1}{k^4}$ είναι άρτια άρα $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = 2\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k^4}$