Φροντιστήριο πριν την πρόοδο

Επιμέλεια: Γιώργος Μάνος

Άσκηση 1 - Βαθμός: 15

Ενα πραγματικό περιοδικό σήμα όταν αναπτυχθεί σε εκθετική σειρά Fourier έχει συντελεστές

$$X_k = [2e^{-j\phi_1}, \sqrt{3}e^{j\phi_2}, 2e^{j\phi_1}, \sqrt{3}e^{-j\phi_2}, e^{j\phi_2}]$$

για $k = 1, 2, 3, 4, 5$.

Πόση είναι η ισχύς του σήματος;

$$|Ae^{j\varphi}| = |A||e^{j\varphi}| = |A| \cdot 1 = |A|$$

$$P = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2$$

$$= |X_0|^2 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} |X_k|^2 = 0^2 + 2\left(2^2 + (\sqrt{3})^2 + 2^2 + (\sqrt{3})^2 + 1^2\right)$$

$$= 2(4+3+4+3+1) = 30$$

Άσκηση 2 - Βαθμός: 10

Ελέγξτε αν το παρακάτω σύστημα είναι γραμμικό, χρονικά αμετάβλητο, ευσταθές, αιτιατό, και δυναμικό

$$y(t) = (t-1)^2 x(1-t) + x^2(-t)$$

Γραμμικότητα: ΟΧΙ (πρέπει να είναι ομογενές και αθροιστικό)

- Ομογενές:

  Για είσοδο $ax(t)$ η έξοδος είναι

  $y_0(t) = (t-1)^2 ax(1-t) + a^2x^2(-t) \neq ay(t)$, με $y(t)$

Δεν είναι ομογενές, άρα δεν είναι γραμμικό.

Χ.Α : <u>ΟΧΙ</u>

Για είσοδο $x(t-t_0)$ η έξοδος είναι

$$y_0(t) = (t-1)^2 x(1-t-t_0) + x^2(-t-t_0)$$

Όμως η καθυστερημένη κατά t_0 έξοδος είναι

$$y(t-t_0) = (t-t_0-1)^2 x(1-(t-t_0)) + x^2(-(t-t_0))$$

$\neq$

Άρα δεν είναι Χ.Α.

Ευσταθής: $|x(t)| < B_x \Longrightarrow |y(t)| < B_y$

ΟΧΙ !

$$|y(t)| = |(t-1)^2 x(1-t) + x^2(-t)| \leq |(t-1)^2|\,|x(1-t)| + |x^2(-t)|$$

$$< |(t-1)|^2 B_x + B_x^2$$

Για $t \to \infty$, η έξοδος δεν είναι απόλυτως φραγμένη

Άρα δεν είναι ευσταθές.

__Αιτιατότητα__: __ΟΧΙ__ : το $y(0)$ εξαρτάται από το $x(1)$, άρα δεν είναι αιτιατό.

μελλοντική τιμή

__Δυναμικότητα__: ΝΑΙ! για το $y(4)$ θέλουμε το $x(-3)$ και το $x^2(-4)$, άρα πρέπει να τα έχουμε αποθηκεύσει κάπου.

Άσκηση 3 - Βαθμός: 20

Ένα σύστημα περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 25y(t) = x(t)$$

και έχει αρχικές συνθήκες $y(0^-) = 1$, $\frac{d}{dt}y(t)\Big|_{t=0^-} = -1$.

i. Βρείτε την κρουστική του απόκριση, $h(t)$.

ii. Βρείτε την απόκριση μηδενικής κατάστασης, $y_{zs}(t)$, για $x(t) = u(t)$.

$$\lambda^2 + 25 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = j5 \ , \ \lambda_2 = -j5$$

$$h(t) = c_1 e^{j5t} + c_2 e^{-j5t}, \quad t > 0$$

Αρχικές συνθήκες:

$$h(0^+) = 0 \ , \ h'(0^+) = 1$$

$$h(t) = c_1 e^{j5t} + c_2 e^{-j5t}, \quad t>0$$

$$\left.\begin{aligned} h(0^+) &= c_1 e^{j5\cdot 0} + c_2 e^{-j5\cdot 0} = c_1 + c_2 = 0 \\ h'(0^+) &= \left[j5c_1 e^{j5t} - j5 e^{-j5t} \right]_{t=0} = j5c_1 - j5c_2 = 1 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad c_1 = \frac{1}{j10}, \quad c_2 = -\frac{1}{j10}$$

Άρα

$$h(t) = \frac{1}{j10} e^{j5t} - \frac{1}{j10} e^{-j5t}, \quad t>0$$

$$= \frac{1}{5} \sin(5t), \quad t>0$$

$$= \frac{1}{5} \sin(5t)\, u(t)$$

Αν

$$y''(t) + 25y(t) = 4x(t) - 2x'(t)$$

τότε

θα είχαμε βρει το $h_0(t)$ του

$$y''(t) + 25y(t) = x(t)$$

όπως δίπλα και μετά

$$h(t) = 4h_0(t) - 2h_0'(t)$$

$y_{zs}(t) = ?$ για $x(t) = u(t)$, $h(t) = \frac{1}{5}\sin(5t)u(t)$

$$y_{zs}(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{5}\sin(5\tau)u(\tau)u(t-\tau)\,d\tau$$

$$= \frac{1}{5}\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(5\tau)\left[u(\tau)u(t-\tau)\right]d\tau$$

Είναι $u(\tau)u(t-\tau) = 1$, για $0<\tau<t$ $\Longrightarrow$

$u(\tau)$: $1, \tau>0$; $0, \tau<0$

$u(t-\tau)$: $1, \tau<t$; $0, \tau>t$

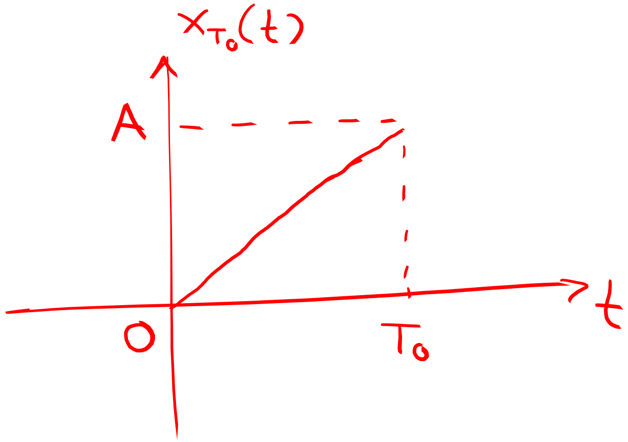
$$\Rightarrow y_{zs}(t) = \frac{1}{5}\int_0^t \sin(5\tau)\,d\tau = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\left(-\cos(5\tau)\right)\right)\Big|_0^t = \frac{1}{25}\left(1-\cos(5t)\right)$$

$$= \left[\frac{1}{25} - \frac{1}{25}\cos(5t)\right]u(t)$$

Άσκηση 4 - Βαθμός: 40

Αναπτύξτε σε σειρά Fourier το περιοδικό σήμα $x(t)$ το οποίο σε μια περίοδο δίνεται ως

$$x_{T_0}(t) = \frac{A}{T_0}t, \quad 0 \leq t < T_0$$



$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{<T_0>} x(t)\, e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt$$

$k=0$:

$$X_0 = \frac{1}{T_0}\int_{<T_0>} x(t)\,dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \frac{A}{T_0} t\,dt = \frac{A}{T_0^2}\left.\frac{t^2}{2}\right|_0^{T_0} =$$

$$= \frac{A}{T_0^2}\,\frac{T_0^2}{2} = \frac{A}{2}$$

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{\langle T_0\rangle} x(t)\, e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \frac{A}{T_0}\, t\, e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt \quad (1)$$

Ξέρουμε ότι $\int t e^{at}\, dt = e^{at}\,\frac{at-1}{a^2}$ και ότι $f_0 = \frac{1}{T_0}$, $e^{\pm j2\pi k} = 1$

$$(1) \Rightarrow X_k = \frac{1}{T_0}\,\frac{A}{T_0}\left(e^{-j2\pi k f_0 t}\left(\frac{-j2\pi k f_0 t - 1}{(-j2\pi k f_0)^2}\right)\right)\Bigg|_0^{T_0} =$$

$$= \frac{A}{T_0^2}\left(\underbrace{e^{-j2\pi k \underbrace{f_0 T_0}_{1}}}_{1}\left(\frac{-j2\pi k \overbrace{f_0 T_0}^{1} - 1}{-4\pi^2 k^2 f_0^2}\right) - e^{-j0}\left(\frac{0 - 1}{-4\pi^2 k^2 f_0^2}\right)\right)$$

$$= \frac{A}{T_0^2}\left(\frac{-j2\pi k - 1}{-4\pi^2 k^2 f_0^2} - \frac{-1}{-4\pi^2 k^2 f_0^2}\right)$$

$$= \frac{A}{T_0^2}\left(\frac{-j2\pi k}{-4\pi^2 k^2 f_0^2}\right) = j\,\frac{2A\pi k}{4\pi^2 k^2 \underbrace{f_0^2 T_0^2}_{1}} = j\,\frac{2A}{4\pi k} = j\,\frac{A}{2\pi k} = \frac{A}{2\pi k}\, e^{j\frac{\pi}{2}}$$

γιατί $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$

Αρα

$$x(t) = X_0 + \sum_{\substack{k=-\infty \\ \neq 0}}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

$$= \frac{A}{2} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ \neq 0}}^{+\infty} \frac{A}{2\pi k} e^{j\frac{\pi}{2}} e^{j2\pi k f_c t}$$

$$= \frac{A}{2} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ \neq 0}}^{+\infty} \frac{A}{2\pi k} e^{j\left(2\pi k f_0 t + \frac{\pi}{2}\right)}$$

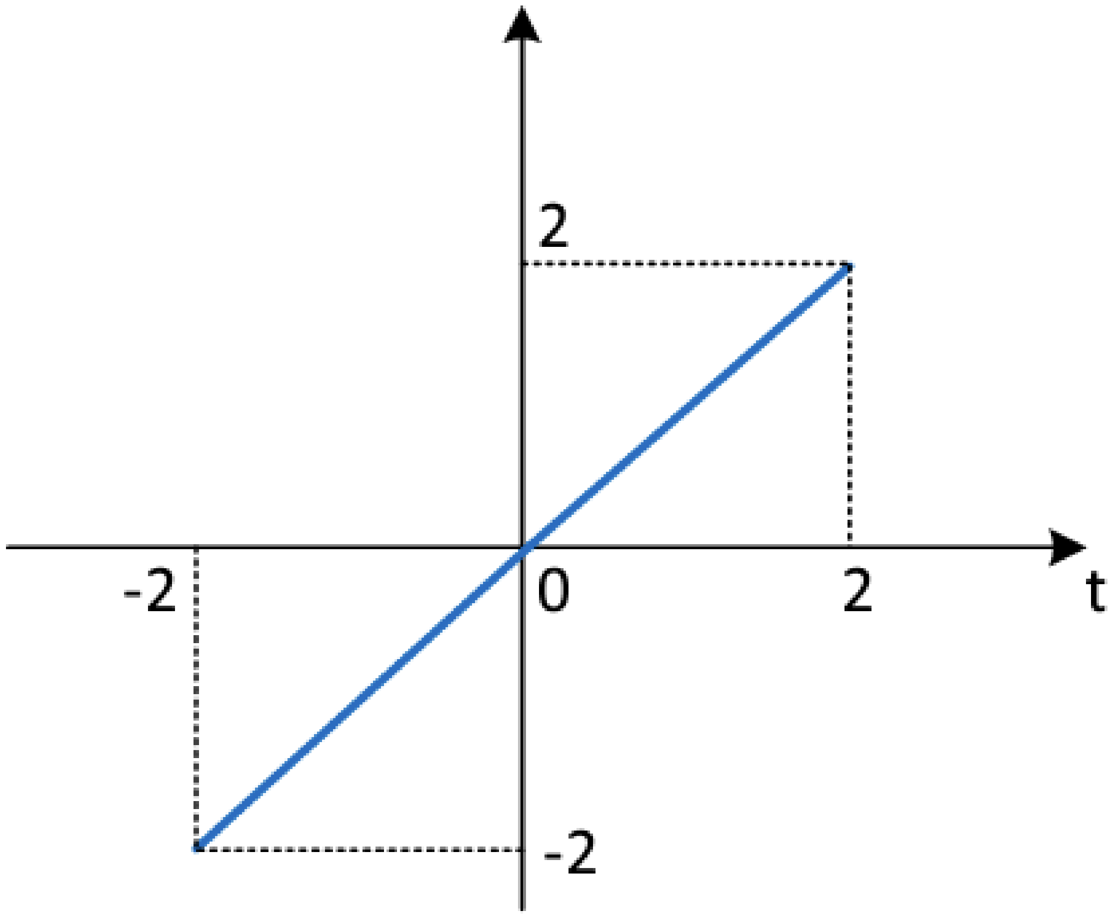
$$= \frac{A}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{A}{\pi k} \cos\left(2\pi k f_0 t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{A}{2} - \frac{A}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \sin\left(2\pi k f_c t\right)$$

Άσκηση 5 - Βαθμός: 40

Βρείτε το Μετασχηματισμό Fourier του σήματος του παρακάτω Σχήματος.

$x(t) = t, \quad -2 < t < 2$



$$\int t e^{at}\,dt = e^{at}\,\frac{at-1}{a^2}$$

$$x(t) = t, \quad -2 < t < 2$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_{-2}^{2} t\, e^{-j2\pi f t}\, dt$$

$$= e^{-j2\pi f t}\left(\frac{-j2\pi f t - 1}{(-j2\pi f)^2}\right)\Bigg|_{-2}^{2} = e^{-j4\pi f}\left(\frac{-j4\pi f - 1}{-4\pi^2 f^2}\right) - e^{j4\pi f}\left(\frac{j4\pi f - 1}{-4\pi^2 f^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2 f^2}\left(e^{-j4\pi f}(-j4\pi f - 1) - e^{j4\pi f}(j4\pi f - 1)\right)$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2 f^2}\left(-j4\pi f\, e^{-j4\pi f} - e^{-j4\pi f} - j4\pi f\, e^{+j4\pi f} + e^{+j4\pi f}\right)$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2 f^2}\left(-j4\pi f\; 2\cos(4\pi f) + 2j\sin(4\pi f)\right)$$

$$= j\left(\frac{2}{\pi f}\cos(4\pi f) - \frac{1}{2\pi^2 f^2}\sin(4\pi f)\right)$$

Άσκηση 6 - Βαθμός: 15

Euler: $\cos(\theta) = \frac{1}{2}\left(e^{j\theta} + e^{-j\theta}\right)$

Αναπτύξτε σε σειρά Fourier το σήμα:

$$x(t) = [6 + 2\cos(2\pi 5t)]\ \cos(2\pi 100t)$$

$$x(t) = \left[6 + e^{j2\pi 5t} + e^{-j2\pi 5t}\right]\left(\frac{1}{2}e^{j2\pi 100t} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi 100t}\right)$$

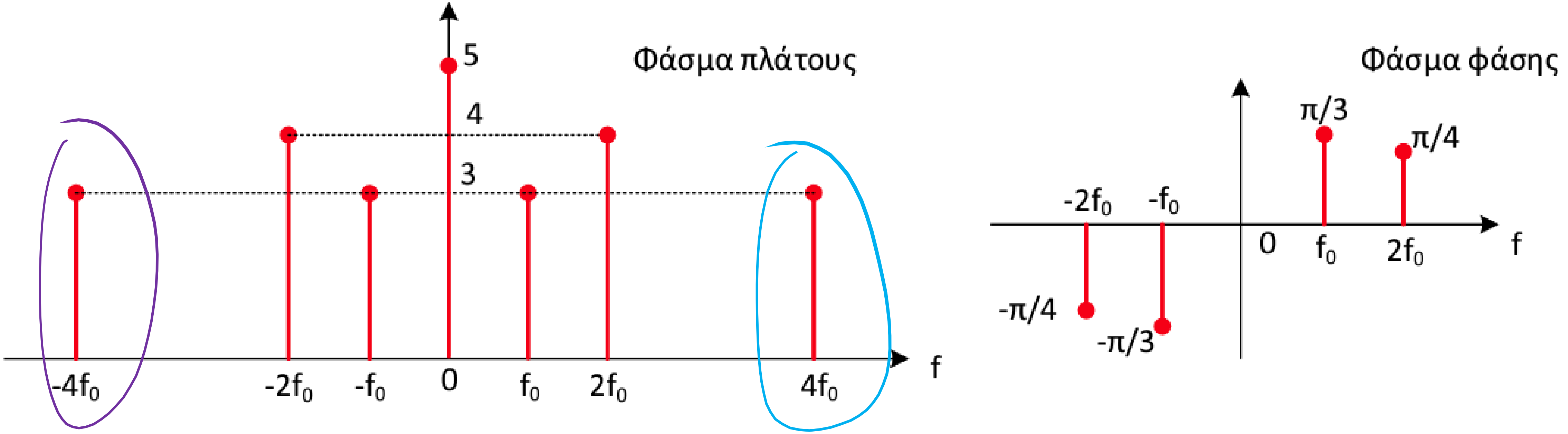
$$= \underline{3e^{j2\pi 100t} + 3e^{-j2\pi 100t}} + \underline{\frac{1}{2}e^{j2\pi 100t}\cdot e^{j2\pi 5t}} + \underline{\frac{1}{2}e^{-j2\pi 100t}\cdot e^{j2\pi 5t}} +$$

$$+ \underline{\frac{1}{2}e^{j2\pi 100t}\cdot e^{-j2\pi 5t}} + \underline{\frac{1}{2}e^{-j2\pi 100t}\cdot e^{-j2\pi 5t}}$$

$$= \underline{6\cos(2\pi 100t)} + \underline{\cos(2\pi 105t)} + \underline{\cos(2\pi 95t)}.$$

Άσκηση 7 - Βαθμός: 15

Αναπτύξτε σε σειρά Fourier το σήμα του οποίου το φάσμα φαίνεται στο παρακάτω Σχήμα 1.



Σχήμα 1: Φάσματα άσκησης 7.

πλάτος φάση

$$x_{-4f_0}(t) = 3e^{j\varnothing} e^{-j2\pi 4f_0 t}$$

$$x_{4f_0}(t) = 3e^{j\varnothing} e^{j2\pi 4f_0 t}$$

φάση

$$\overset{(+)}{\Longrightarrow} x_4(t) = 6\cos(2\pi 4f_0 t + \varnothing) = 6\cos(2\pi 4f_0 t)$$

Όμοια, $x_0(t) = 5$

$x_1(t) = 6\cos(2\pi f_c t + \frac{\pi}{3})$

$x_2(t) = 8\cos(2\pi 2 f_c t + \frac{\pi}{4})$

Άρα

$$x(t) = x_0 + x_1(t) + x_2(t) + x_4(t)$$

$$= 5 + 6\cos(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{3}) + 8\cos(2\pi 2 f_0 t + \frac{\pi}{4}) + 6\cos(2\pi 4 f_0 t)$$