7-3-2023

## ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
### Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

## Φροντιστήριο στις Σειρές Fourier

### Άσκηση 1

Ένα πραγματικό περιοδικό σήμα όταν αναπτυχθεί σε εκθετική σειρά Fourier έχει μη μηδενικούς συντελεστές για $k>0$ ως εξής:

$$X_1 = 5, \quad X_2 = 4j, \quad X_3 = 3\cdot e^{j\pi/8}$$

A) Πόση είναι η ισχύς του σήματος;

Γνωρίζουμε, από τη θεωρία, ότι η ισχύς του σήματος από το Θεώρημα του Parseval δίνεται ως:

$$P_x = \frac{1}{T_0}\cdot\int_{T_0} |x(t)|^2\,dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2$$

Ξέρουμε, από την εκφώνηση, ότι το σήμα μας είναι πραγματικό, $x(t)\in\mathbb{R}$. Συνεπώς, $|X_k| = |X_{-k}|$ από γνωστές ιδιότητες.

Άρα, η ισχύς του παραπάνω σήματος είναι:

$$P_x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}|X_k|^2 = |X_{-3}|^2 + |X_{-2}|^2 + |X_{-1}|^2 + |X_1|^2 + |X_2|^2 + |X_3|^2 =$$

$$= 2\cdot\left(|X_1|^2 + |X_2|^2 + |X_3|^2\right) = 2\cdot\left(|5|^2 + |4j|^2 + |3\cdot e^{j\frac{\pi}{8}}|^2\right) =$$

$$= 2\cdot(25+16+9) = 2\cdot 50 = 100$$

Β) Τι ποσοστό της συνολικής ισχύος του σήματος οφείλεται στον πρώτο όρο της τριγωνομετρικής (ή μονόπλευρης) αναπαράστασής του σε σειρά Fourier (δηλαδή για $k=1$);

Στον πρώτο όρο της τριγωνομετρικής σειράς αντιστοιχούν τα $X_1$ και $X_{-1}=X_1^*$ (από γνωστές ιδιότητες) τα οποία έχουν ισχύ $|5|^2=25$ το καθένα. Άρα, συνολικά $25+25=50$.

Επομένως, ξέροντας ότι η συνολική ισχύς του σήματος είναι 100 (από Α) υποερώτημα), το ζητούμενο ποσοστό είναι: 50%.

Γ) Αν γνωρίζετε ότι για το σήμα (έστω $x(t)$) ισχύει $T_0=2$, να βρείτε το σήμα.

$$\cos(\varphi)=\frac{e^{j\varphi}+e^{-j\varphi}}{2},\ \sin(\varphi)=\frac{e^{j\varphi}-e^{-j\varphi}}{2j}$$
$$\pm j=e^{\pm j\frac{\pi}{2}}$$

$$\left.\begin{array}{l} T_0=2 \\ f_0=1/T_0 \end{array}\right| \Rightarrow f_0=\frac{1}{2}$$

$$x(t)=\sum_{k=-3}^{3} X_k\cdot e^{j2\pi k f_0 t}=5\cdot e^{j2\pi\cdot(-1)\cdot\frac{1}{2}t}-4\cdot j\cdot e^{j2\pi(-2)\frac{1}{2}t}+$$

$$+3\cdot e^{-j\frac{\pi}{8}}\cdot e^{j2\pi(-3)\cdot\frac{1}{2}t}+5\cdot e^{j2\pi\frac{1}{2}t}+4j\cdot e^{j2\pi 2\cdot\frac{1}{2}t}+3\cdot e^{j\frac{\pi}{8}}\cdot e^{j2\pi 3\cdot\frac{1}{2}t}=$$

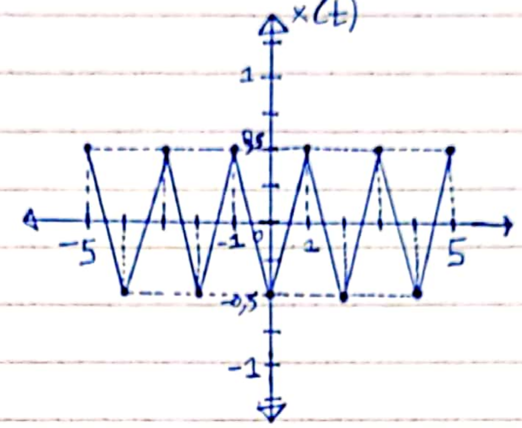
$$=5\cdot e^{-j\pi t}+5\cdot e^{j\pi t}+4\cdot e^{-j\frac{\pi}{2}}\cdot e^{-j2\pi t}+4\cdot e^{j\frac{\pi}{2}}\cdot e^{j2\pi t}+$$

$$+3\cdot e^{-j\frac{\pi}{8}}\cdot e^{-j3\pi t}+3\cdot e^{j\frac{\pi}{8}}\cdot e^{j3\pi t}=$$

$$=10\cdot\cos(\pi t)-8\cdot\sin(2\pi t)+6\cdot\cos\left(3\pi t+\frac{\pi}{8}\right)$$

Άσκηση 2

Έστω το εξής περιοδικό σήμα $x(t)$:




Να υπολογίσετε τους συντελεστές $X_K$ του σήματος, καθώς και τον συντελεστή $X_0$.

Αρχικά, παρατηρούμε ότι το παραπάνω σήμα είναι ένας μετατοπισμένος τριγωνικός παλμός. Γνωρίζουμε ότι για το

$$A \cdot tri\left(\frac{t}{\frac{T_0}{2}}\right), -\frac{T_0}{2} < t < \frac{T_0}{2}$$

οι συντελεστές Fourier, σύμφωνα με τη θεωρία, είναι:

$$X'_K = \frac{2 \cdot A}{\pi^2 \cdot K^2}, K \text{ περιττός}$$

Από το παραπάνω σχήμα προκύπτει ότι $A=1$, $T_0=2$ και ότι το σήμα είναι μετατοπισμένο κατά 1 προς τα δεξιά και 1/2 προς τα κάτω.

Επομένως, $x(t) = 1 \cdot tri\left(\frac{t-1}{\frac{2}{2}}\right) - \frac{1}{2} = tri\left(\frac{t-1}{1}\right) - \frac{1}{2}$

Μπορούμε, λοιπόν, να προσεγγίσουμε τη σειρά Fourier του $tri(t-1)$ και, έπειτα, να μετατοπίσουμε τα ημίτονα κατά 1/2 προς τα κάτω.

Αξιοποιώντας τη γνωστή ιδιότητα της Χρονικής Μετατόπισης προκύπτει ότι:

$X_K = X'_K \cdot e^{-j2\pi K F_0 t_0} = \frac{2 \cdot A}{\pi^2 \cdot K^2} \cdot e^{-j2\pi K \cdot \frac{1}{2} \cdot 1} = \frac{2}{\pi^2 \cdot K^2} \cdot e^{-j\pi K}$, K περιττός

Άρα, $x(t) = X'_0 - \frac{1}{2} + \sum_{K \text{ περιττό}} X_K \cdot e^{j2\pi K \cdot \frac{1}{2} t} = X'_0 - \frac{1}{2} + \sum_{K \text{ περιττό}} X_K \cdot e^{j\pi K t}$,

όπου $X'_0$ ο συντελεστής Fourier για K=0 του μη κατακόρυφα μετατοπισμένου σήματος.

$X'_0 = \frac{1}{T_0} \cdot \int_{T_0} x(t)\,dt = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\left(2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}\right)}_{\text{Εμβαδόν τριγώνου}} = \frac{1}{2}$

Οπότε, $X_0 = X'_0 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$.

Συμπερασματικά, λοιπόν, οι συντελεστές $X_K$ του σήματος $x(t)$ είναι:

$$X_K = \frac{2}{\pi^2 \cdot K^2} \cdot e^{-j\pi K}, \text{ K περιττός}$$

και ο συντελεστής $X_0$ ισούται με μηδέν, $X_0 = 0$.

Άσκηση 3

Έστω ένα περιοδικό σήμα $x(t)$ με περίοδο $T_0$ το οποίο έχει συντελεστές Fourier: $X_K = -\frac{\pi^2}{2jK^2}$.

Χωρίς να υπολογίσετε το $x(t)$, να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα:

α) Το σήμα $x(t)$ είναι πραγματικό ή μιγαδικό;

Εξετάζουμε αν ισχύει η γνωστή ιδιότητα των πραγματικών σημάτων: $X_K = X^*_{-K}$

$$X^*_{-K} = \left(-\frac{\pi^2}{2j(-K)^2}\right)^* = \frac{\pi^2}{2jK^2} \neq X_K$$

Επομένως, το σήμα $x(t)$ είναι μιγαδικό αφού δεν ισχύει γι' αυτό η παραπάνω γνωστή ιδιότητα.

β) Βρείτε τους συντελεστές Fourier $Y_K$ του σήματος: $y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$.

Αξιοποιώντας τη γνωστή ιδιότητα της Παραγώγισης προκύπτει ότι:

$$Y_K = j2\pi K f_0 \cdot X_K = j2\pi K \cdot \frac{1}{T_0} \cdot \left(-\frac{\pi^2}{2jK^2}\right) = -\frac{\pi^3}{K \cdot T_0}$$

γ) Βρείτε τους συντελεστές Fourier $Z_K$ του σήματος:
$z(t) = x\left(t - \frac{T_0}{2}\right)$.

Αξιοποιώντας τη γνωστή ιδιότητα της Χρονικής Μετατόπισης προκύπτει ότι:

$$Z_K = X_K \cdot e^{-j2\pi K f_0 \cdot \overset{\text{Μετατόπιση}}{\left(\frac{T_0}{2}\right)}} = -\frac{\pi^2}{2jK^2} \cdot e^{-j2\pi K \cdot \frac{1}{T_0} \cdot \frac{T_0}{2}} = -\frac{\pi^2}{2jK^2} \cdot e^{-j\pi K} =$$

$$= -\frac{\pi^2}{2jK^2} \cdot (-1)^K$$

$$\boxed{e^{\pm jK\pi} = (-1)^K}$$

δ) Βρείτε τους συντελεστές Fourier $W_K$ του σήματος:
$w(t) = \int_{-\infty}^{t} y(\tau)\, d\tau$.

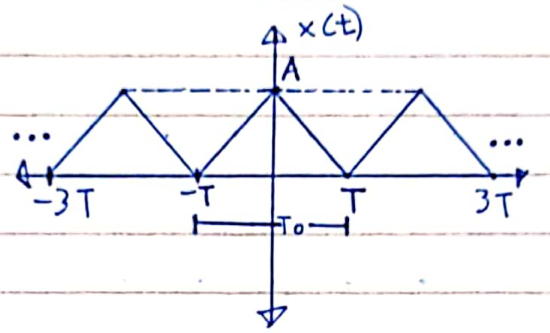
Ξέρουμε ότι $Y_K = -\frac{\pi^3}{K \cdot T_0}$ (από β) υποερώτημα).

Αξιοποιώντας τη γνωστή ιδιότητα της Ολοκλήρωσης προκύπτει ότι:

$$W_K = \frac{Y_K}{j2\pi K f_0} = \frac{-\frac{\pi^3}{K \cdot T_0}}{j2\pi K \cdot \frac{1}{T_0}} = -\frac{\pi^3 \cdot T_0}{j2\pi K^2 T_0} = -\frac{\pi^2}{j2K^2}$$

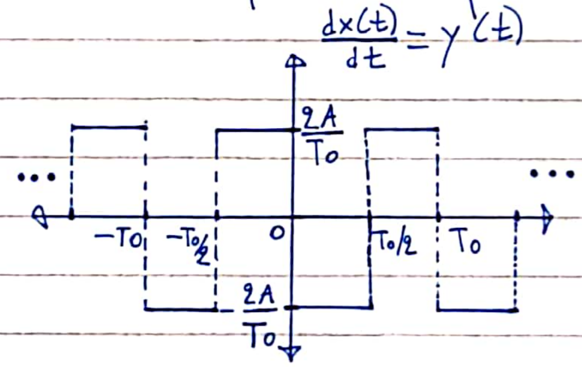
Άσκηση 4

Έστω το σήμα του παρακάτω σχήματος:




Βρείτε τους συντελεστές της εκθετικής σειράς Fourier.

Παραγωγίζοντας το παραπάνω σήμα προκύπτει:




Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι το παραπάνω σήμα, $y(t)=\frac{dx(t)}{dt}$ αποτελεί σήμα για το οποίο γνωρίζουμε τους συντελεστές Fourier (από την αντίστοιχη διάλεξη). Στην παραπάνω περίπτωση, είναι μετατοπισμένο κατά $T_0/2$ προς τα δεξιά.

Έστω $\hat{X}_K$ οι συντελεστές Fourier του γνωστού σήματος

$$\hat{X}_K = \frac{\hat{A}}{K \cdot \pi} \cdot (1-(-1)^K) \cdot e^{-j\pi/2}$$

Αξιοποιώντας τη γνωστή ιδιότητα της Χρονικής Μετατόπισης προκύπτει ότι:

$$Y_K = \frac{\frac{2\cdot A}{T_0}}{K\cdot \pi}\cdot\left(1-(-1)^K\right)\cdot \underbrace{e^{-j\frac{\pi}{2}}}_{1/j}\cdot e^{-j2\pi K F_0 \cdot \frac{T_0}{2}} =$$

$$= \frac{2\cdot A}{j\pi K\cdot T_0}\cdot\left(1-(-1)^K\right)\cdot e^{-j2\pi K \frac{1}{T_0}\cdot\frac{T_0}{2}} = \frac{2\cdot A}{j\pi K T_0}\cdot\left(1-(-1)^K\right)\cdot \underbrace{e^{-j\pi K}}_{(-1)^K} =$$

$$= \frac{2\cdot A}{j\pi K T_0}\cdot\left(1-(-1)^K\right)\cdot(-1)^K = \frac{2\cdot A}{j\pi K T_0}\cdot\left((-1)^K-(-1)^{2K}\right) =$$

$$= \frac{2\cdot A}{j\pi K T_0}\cdot\left((-1)^K-1\right)$$

Επομένως, αξιοποιώντας τη γνωστή ιδιότητα της Ολοκλήρωσης για τους συντελεστές Fourier του αρχικού σήματος προκύπτει ότι:

$$X_K = \frac{1}{j2\pi K F_0}\cdot\frac{2\cdot A}{j\pi K\cdot T_0}\cdot\left((-1)^K-1\right) = \frac{A}{\pi^2\cdot K^2}\cdot\left(1-(-1)^K\right) \qquad \boxed{\begin{aligned}F_0\cdot T_0 &= 1\\ j^2 &= -1\end{aligned}}$$

$$X_0 = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\,dt = \frac{1}{T_0}\cdot\frac{T_0\cdot A}{2} = \frac{A}{2}$$

Εμβαδόν Τριγώνου

2ος Τρόπος: Εναλλακτικά, μπορούμε να θεωρήσουμε το σήμα $y(t)=\frac{dx(t)}{dt}$ ως ανάκλαση του γνωστού σήματος (από την αντίστοιχη διάλεξη).

Αξιοποιώντας τη γνωστή ιδιότητα της Αντιστροφής στο χρόνο προκύπτει ότι:

$$Y_K = \hat{X}_{-K} = \frac{\frac{2\cdot A}{T_0}}{(-K)\cdot\pi}\cdot\left(1-(-1)^{-K}\right)\cdot e^{-j\pi/2} = -\frac{2\cdot A}{j\pi K\cdot T_0}\cdot\left(1-(-1)^{-K}\right)$$

Επομένως, αξιοποιώντας τη γνωστή ιδιότητα της Ολοκλήρωσης για τους συντελεστές Fourier του $x(t)$ προκύπτει ότι:

$$X_K = \frac{1}{j2\pi K F_0}\cdot\frac{2\cdot A}{j\pi K T_0}\cdot\left((-1)^{-K}-1\right) = \frac{A}{\pi^2\cdot K^2}\cdot\left(1-(-1)^K\right) \qquad \boxed{(-1)^K=(-1)^{-K}}$$

$X_0 = A/2$ (το ίδιο με παραπάνω)

Άρα, παρατηρούμε ότι και με τους δύο τρόπους καταλήγουμε στην ίδια απάντηση.

Άσκηση 5

Έστω ότι για ένα περιοδικό σήμα $x(t)$ δίνονται οι παρακάτω πληροφορίες:

1) Έχει θεμελιώδη συχνότητα $f_0 = 1/2$ Hz και συντελεστές Fourier $X_k$
2) ~~Ισχύει $X_k \neq 0$, $k = -1, 0, 1$~~ $\Rightarrow$ $|X_k| = 0$, $|k| \geq 2$
3) $x(t) \in \mathbb{R}$ και $x(t) = -x(-t)$
4) $P_x = 1$ (Ισχύς)

Βρείτε δύο σήματα που ικανοποιούν τις παραπάνω προδιαγραφές.

Λόγω 2) το σήμα $x(t)$ γράφεται:

$$x(t) = X_{-1} \cdot e^{j2\pi k f_0 t} + X_0 + X_1 \cdot e^{j2\pi k f_0 t} \Leftrightarrow \text{ (Λόγω 1))}$$

$$x(t) = X_{-1} \cdot e^{j2\pi \cdot (-1) \cdot \frac{1}{2} \cdot t} + X_0 + X_1 \cdot e^{j2\pi \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot t} \Leftrightarrow$$

$$x(t) = X_{-1} \cdot e^{-j\pi t} + X_0 + X_1 \cdot e^{j\pi t} \Leftrightarrow \text{ (Λόγω 3) } X_k = X_{-k}^*\text{)}$$

$$x(t) = X_1^* \cdot e^{-j\pi t} + X_0 + X_1 \cdot e^{j\pi t} \qquad \text{(i)}$$

Επιπλέον, λόγω 3) και της γνωστής Ιδιότητας των Σειρών Fourier για περιττά και πραγματικά σήματα:

$$\left.\begin{array}{l} X_k \in \mathcal{I} \\ \mathcal{I}\{X_k\} = -\mathcal{I}\{X_{-k}\} \end{array}\right| \Rightarrow X_k = -X_{-k} \text{ και } X_0 = 0 \qquad \text{(ii)}$$

Γνωρίζουμε, από τη Θεωρία, ότι η ισχύς του σήματος από το Θεώρημα του Parseval δίνεται ως:

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 = 1 \text{ (λόγω 4))} \Leftrightarrow$$

$$\sum_{k=-1}^{1} |X_k|^2 = 1 \Leftrightarrow |X_{-1}|^2 + |X_0|^2 + |X_1|^2 = 1 \Leftrightarrow \text{(λόγω (ii))}$$

$$|-X_1|^2 + 0 + |X_1|^2 = 1 \Leftrightarrow 2 \cdot |X_1|^2 = 1 \Leftrightarrow |X_1|^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$|X_1| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow X_1 = \pm j \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{(iii)}$$

Συνεπώς, από (ii) και (iii) προκύπτει:

- Αν $X_1 = j\frac{1}{\sqrt{2}}$, τότε $X_{-1} = -X_1 = -j\frac{1}{\sqrt{2}}$
- Αν $X_1 = -j\frac{1}{\sqrt{2}}$, τότε $X_{-1} = -X_1 = j\frac{1}{\sqrt{2}}$

Επομένως, τα δύο σήματα που ικανοποιούν όλες τις παραπάνω σχέσεις είναι:

$$x_1(t) = -j\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{-j\pi t} + j\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\pi t} = \frac{1}{j\sqrt{2}} \cdot e^{-j\pi t} - \frac{1}{j\sqrt{2}} \cdot e^{j\pi t} =$$

$$= -2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\pi \cdot t) = -\sqrt{2} \cdot \sin(\pi \cdot t)$$

και

$$x_2(t) = j\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{-j\pi t} + (-j) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\pi t} = -\frac{1}{j\sqrt{2}} \cdot e^{-j\pi t} + \frac{1}{j\sqrt{2}} \cdot e^{j\pi t} =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sin(\pi \cdot t) = \sqrt{2} \cdot \sin(\pi \cdot t)$$

Άσκηση 6

Έστω ένα περιοδικό σήμα $x(t)$ με θεμελιώδη συχνότητα $F_0$ και συντελεστές Fourier $X_K$. Πως σχετίζεται η θεμελιώδης συχνότητα $\hat{F}_0$ του σήματος $y(t)=x(1-t)+x(t-1)$ με τη συχνότητα $F_0$ του $x(t)$; Βρείτε, επίσης, μία σχέση μεταξύ των συντελεστών Fourier $X_K$ του σήματος $x(t)$ και των $Y_K$ του $y(t)$.

Αρχικά, παρατηρούμε ότι το σήμα $y(t)$ είναι, απλώς, το άθροισμα δύο σημάτων:

- $x(t-1)$: το σήμα $x(t)$ έχει μετατοπιστεί κατά $t_0=1$ δεξιά. Άρα, διατηρεί την ίδια περίοδο και την ίδια θεμελιώδη συχνότητα.

- $x(1-t)=x(-(t-1))$: το σήμα $x(t)$ έχει μετατοπιστεί κατά $t_0=1$ δεξιά και αντιστραφεί χρονικά. Άρα, κι αυτό διατηρεί την ίδια περίοδο και την ίδια θεμελιώδη συχνότητα.

Επομένως, το άθροισμα των δύο παραπάνω σημάτων θα είναι περιοδικό με την ίδια θεμελιώδη συχνότητα, $\underline{\hat{F}_0=F_0}$.

Η ζητούμενη σχέση μεταξύ των συντελεστών Fourier $X_K$ του σήματος $x(t)$ και των $Y_K$ του $y(t)$ προκύπτει αξιοποιώντας, κατάλληλα, τις γνωστές ιδιότητες της Χρονικής Μετατόπισης, της Αντιστροφής στο Χρόνο και της Γραμμικότητας καθώς, όπως είδαμε παραπάνω, το $y(t)$ αποτελεί το άθροισμα δύο σημάτων.

Επομένως,

$$Y_K=X_{-K}\cdot e^{+j2\pi K F_0\cdot 1}+X_K\cdot e^{-j2\pi K F_0\cdot 1}=X_K\cdot e^{j2\pi K F_0}+X_K\cdot e^{-j2\pi K F_0}$$