ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2023-24
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

2ο Φροντιστήριο

Άσκηση 1 - Ημίτονα Ι

(α΄) Λύστε την παρακάτω εξίσωση ως προς το άγνωστο ημίτονο

$$\cos\left(2\pi\frac{3}{4}t - \frac{5\pi}{4}\right) + A\cos(2\pi f_0 t + \phi) = 2\cos\left(2\pi\frac{3}{4}(t+5)\right) + 3\cos\left(2\pi\frac{3}{4}(t-6)\right) \tag{1}$$

Χρησιμοποιήστε το μιγαδικό χώρο για να απλοποιήσετε τη λύση της παραπάνω εξίσωσης. Χρησιμοποιήστε αριθμομηχανή για τις πράξεις σας όπου απαιτείται.

(β΄) Ελέγξτε αν το σήμα

$$x(t) = 2\cos(2\pi 50t - \pi/2) + \sqrt{3}\sin(2\pi 30t + \pi/4) - \sin(2\pi 25t) \tag{2}$$

είναι περιοδικό και βρείτε την περίοδό του, T_0. Εξηγήστε επαρκώς τη μέθοδο λύσης σας. Τέλος, σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης του.

Λύση:

(α΄) Είναι πολύ πιο εύκολο να μετατρέψουμε την εξίσωση σε όρους μιγαδικών συναρτήσεων που τα συνημίτονα αποτελούν το πραγματικό μέρος τους. Άρα

$$\cos\left(2\pi\frac{3}{4}t - \frac{5\pi}{4}\right) + A\cos(2\pi f_0 t + \phi) = 2\cos\left(2\pi\frac{3}{4}(t+5)\right) + 3\cos\left(2\pi\frac{3}{4}(t-6)\right) \tag{3}$$

$$A\cos(2\pi f_0 t + \phi) = -\cos\left(2\pi\frac{3}{4}t - \frac{5\pi}{4}\right) + 2\cos\left(2\pi\frac{3}{4}(t+5)\right) + 3\cos\left(2\pi\frac{3}{4}(t-6)\right) \tag{4}$$

$$\Re\{Ae^{j\phi}e^{j2\pi f_0 t}\} = \Re\{2e^{j2\pi\frac{3}{4}t}e^{j2\pi\frac{15}{4}}\} + \Re\{3e^{j2\pi\frac{3}{4}t}e^{-j2\pi\frac{18}{4}}\} - \Re\{e^{j2\pi\frac{3}{4}t}e^{-\frac{5\pi}{4}}\} \tag{5}$$

$$= \Re\{2e^{j2\pi\frac{3}{4}t}e^{j2\pi\frac{15}{4}} + 3e^{j2\pi\frac{3}{4}t}e^{-j2\pi\frac{18}{4}} - e^{j2\pi\frac{3}{4}t}e^{-j\frac{5\pi}{4}}\} \tag{6}$$

$$= \Re\{(2e^{j2\pi\frac{15}{4}} + 3e^{-j2\pi\frac{18}{4}} - e^{-j\frac{5\pi}{4}})e^{j2\pi\frac{3}{4}t}\} \tag{7}$$

$$= \Re\{(a+jb)e^{j2\pi\frac{3}{4}t}\} \tag{8}$$

με

$$a + jb = -2.2929 - j2.707 = 3.5476e^{-j0.72369\pi} \tag{9}$$

Οπότε

$$\Re\{Ae^{j\phi}e^{j2\pi f_0 t}\} = \Re\{3.5476e^{-j0.72369\pi}e^{j2\pi\frac{3}{4}t}\} \tag{10}$$

και άρα

$$A = 3.5476 \tag{11}$$

$$f_0 = \frac{3}{4} \tag{12}$$

$$\phi = -0.72369\pi \tag{13}$$

(β΄) Το σήμα

$$x(t) = 2\cos(2\pi 50t - \pi/2) + \sqrt{3}\sin(2\pi 30t + \pi/4) - \sin(2\pi 25t) \tag{14}$$

είναι περιοδικό, αφού ο -ανά δυο- λόγος των συχνοτήτων (ή των περιόδων) των ημιτόνων που το αποτελούν είναι λόγος ακεραίων. Για να βρούμε την περίοδο, μπορούμε να ξεκινήσουμε από τη θεμελιώδη συχνότητα, ως

$$f_0 = \text{Μ.Κ.Δ}\{50, 30, 25\} = 5 \text{ Hz} \tag{15}$$

Άρα η περίοδός του είναι $T_0 = 1/f_0 = 0.2$ δευτερόλεπτα. Το φάσμα πλάτους και φάσης βρίσκεται αναπτύσσοντας το σήμα με τις σχέσεις του Euler ως

$$x(t) = 2\cos(2\pi 50t - \pi/2) + \sqrt{3}\sin(2\pi 30t + \pi/4) - \sin(2\pi 25t) \tag{16}$$

$$= e^{j2\pi 50t}e^{-j\pi/2} + e^{-j2\pi 50t}e^{j\pi/2} + \frac{\sqrt{3}}{2j}e^{j2\pi 30t}e^{j\pi/4} - \frac{\sqrt{3}}{2j}e^{-j2\pi 30t}e^{-j\pi/4} - \frac{1}{2j}e^{j2\pi 25t} + \frac{1}{2j}e^{-j2\pi 25t} \tag{17}$$

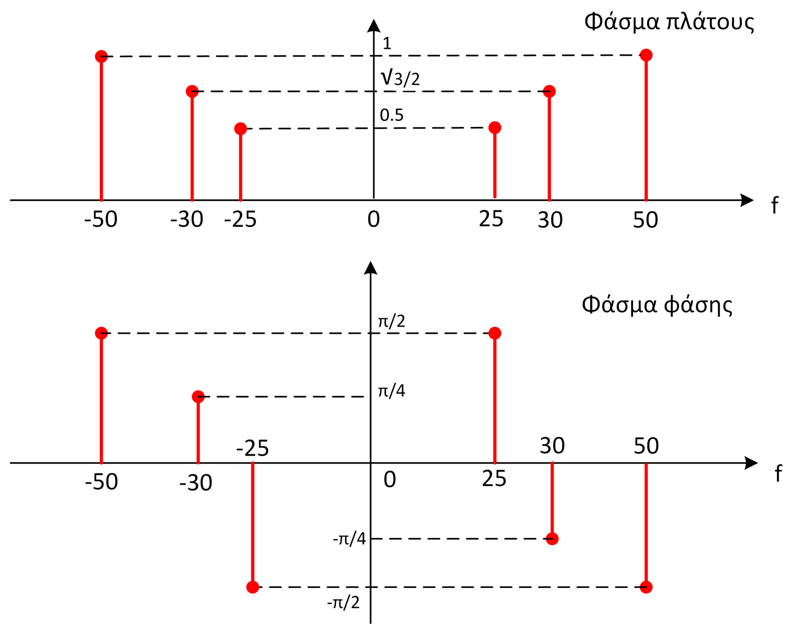
$$= e^{-j\pi/2}e^{j2\pi 50t} + e^{j\pi/2}e^{-j2\pi 50t} + e^{-j\pi/2}\frac{\sqrt{3}}{2}e^{j2\pi 30t}e^{j\pi/4}$$
$$+ e^{j\pi/2}\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-j2\pi 30t}e^{-j\pi/4} + e^{j\pi/2}\frac{1}{2}e^{j2\pi 25t} + e^{-j\pi/2}\frac{1}{2}e^{-j2\pi 25t} \tag{18}$$

$$= e^{-j\pi/2}e^{j2\pi 50t} + e^{j\pi/2}e^{-j2\pi 50t} + \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-j\pi/4}e^{j2\pi 30t} + \frac{\sqrt{3}}{2}e^{j\pi/4}e^{-j2\pi 30t} + \frac{1}{2}e^{j\pi/2}e^{j2\pi 25t} + \frac{1}{2}e^{-j\pi/2}e^{-j2\pi 25t} \tag{19}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις σχέσεις

$$j = e^{j\pi/2} \tag{20}$$
$$-j = e^{-j\pi/2} \tag{21}$$
$$\frac{1}{j} = e^{-j\pi/2} \tag{22}$$
$$-\frac{1}{j} = e^{j\pi/2} \tag{23}$$

Κάθε όρος της μορφής $|A|e^{j\theta}e^{j2\pi f_0 t}$ αντιστοιχίζεται στο φάσμα πλάτους με μια γραμμή με ύψος $|A|$ πάνω από τη συχνότητα f_0 και στο φάσμα φάσης με μια γραμμή με ύψος θ πάνω από τη συχνότητα f_0. Το φάσμα πλάτους και φάσης φαίνεται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1: *Φάσματα Άσκησης 1.*

Άσκηση 2 - Εξισώσεις

(α΄) Λύστε την εξίσωση

$$\Im\Big\{\Big(-\frac{\sqrt{3}}{2}+j\frac{1}{2}\Big)e^{j\theta}\Big\}=\frac{\sqrt{3}}{2} \tag{24}$$

(β΄) Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις του Euler, δείξτε ότι

$$\int_0^{2\pi}\cos^4(\theta)d\theta=\frac{3\pi}{4} \tag{25}$$

<u>Λύση:</u>

(α΄) Έχουμε ότι

$$z=-\frac{\sqrt{3}}{2}+j\frac{1}{2}=|z|e^{j\theta} \tag{26}$$

με

$$|z|=\sqrt{(-\sqrt{3}/2)^2+(1/2)^2}=1 \tag{27}$$

$$\theta=\tan^{-1}\frac{1/2}{-\sqrt{3}/2}=5\pi/6 \tag{28}$$

Οπότε

$$\Im\Big\{\Big(-\frac{\sqrt{3}}{2}+j\frac{1}{2}\Big)e^{j\theta}\Big\}=\frac{\sqrt{3}}{2} \tag{29}$$

$$\Im\Big\{e^{j\frac{5\pi}{6}}e^{j\theta}\Big\}=\frac{\sqrt{3}}{2} \tag{30}$$

$$\Im\Big\{e^{j(\theta+\frac{5\pi}{6})}\Big\}=\frac{\sqrt{3}}{2} \tag{31}$$

$$\sin\Big(\theta+\frac{5\pi}{6}\Big)=\sin\Big(\frac{\pi}{3}\Big) \tag{32}$$

$$\theta+\frac{5\pi}{6}=\begin{cases}2k\pi+\pi-\frac{\pi}{3}\\ 2k\pi+\frac{\pi}{3}\end{cases} \tag{33}$$

$$\theta=\begin{cases}2k\pi-\frac{\pi}{6}\\ 2k\pi-\frac{\pi}{2}\end{cases} \tag{34}$$

με $k\in\mathbb{Z}$, από τις βασικές εξισώσεις τριγωνομετρίας.

(β΄) Από τις βασικές σχέσεις του Euler, ισχύει

$$\int_0^{2\pi}\cos^4(\theta)d\theta=\int_0^{2\pi}\cos^2(\theta)\cos^2(\theta)d\theta \tag{35}$$

$$=\int_0^{2\pi}\Big(\frac{1}{2}e^{j\theta}+\frac{1}{2}e^{-j\theta}\Big)^2\Big(\frac{1}{2}e^{j\theta}+\frac{1}{2}e^{-j\theta}\Big)^2d\theta \tag{36}$$

$$=\int_0^{2\pi}\Big(\frac{1}{4}e^{j2\theta}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}e^{-j2\theta}\Big)\Big(\frac{1}{4}e^{j2\theta}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}e^{-j2\theta}\Big)d\theta \tag{37}$$

$$=\int_0^{2\pi}\Big(\frac{1}{16}e^{j4\theta}+\frac{1}{8}e^{j2\theta}+\frac{1}{16}+\frac{1}{8}e^{j2\theta}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}e^{-j2\theta}+\frac{1}{16}+\frac{1}{8}e^{-j2\theta}+\frac{1}{16}e^{-j4\theta}\Big)d\theta \tag{38}$$

$$=\int_0^{2\pi}\Big(\frac{1}{8}\cos(4\theta)+\frac{1}{4}\cos(2\theta)+\frac{1}{4}\cos(2\theta)+\frac{3}{8}\Big)d\theta \tag{39}$$

$$=\int_0^{2\pi}\Big(\frac{1}{8}\cos(4\theta)+\frac{1}{2}\cos(2\theta)+\frac{3}{8}\Big)d\theta \tag{40}$$

$$=\frac{1}{32}\sin(4\theta)+\frac{1}{4}\sin(2\theta)+\frac{3}{8}\theta\Big]_0^{2\pi}=0+0+\frac{3}{8}(2\pi-0)=\frac{6\pi}{8}=\frac{3\pi}{4} \tag{41}$$

Άσκηση 3 - Ενέργεια και Ισχύς

Στη θεωρία, στην προσπάθειά σας να βρείτε τη Σειρά Fourier εισάγατε την έννοια του εσωτερικού γινομένου. Για πραγματικά σήματα, το εσωτερικό γινόμενο ενός σήματος με τον εαυτό του ταυτίζεται με την *ενέργεια* του:

$$E_x =< x(t), x(t) >= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt \tag{42}$$

Για σήματα που η ενέργειά τους είναι άπειρη (και άρα δεν έχει νόημα), έχουμε ορίσει τη *μέση ισχύ τους*, ως

$$P_x = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x^2(t)dt \tag{43}$$

Οι δυο αυτές μετρικές δίνουν μια αίσθηση για το "μέγεθος " ενός σήματος.

Σχεδιάστε και ελέγξτε τα παρακάτω σήματα ως προς το αν είναι σήματα ενέργειας ή ισχύος (ή τίποτε από τα δυο), υπολογίζοντας τις δυο ποσότητες.

(α') $x(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t \le 1 \\ 2-t, & 1 < t \le 2 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

(β') $x(t) = \begin{cases} 5\cos(\pi t), & -1 \le t \le 1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

(γ') $x(t) = 5\cos(\pi t) + \sin(10\pi t), \quad -\infty < t < +\infty$

(δ') $x(t) = e^{2t}, \quad -\infty < t < +\infty$

(ε') $x(t) = e^{2t}, \quad t \in [0, 2]$

<u>Λύση:</u>

(α') Είναι

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt = \int_0^1 t^2 dt + \int_1^2 (2-t)^2 dt \tag{44}$$

$$= \frac{t^3}{3}\Big|_0^1 + \Big(4t - 4\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}\Big)\Big|_1^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \tag{45}$$

Αν υπολογίσετε την ισχύ του P_x, αυτή θα προκύψει μηδενική.

(β') Είναι

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt = \int_{-1}^{1} 25\cos^2(\pi t)dt = 25\int_{-1}^{1} \Big(\frac{1}{4}e^{j2\pi t} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{-j2\pi t}\Big)dt \tag{46}$$

$$= 25\int_{-1}^{1} \Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\pi t)\Big)dt = 25\Big(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4\pi}\sin(2\pi t)\Big)\Big|_{-1}^{1} \tag{47}$$

$$= \frac{25}{2}(1+1) + \frac{1}{4\pi}0 = 25 \tag{48}$$

Αν υπολογίσετε την ισχύ του, θα τη βρείτε μηδενική.

(γ') Ας υπολογίσουμε την ισχύ ενός γενικού ημιτονοειδούς σήματος.

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} A^2\cos^2(2\pi f_0 t + \theta)dt = \lim_{T\to\infty} \frac{A^2}{4T} \int_{-T}^{T} [1 + \cos(4\pi f_0 t + 2\theta)]dt \tag{49}$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{A^2}{4T} \int_{-T}^{T} dt + \lim_{T\to\infty} \frac{A^2}{4T} \int_{-T}^{T} \cos(4\pi f_0 t + 2\theta)dt \tag{50}$$

Ο πρώτος όρος ειναι ίσος με $A^2/2$. Επίσης, ο δεύτερος όρος μπορεί να δειχθεί εύκολα (☺) ότι είναι μηδέν. Άρα

$$P_x = \frac{A^2}{2} \tag{51}$$

Μπορεί κανείς να δείξει ότι για ένα άθροισμα N ημιτονοειδών διαφορετικών συχνοτήτων, θα έχουμε

$$P_x = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k^2}{2} \tag{52}$$

Οπότε στο ζητούμενο της άσκησης, είναι

$$P_x = \frac{5^2}{2} + \frac{1^2}{2} = \frac{25}{2} + \frac{1}{2} = 13 \tag{53}$$

Φυσικά μια λιγότερο γενική λύση είναι επίσης σωστή. Αν υπολογίσετε την ενέργειά του, θα τη βρείτε άπειρη.

(δ') Στο σήμα $x(t) = e^{2t}, \ \ -\infty < t < +\infty$, τόσο η ενέργεια όσο και η ισχύς του δεν ορίζονται (άπειρες και οι δυο). Δηλ.

$$\begin{align} E_x &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{4t}dt = \frac{1}{4}e^{4t}\Big|_{-\infty}^{+\infty} \tag{54}\\ &= \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{4}e^{4t} - \lim_{t\to-\infty} \frac{1}{4}e^{4t} = +\infty - 0 = +\infty \tag{55} \end{align}$$

ενώ επίσης

$$\begin{align} P_x &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x^2(t)dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{4t}dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\frac{1}{4}e^{4t}\Big|_{-T}^{T} \tag{56}\\ &= \frac{1}{4}\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\left(e^{4T} - e^{-4T}\right) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{8T}e^{4T} - \lim_{T\to\infty} \frac{1}{8T}e^{-4T} \tag{57}\\ &= +\infty - 0 = +\infty \tag{58} \end{align}$$

με τον πρώτο όρο να υπολογίζεται εύκολα με τους κανόνες του De L'Hospital (μορφή ∞/∞) και τον δεύτερο όρο να δίνει

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{8T}e^{-4T} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{8Te^{4T}} = \frac{1}{\infty} = 0 \tag{59}$$

(ε') Ας υπολογίσουμε την ενέργεια του $x(t) = e^{2t}, \ \ t \in [0, 2]$. Είναι

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt = \int_{0}^{2} e^{4t}dt = \frac{1}{4}e^{4t}\Big|_{0}^{2} = \frac{1}{4}(e^8 - 1) \tag{60}$$

Αν υπολογίσετε την ισχύ του, θα τη βρείτε μηδενική.

Οι γραφικές παραστάσεις φαίνονται στο Σχήμα 2.

Άσκηση 4 - Μετασχηματισμοί Σημάτων

Έστω ένα σήμα $x(t)$ που έχει μη μηδενικές τιμές για $t < -2$ και $t > 4$, δηλ.

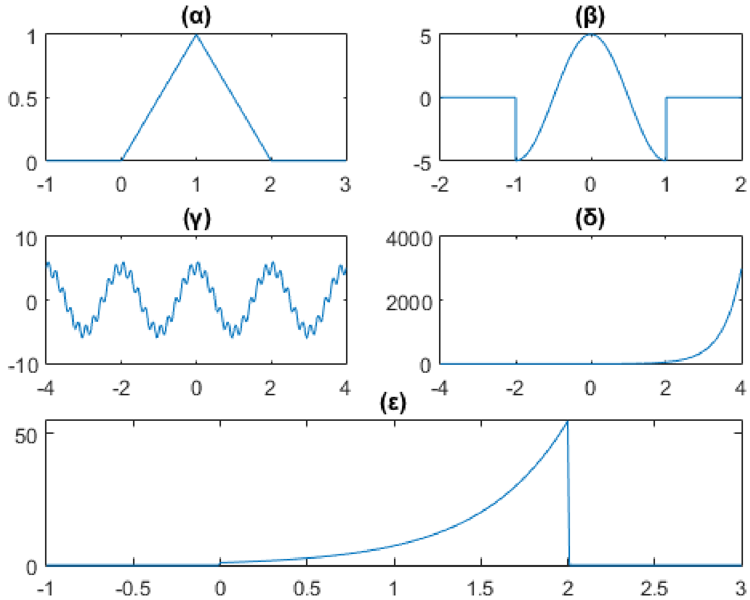
$$x(t) = \begin{cases} 0, & -2 \le t \le 4 \\ f(t) \neq 0, & t < -2 \text{ και } t > 4 \end{cases} \tag{61}$$

Για κάθε ένα από τα παρακάτω σήματα, βρείτε τις τιμές του t για τις οποίες το σήμα έχει **σίγουρα μηδενικές τιμές**.

(α) $x(t-3)$, (β) $x(t+4)$, (γ) $x(-t)$, (δ) $x(-t+2)$,
(ε) $x(-t-2)$, (στ) $x(3t)$, (ζ) $x(t/2)$

Λύση:

Για κάθε περίπτωση θα είναι



Σχήμα 2: *Σχήματα Άσκησης 3.*

(α΄) Το σήμα $x(t-3)$ αποτελεί μια χρονική μετατόπιση του αρχικού σήματος κατά $t_0 = 3$ δεξιά. Άρα το σήμα είναι σίγουρα μηδενικό για $1 \leq t \leq 7$.

(β΄) Το σήμα $x(t+4)$ αποτελεί μια χρονική μετατόπιση του αρχικού σήματος κατά $t_0 = 4$ αριστερά. Άρα το σήμα είναι σίγουρα μηδενικό για $-6 \leq t \leq 0$.

(γ΄) Το σήμα $x(-t)$ αποτελεί μια ανάκλαση του αρχικού σήματος ως προς τον κατακόρυφο άξονα. Άρα το σήμα έχει σίγουρα μηδενικές τιμές για $-4 \leq t \leq 2$.

(δ΄) Το σήμα $x(-t+2)$ αποτελεί μια ανάκλαση του αρχικού σήματος ως προς τον κατακόρυφο άξονα και στη συνέχεια μια ολίσθηση προς τα *δεξιά* - λόγω της αντιστροφής του άξονα του χρόνου. Άρα το σήμα έχει σίγουρα μηδενικές τιμές για $-2 \leq t \leq 4$.

(ε΄) Το σήμα $x(-t-2)$ αποτελεί μια ανάκλαση του αρχικού σήματος ως προς τον κατακόρυφο άξονα και στη συνέχεια μια ολίσθηση προς τα *αριστερά* - λόγω της αντιστροφής του άξονα του χρόνου. Άρα το σήμα έχει σίγουρα μηδενικές τιμές για $-6 \leq t \leq 0$.

(ϛ΄) Το σήμα $x(3t)$ αποτελεί μια χρονική στάθμιση (συμπίεση) του αρχικού σήματος, κατά παράγοντα $a = 3$. Άρα το σήμα έχει σίγουρα μηδενικές τιμές για $-2/3 \leq t \leq 4/3$.

(ζ΄) Το σήμα $x(t/2)$ αποτελεί μια χρονική στάθμιση (διαστολή) του αρχικού σήματος, κατά παράγοντα $a = 1/2$. Άρα το σήμα έχει σίγουρα μηδενικές τιμές για $-4 \leq t \leq 8$.

Τα παραπάνω μπορείτε να τα βρείτε με τον ορισμό που σας δίνεται, αντικαθιστώντας το t με τους αντίστοιχους μετασχηματισμούς. Για παράδειγμα, για το (α),

$$x(t-3) = \begin{cases} 0, & -2 \leq t-3 \leq 4 \\ f(t-3), & t-3 < -2 \text{ και } t-3 > 4 \end{cases} = \begin{cases} 0, & 1 \leq t \leq 7 \\ f(t-3), & t < 1 \text{ και } t > 7 \end{cases} \tag{62}$$

οπότε βλέπετε ότι πράγματι το $x(t-3)$ είναι μια χρονική μετατόπιση του αρχικού σήματος κατά $t_0 = 3$ δεξιά. Άρα το σήμα είναι σίγουρα μηδενικό για $1 \leq t \leq 7$. Όμοια ακριβώς και για τα υπόλοιπα.
Όμως συνίσταται να μάθετε τους κανόνες που προκύπτουν από τους μετασχηματισμούς της χρονικής μεταβλητής χωρίς να χρειάζεται να εφαρμόζετε τον ορισμό κάθε φορά (τουλάχιστον για τις χρονικές μετατοπίσεις και αναστροφές - η στάθμιση καμιά φορά χρειάζεται τον ορισμό). Αν δεν είστε 100% σίγουροι/ες όμως, ο αναλυτικός υπολογισμός με τον ορισμό όπως δείξαμε μόλις θα σας είναι χρήσιμος.