HY-215 Φροντιστήριο 2
1/3/2024

Άσκηση 1 - Ημίτονα Ι $z = x + jy = \underbrace{|z|(\underbrace{\cos\phi}_{Re} + j\underbrace{\sin\phi}_{Im})}$ $= \boxed{|z|e^{j\phi}}$

(α') Λύστε την παρακάτω εξίσωση ως προς το άγνωστο ημίτονο

$$\cos\left(2\pi\frac{3}{4}t - \frac{5\pi}{4}\right) + \underbrace{A\cos(2\pi f_0 t + \phi)} = 2\cos\left(2\pi\frac{3}{4}(t+5)\right) + 3\cos\left(2\pi\frac{3}{4}(t-6)\right) \quad (1)$$

Χρησιμοποιήστε το μιγαδικό χώρο για να απλοποιήσετε τη λύση της παραπάνω εξίσωσης. Χρησιμοποιήστε αριθμομηχανή για τις πράξεις σας όπου απαιτείται.

$Ae^{j2\pi f_0 t + \phi} = A(\cos(2\pi f_0 t + \phi) + j\sin(2\pi f_0 t + \phi))$

(β') Ελέγξτε αν το σήμα

$$x(t) = 2\cos(2\pi 50t - \pi/2) + \sqrt{3}\sin(2\pi 30t + \pi/4) - \sin(2\pi 25t) \quad (2)$$

είναι περιοδικό και βρείτε την περίοδό του, T_0. Εξηγήστε επαρκώς τη μέθοδο λύσης σας. Τέλος, σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης του.

a) $A\cos(2\pi f_0 t + \phi) = 2\cos(2\pi\frac{3}{4}(t+5)) + 3\cos(2\pi\frac{3}{4}(t-6)) - \cos(2\pi\frac{3}{4}t - \frac{5\pi}{4})$

$\cdot\ \mathcal{R}\{\underbrace{Ae^{j\phi}e^{j2\pi f_0 t}}\} = \mathcal{R}\{2e^{j2\pi\frac{3}{4}t}\cdot e^{j2\pi\frac{15}{4}}\} + \mathcal{R}\{3e^{j2\pi\frac{3}{4}t}e^{-j2\pi\frac{18}{4}}\} -$

$-\mathcal{R}\{e^{j2\pi\frac{3}{4}t}e^{-j\frac{5\pi}{4}}\}$

$= \mathcal{R}\{2e^{j2\pi\frac{3}{4}t}e^{j2\pi\frac{15}{4}} + 3e^{j2\pi\frac{3}{4}t}e^{-j2\pi\frac{18}{4}} - e^{j2\pi\frac{3}{4}t}e^{-j\frac{5\pi}{4}}\} =$

$= \mathcal{R}\{e^{j2\pi\frac{3}{4}t}\underbrace{(2e^{j2\pi\frac{15}{4}} + e^{-j2\pi\frac{18}{4}} - e^{-j\frac{5\pi}{4}})}\}$

$a + jb = -2.2929 - j2.707 = \boxed{3.5476e^{-j0.72369\pi}}$

$\mathcal{R}\{Ae^{j\phi}e^{j2\pi f_0 t}\} = \mathcal{R}\{\underbrace{3.5476}_{A}\ e^{\overbrace{-j0.72369\pi}^{\phi = -0.72369\pi}}\cdot e^{j2\pi\frac{3}{4}t}\}$

$\frac{3}{4} \rightarrow f_0$

β) $x(t) = \boxed{2\cos(2\pi\underbrace{50}_{f_3}t - \frac{\pi}{2})} + \sqrt{3}\sin(2\pi\underbrace{30}_{f_1}t + \frac{\pi}{4}) - \sin(2\pi\underbrace{25}_{f_2}t)$

$\frac{f_3}{f_1} = \frac{50}{30}$, $\frac{f_3}{f_2} = \frac{50}{25}$ . .

$\frac{f_1}{f_2} = \frac{30}{25}$ → ακέραιοι

Άρα το σήμα είναι περιοδικό

$f_0 = \text{Μ.Κ.Δ}\{50, 30, 25\} = 5\,Hz$

$$T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{1}{5} = 0.2\,s$$

$$\begin{cases} \cos(x) = \dfrac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \\[2ex] \sin(x) = \dfrac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \end{cases}$$

$$\frac{\cancel{2}\left(e^{j2\pi 50t} e^{-j\frac{\pi}{2}} + e^{-j2\pi 50t} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}\right)}{\cancel{2}} + \sqrt{3}\,\frac{\left(e^{j2\pi 30t} \cdot e^{j\frac{\pi}{4}} - e^{-j2\pi 30t} e^{-j\frac{\pi}{4}}\right)}{2j} - \frac{\left(e^{j2\pi 25t} - e^{-j2\pi 25t}\right)}{2j} =$$

$$= e^{j2\pi 50t} e^{-j\frac{\pi}{2}} + e^{-j2\pi 50t} e^{j\frac{\pi}{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2j} e^{j2\pi 30t} e^{j\frac{\pi}{4}} - \frac{\sqrt{3}}{2j} e^{-j2\pi 30t} e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

$$-\frac{1}{2j} e^{j2\pi 25t} + \frac{1}{2j} e^{-j2\pi 25t} =$$

$$e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{j\frac{\pi}{4}} = e^{j\frac{\pi}{4} - j\frac{\pi}{2}} = e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

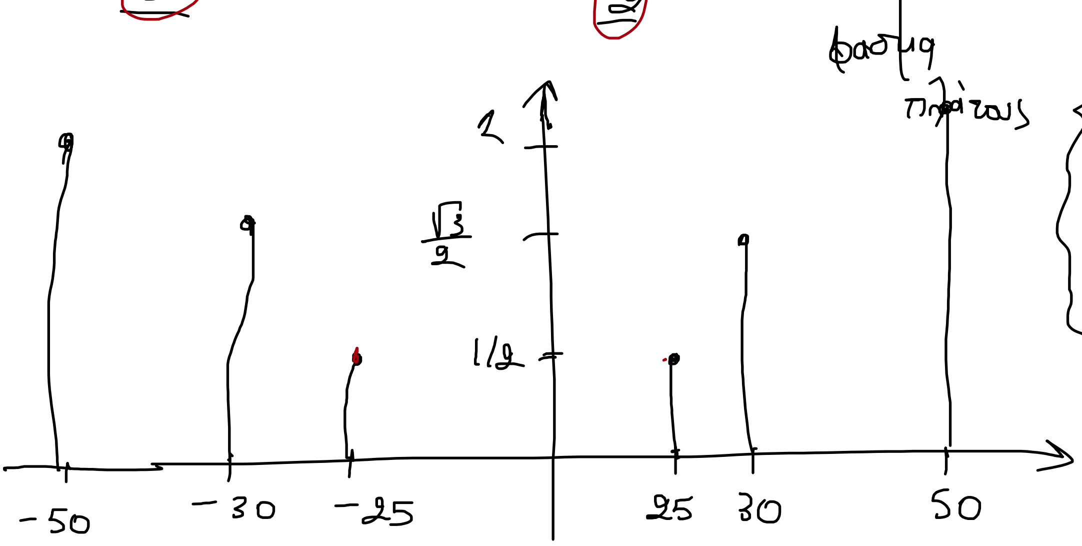
$$= 1 e^{j2\pi 50t} e^{-j\frac{\pi}{2}} + 1 e^{-j2\pi 50t} e^{j\frac{\pi}{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{j2\pi 30t} e^{j\frac{\pi}{4}} + \frac{\sqrt{3}}{2} e^{+j\frac{\pi}{2}} e^{-j2\pi 30t} e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

$$+ e^{j\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} e^{j2\pi 25t} + e^{-j\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} e^{-j2\pi 25t}$$

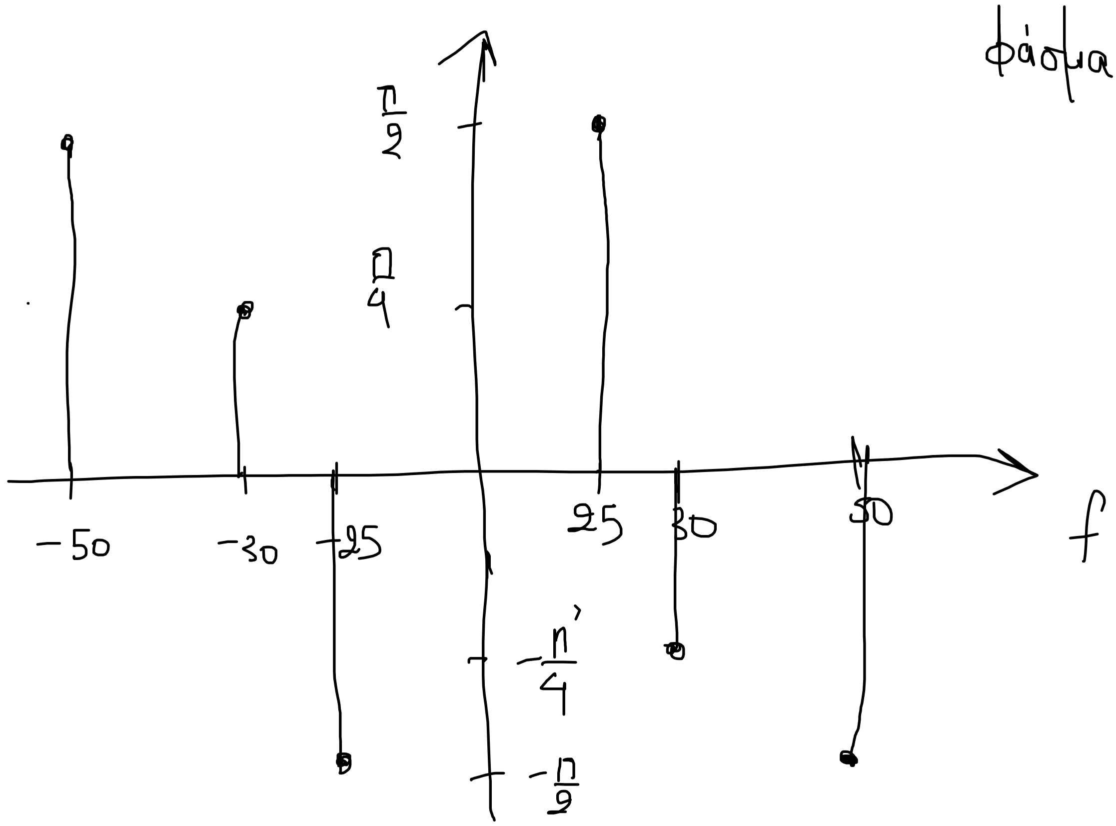
$$j = e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$\frac{1}{j} = e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$-\frac{1}{j} = e^{j\frac{\pi}{2}}$$



φάσμα φάσης



Άσκηση 2 - Εξισώσεις

(α′) Λύστε την εξίσωση

$$\Im\Big\{\Big(-\frac{\sqrt{3}}{2}+j\frac{1}{2}\Big)e^{j\theta}\Big\}=\frac{\sqrt{3}}{2} \tag{20}$$

(β′) Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις του Euler, δείξτε ότι

$$\int_0^{2\pi}\cos^4(\theta)d\theta=\frac{3\pi}{4} \tag{21}$$

$$Im\Big\{\underbrace{\Big(-\frac{\sqrt{3}}{2}+j\frac{1}{2}\Big)}_{\to |z|e^{j\theta}}e^{j\theta}\Big\}=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow Im\Big\{e^{j\frac{5\pi}{6}}e^{j\theta}\Big\}=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\theta=\tan^{-1}\frac{y}{x}+\pi$$

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$Im\{e^{jx}\}=\cancel{\cos x}+\sin x$$

$$\Leftrightarrow Im\Big\{e^{j(\theta+\frac{5\pi}{6})}\Big\}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\Big(\theta+\frac{5\pi}{6}\Big)=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\Big(\theta+\frac{5\pi}{6}\Big)=\sin\Big(\frac{\pi}{3}\Big) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \theta+\frac{5\pi}{6}=\begin{cases}2k\pi+\pi-\frac{\pi}{3}\\ 2k\pi+\frac{\pi}{3}\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\theta=\begin{cases}2k\pi-\frac{\pi}{6}\\ 2k\pi-\frac{\pi}{2}\end{cases}},\ k\in\mathbb{Z}$$

β) $$\int_0^{2\pi}\cos^4(\theta)d\theta=\int_0^{2\pi}\cos^2(\theta)\cdot\cos^2(\theta)d\theta=$$

$$=\int_0^{2\pi}\Big(\frac{1}{2}e^{j\theta}+\frac{1}{2}e^{-j\theta}\Big)^2\Big(\frac{1}{2}e^{j\theta}+\frac{1}{2}e^{-j\theta}\Big)^2d\theta=$$

$$=\int_0^{2\pi}\Big(\frac{1}{4}e^{j2\theta}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}e^{-j2\theta}\Big)\Big(\frac{1}{4}e^{j2\theta}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}e^{-j2\theta}\Big)d\theta=$$

$$=\int_0^{2\pi}\Big(\frac{1}{16}e^{j4\theta}+\frac{1}{8}e^{j2\theta}+\frac{1}{16}+\frac{1}{8}e^{j2\theta}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}e^{-j2\theta}+\frac{1}{16}+\frac{1}{8}e^{-j2\theta}+\frac{1}{16}e^{-j4\theta}\Big)d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\Big(\frac{1}{8}\cos(4\theta)+\frac{1}{4}\cos(2\theta)+\frac{1}{4}\cos(2\theta)+\frac{3}{8}\Big)d\theta=$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{8}\cos(4\theta) + \frac{1}{2}\cos(2\theta) + \frac{3}{8} \right) d\theta =$$

$$= \frac{1}{32}\sin(4\theta) + \frac{1}{4}\sin(2\theta) + \frac{3}{8}\theta \Big|_0^{2\pi} = 0 + 0 + \frac{6\pi}{8} - 0 - 0 - 0 = \frac{6\pi}{8} =$$

$$= \boxed{\frac{3\pi}{4}}$$

Άσκηση 3 - Ενέργεια και Ισχύς

Στη θεωρία, στην προσπάθειά σας να βρείτε τη Σειρά Fourier εισάγατε την έννοια του εσωτερικού γινομένου. Για πραγματικά σήματα, το εσωτερικό γινόμενο ενός σήματος με τον εαυτό του ταυτίζεται με την *ενέργεια* του:

$$E_x =< x(t), x(t) >= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt \tag{35}$$

Για σήματα που η ενέργειά τους είναι άπειρη (και άρα δεν έχει νόημα), έχουμε ορίσει τη *μέση ισχύ τους*, ως

$$P_x = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x^2(t)dt \tag{36}$$

Οι δυο αυτές μετρικές δίνουν μια αίσθηση για το “μέγεθος ” ενός σήματος.

Σχεδιάστε και ελέγξτε τα παρακάτω σήματα ως προς το αν είναι σήματα ενέργειας ή ισχύος (ή τίποτε από τα δυο), υπολογίζοντας τις δυο ποσότητες.

(α') $x(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t \le 1 \\ 2-t, & 1 < t \le 2 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

(β') $x(t) = \begin{cases} 5\cos(\pi t), & -1 \le t \le 1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

(γ') $x(t) = 5\cos(\pi t) + \sin(10\pi t), \quad -\infty < t < +\infty$

(δ') $x(t) = e^{2t}, \quad -\infty < t < +\infty$

(ε') $x(t) = e^{2t}, \quad t \in [0, 2]$

α) $E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt = \int_0^1 t^2 dt + \int_1^2 (2-t)^2 dt =$

$= \frac{t^3}{3}\Big]_0^1 + \left(4t - \frac{4t^2}{2} + \frac{t^3}{3}\right)\Big]_1^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

β) $E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt = \int_{-1}^{1} (5\cos(\pi t))^2 dt = 25\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{4}e^{j2\pi t} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{-j2\pi t}\right)dt$

$= 25\int_{-1}^{1} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\pi t)dt = 25\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4\pi}\sin(2\pi t)\right)\Big]_{-1}^{1} =$

$= \frac{25}{\cancel{2}}(\cancel{1+1}) + \cancel{\frac{1}{4\pi}}0 = \boxed{25}$

γ) $P_x = \sum_{i=1}^{2} \frac{A_i^2}{2} = \frac{5^2}{2} + \frac{1^2}{2} = \frac{25+1}{2} = 13$

δ) τίποτα επειδή απειρίζονται και τα δύο

ε) $E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\,dt = \int_0^2 e^{4t}\,dt = \frac{1}{4}e^{4t}\Big]_0^2 = \frac{1}{4}(e^8 - 1)$

[⋆] Άσκηση 4 - Μετασχηματισμοί Σημάτων

Έστω ένα σήμα $x(t)$ που έχει μη μηδενικές τιμές για $t < -2$ και $t > 4$, δηλ.

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t \geq -2 \\ 0, & t \leq 4 \\ f(t), & t < -2 \text{ και } t > 4 \end{cases} \tag{48}$$

Για κάθε ένα από τα παρακάτω σήματα, βρείτε τις τιμές του t για τις οποίες το σήμα έχει **σίγουρα μηδενικές τιμές**.
(α) $x(t-3)$, (β) $x(t+4)$, (γ) $x(-t)$, (δ) $x(-t+2)$,
(ε) $x(-t-2)$, (στ) $x(3t)$, (ζ) $x(t/2)$

α) $x(t-3) = \begin{cases} 0, & t-3 \geq -2 \\ 0, & t-3 \leq 4 \\ f(t-3), & t-3 < -2 \text{ και } t-3>4 \end{cases} = \begin{cases} 0, & t \geq 1 \\ 0, & t \leq 7 \\ f(t-3), & t<1 \text{ και } t>7 \end{cases}$

$[1, 7]$

β) $x(t+4) = \begin{cases} 0, & t+4 \geq -2 \\ 0, & t+4 \leq 4 \\ f(t+4), & t+4<-2 \text{ και } t+4>4 \end{cases} = \begin{cases} 0, & t \geq -6 \\ 0, & t \leq 0 \\ f(t+4), & t<6 \text{ και } t>0 \end{cases}$

$[-6, 0]$

γ) $x(-t) = \begin{cases} 0, & -t \geq -2 \\ 0, & -t \leq 4 \\ f(-t), & -t<-2 \text{ και } -t>4 \end{cases} = \begin{cases} 0, & t \leq 2 \\ 0, & t \geq -4 \\ f(-t), & t>2 \text{ και } t<-4 \end{cases}$

$[-4, 2]$

δ) $x(-t+2) = \begin{cases} 0, & -t+2 \geq -2 \\ 0, & -t+2 \leq 4 \\ f(-t+2), & -t+2 < -2 \text{ και } -t+2>4 \end{cases} = \begin{cases} 0, & t \leq 4 \\ 0, & t \geq -2 \\ f(-t+2), & \text{αλλού} \end{cases}$

$[-2, 4]$

ε) $x(-t-2) = \begin{cases} 0, & -t-2 \geq -2 \\ 0, & -t-2 \leq 4 \\ f(-t-2), & \text{αλλού} \end{cases} = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 0, & t \geq -6 \\ f(-t-2), & \text{αλλού} \end{cases}$

$[-6, 0]$

στ) $x(3t) = \begin{cases} 0, & 3t \geq -2 \\ 0, & 3t \leq 4 \\ f(3t), & \text{αλλού} \end{cases} = \begin{cases} 0, & t \geq -\frac{2}{3} \\ 0, & t \leq \frac{4}{3} \\ f(3t), & \text{αλλού} \end{cases}$

$$\left[-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right]$$

ζ) $x(t/2) = \begin{cases} 0, & \frac{t}{2} \geq -2 \\ 0, & t/2 \leq 4 \\ f(t/2), & \text{αλλού} \end{cases} = \begin{cases} 0, & t \geq -4 \\ 0, & t \leq 8 \\ f(t/2), & \text{αλλού} \end{cases}$

$$[-4, 8]$$