ΗΥ-215

Φροντιστήριο Προετοιμασίας Προόδου

Άσκηση 1 - Βαθμός: 10

Ενα πραγματικό περιοδικό σήμα όταν αναπτυχθεί σε εκθετική σειρά Fourier έχει συντελεστές

$$[\,X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\,] = [\,2e^{-j\pi/5}, \sqrt{3}e^{j\pi/4}, 2e^{j\pi/12}, \sqrt{3}e^{-j\pi/5}, e^{j\pi/3}\,] \tag{1}$$

Πόση είναι η ισχύς P_x του σήματος; Τι ποσοστό της συνολικής ισχύος του σήματος οφείλεται στον πρώτο όρο της τριγωνομετρικής (ή μονόπλευρης) αναπαράστασής του σε Σειρά Fourier (δηλ. στο πρώτο ημίτονο - $k = 1$);

$$P_x = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} |x(t)|^2 dt \overset{\text{Θ. Pars.}}{=\!=} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 =$$

• $|X_k| = |X_{-k}^*|$ αφού το σήμα πραγματικό

$$= 2\sum_{k=1}^{5}|X_k|^2 = 2\Big[|2e^{-j\pi/5}|^2 + |\sqrt{3}e^{j\frac{\pi}{4}}|^2 + |2e^{j\pi/12}|^2 + |\sqrt{3}e^{-j\pi/5}|^2 + |e^{j\pi/3}|^2\Big] =$$

$$= 2\left(2^2 + (\sqrt{3})^2 + 2^2 + (\sqrt{3})^2 + 1^2\right) =$$

$$= 2(4 + 3 + 4 + 3 + 1) = 15 \cdot 2 = 30$$

Στον 1ο όρο της τριγ/κής Σ.F. αντιστοιχούν τα X_1, X_{-1}, με άλλα λόγια $|X_1| = 2$ άρα $2 \cdot |X_1|^2 = 8$, δηλαδή $\frac{8}{30} = 26\%$

Άσκηση 2 - Βαθμός: 15

Λύστε την εξίσωση

$$2\cos(2\pi 100t - \pi/3) + \cos(2\pi 100t + \pi/4) = A\cos(2\pi f_0 t + \phi) - 3\cos(2\pi 100t - \pi/4) \iff$$

ως προς το άγνωστο ημίτονο.

$$\iff A\cos(2\pi f_0 t + \varphi) = 2\cos\left(2\pi 100t - \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(2\pi 100t + \frac{\pi}{4}\right) + 3\cos(2\pi 100t - \pi/4)$$

$$\iff \mathrm{Re}\{A e^{j\varphi} e^{j2\pi f_0 t}\} = \mathrm{Re}\{2\cdot e^{j2\pi 100t} e^{-j\frac{\pi}{3}} + e^{j2\pi 100t} e^{j\frac{\pi}{4}} + 3 e^{j2\pi 100t} e^{-j\frac{\pi}{4}}\}$$

$$= \mathrm{Re}\{e^{j2\pi 100t} (\underbrace{2e^{-j\frac{\pi}{3}} + e^{j\frac{\pi}{4}} + 3e^{-j\frac{\pi}{4}}}_{(a+jb)})\}$$

$$a = 2\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 3\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) = 1+2\sqrt{2}$$

$$b = 2\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + 3\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right) = -\sqrt{3} - \sqrt{2}$$

Άρα $a + jb = (1+2\sqrt{2}) + j(-\sqrt{3} - \sqrt{2})$

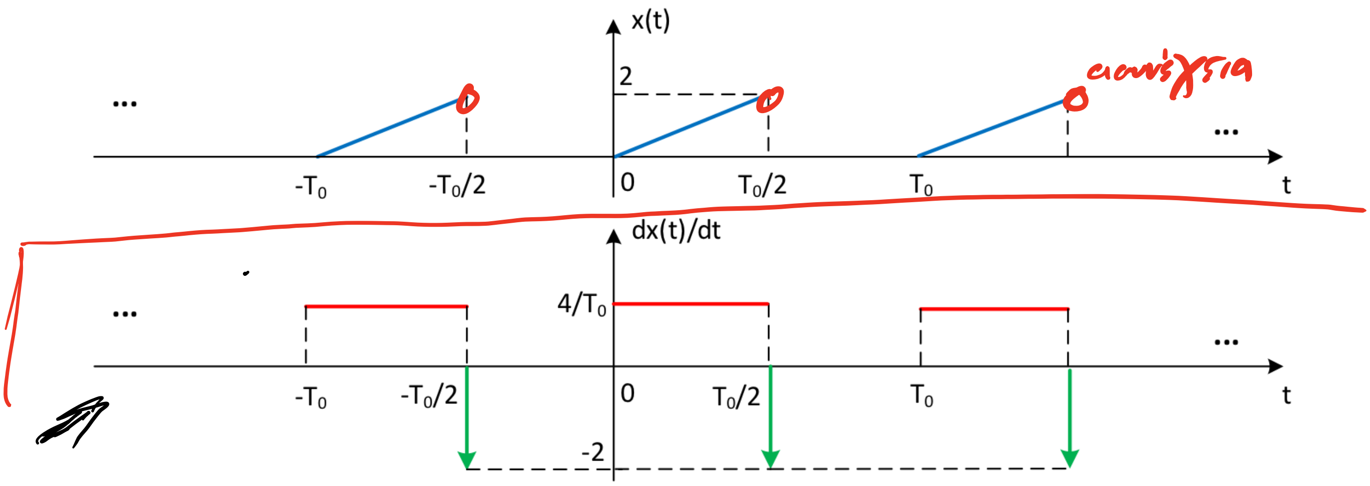
και $A\cos(2\pi f_0 t + \varphi) = \mathrm{Re}\{(1+2\sqrt{2}) + j(-\sqrt{3} - \sqrt{2})\}$

Άσκηση 3 - Βαθμός: 40

Για το περιοδικό σήμα $x(t)$ το οποίο φαίνεται στο Σχήμα 1, δείξτε ότι οι συντελεστές της εκθετικής Σειράς Fourier του δίνονται ως

$$X_k = \begin{cases} \frac{2}{\pi^2 k^2} e^{-j\pi} + \frac{1}{\pi k} e^{-j\pi/2}, & k \text{ περιττό} \\ \frac{1}{\pi k} e^{j\pi/2}, & k \text{ άρτιο} \end{cases} \tag{15}$$

Συνίσταται να χρησιμοποιήσετε ιδιότητες.



Σχήμα 1: *Σήμα $x(t)$ Άσκησης 3.*

Χωρίζουμε το $\frac{dx}{dt}$ σε 2 υποσήματα

$\frac{dx_1}{dt}$ (τα ορθογώνια/τετρ. παλμοί) $A = 4/T_0$

$\frac{dx_2}{dt}$ (τα δ) $A = -2$

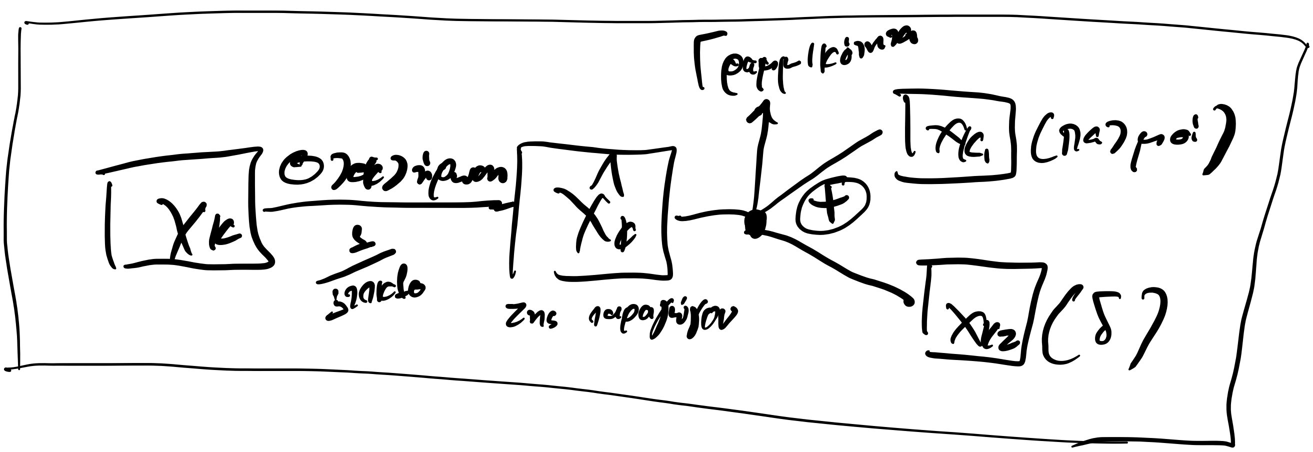
Άρα $X_{k_1} = \frac{4}{T_0} \frac{1}{\pi k} e^{-j\frac{\pi}{2}}$, k περιττό αλλιώς 0

$X_{k_2} = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \left(-2\delta\left(t - \frac{T_0}{2}\right)\right) e^{-j2\pi k t/T_0} \, dt = \frac{-2}{T_0}(-1)^k$

Λόγω γραμμικότητας $\hat{X}_k = X_{k_1} + X_{k_2} =$

$$= \begin{cases} \frac{4}{T_0}\frac{1}{\pi k} e^{-j\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{T_0}, & k \text{ περιττά} \\ \frac{-2}{T_0}, & k \text{ άρτια} \end{cases}$$

$$X_k = \frac{\hat{X}_k}{j2\pi k f_0} = \begin{cases} \frac{1}{j2\pi k f_0}\left(\frac{4}{T_0}\frac{1}{\pi k} e^{-j\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{T_0}\right), & k \text{ περ.} \\ \frac{1}{j2\pi k f_0}\left(\frac{-2}{T_0}\right), & k \text{ άρτια} \end{cases}$$



Άσκηση 4 - Βαθμός: 15

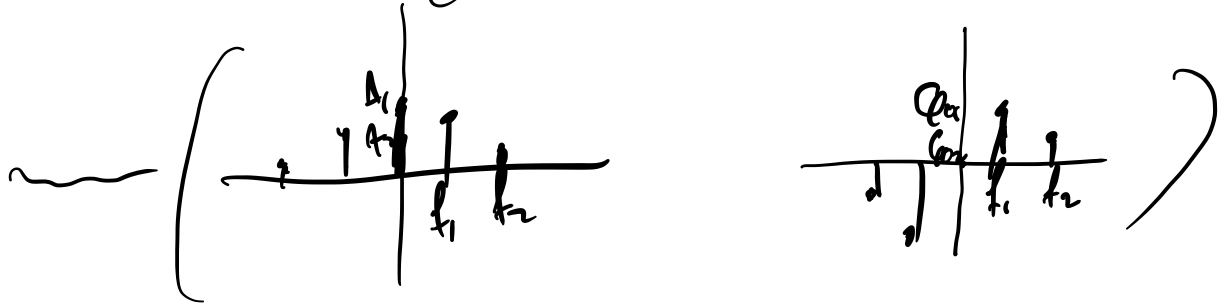
Αναπτύξτε σε εκθετική Σειρά Fourier το σήμα:

$$x(t) = [6 + 2\cos(2\pi 5t)]\,\cos(2\pi 100t)$$

και σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης του.

Μεθοδολογία

$$X(f) \sim \left(A_1 e^{j\varphi_1 t} e^{j\varphi_0} + \dots\right)$$



$$X(f) = 6\cos(2\pi 100t) + 2\cos(2\pi 5t)\cos(2\pi 100t)$$

$$\overset{\text{Euler}}{=} 3e^{j2\pi 100t} + 3e^{-j2\pi 100t} + \frac{1}{2}\left(e^{j2\pi 5t} + e^{-j2\pi 5t}\right)\left(e^{j2\pi 100t} + e^{-j2\pi 100t}\right)$$

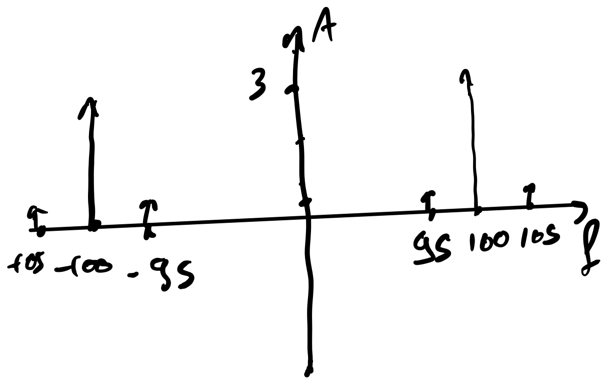
$$= 3e^{j2\pi 100t} + 3e^{-j2\pi 100t} + \frac{1}{2}\underbrace{e^{j2\pi 5t}e^{j2\pi 100t}}_{105} + \frac{1}{2}\underbrace{e^{j2\pi 5t}e^{-j2\pi 100t}}_{-95}$$

$$+ \frac{1}{2}\underbrace{e^{-j2\pi 5t}e^{j2\pi 100t}}_{95} + \frac{1}{2}\underbrace{e^{-j2\pi 5t}e^{-j2\pi 100t}}_{-105}$$

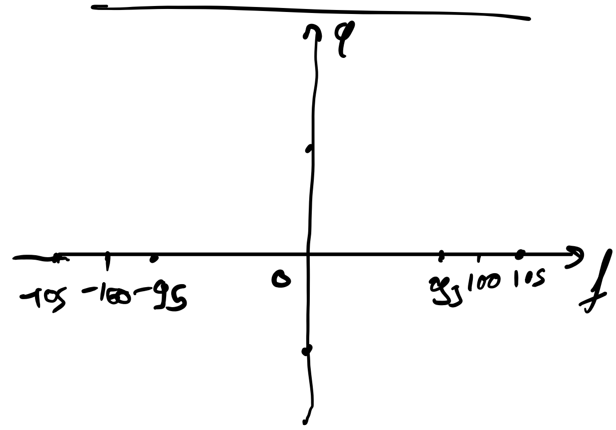
$$= \underbrace{3e^{j2\pi 100t} + 3e^{-j2\pi 100t}}_{} + \underbrace{\frac{1}{2}e^{j2\pi 105t} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi 105t}}_{} +$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2}e^{j2\pi 95t} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi 95t}}_{}$$

Φάσμα Πλάτους

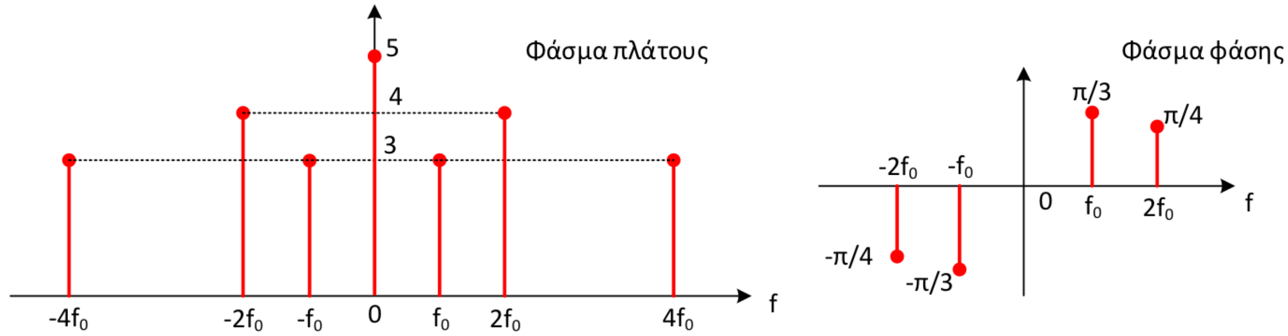


Φάσμα Φάσης



Άσκηση 5 - Βαθμός: 15

Αναπτύξτε σε τριγωνομετρική (ή μονόπλευρη) Σειρά Fourier το σήμα του οποίου το φάσμα πλάτους και φάσης της εκθετικής Σειράς Fourier φαίνεται στο παρακάτω Σχήμα 3.



Σχήμα 3: *Φάσματα άσκησης 5.*

$$x(t) = 5 + 3e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t} +$$

$$+ 4\cdot e^{j2\pi\cdot 2f_0 t} e^{j\pi/4} + 4e^{-j2\pi 2f_0 t} e^{-j\pi/4}$$

$$+ 3\cdot e^{j2\pi 4 f_0 t} + 3e^{-j2\pi 4 f_0 t}$$ Euler

$$= 5 + 6\cos(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{3}) + 8\cos(2\pi 2f_0 t + \frac{\pi}{4}) + 6\cos(2\pi 4 f_0 t)$$

Άσκηση 6

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

1.) $$\int_{-\infty}^{t} \cos(\tau)u(\tau)\,d\tau = \int_{0}^{t} \cos(\tau)\cdot 1\,d\tau =$$

$$= \begin{cases} \sin(t), & t>0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$$

2.) $$\int_{-\infty}^{t} \cos(\tau)\delta(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{t} \cos(0)\cdot\delta(\tau)\,d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,d\tau = \begin{cases} 1, & t>0 \\ 0, & t<0 \end{cases} = u(t)$$

3.) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(t)\underbrace{u(t-1)}_{=1,\ t>1}\delta(t)\,dt$$

$$= \int_{1}^{+\infty} \cos(t)\,\delta(t)\,dt = \int_{1}^{+\infty} \delta(t)\,dt = 0$$

4.) $$\int_{0}^{2\pi} t\sin\left(\frac{t}{2}\right)\delta(\pi-t)\,dt = \int_{0}^{2\pi} \pi\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\delta(\pi-t)\,dt$$

$$\int_0^{2\pi} \pi\, \delta(\pi - t)\, dt = \pi$$