Φροντιστήριο 3/1

① Ενέργειας ή ισχύος;

Reminder...

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

$$P_x = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt$$

$0 < E_x < +\infty \rightarrow$ ενέργειας

$0 < P_x < +\infty \rightarrow$ ισχύος

σήμα ενέργειας $\begin{cases} \bullet \text{ πεπερασμένο} \\ \bullet \text{ άπειρης διάρκειας αλλά } \lim_{t\to\pm\infty} x(t) = 0 \end{cases}$

σήμα ισχύος $\begin{cases} \bullet \text{ άπειρης διάρκειας} \\ \bullet \text{ περιοδικό} \end{cases}$

(φραγμένο πλάτος $\forall t$)

(α) $x(t) = t\,u(-t)$

φρα~~γ~~μένο κρι~~τή~~ρια $\Rightarrow$ ούτε ενέργειας ούτε ισχύος:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2u^2(-t)dt = \int_{-\infty}^{0} t^2 dt = \frac{t^3}{3}\Big|_{-\infty}^{0} = +\infty$$

και $$P_x = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x^2(t)dt = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{0} t^2dt = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\frac{t^3}{3}\Big|_{-T}^{0}$$

$$= \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\frac{T^3}{3} = \lim_{T\to+\infty}\frac{T^2}{6} = +\infty$$

(β) $x(t) = 3\cos(2\pi t - \frac{\pi}{2}) + 4\sin(10\pi t + \frac{\pi}{3})$

περιοδικό $\Rightarrow$ ισχύος

$$P_x = \frac{3^2}{2} + \frac{4^2}{2} = \frac{25}{2}$$

$x(t)$ ημιτονοειδές $\Rightarrow P_x = \frac{A^2}{2}$

(γ) $x(t) = \frac{1}{t}u(t-1)$ παρατήρηση: όσο $t\to\infty$ φθίνει στο 0 (μάλλον σήμα ενέργειας)

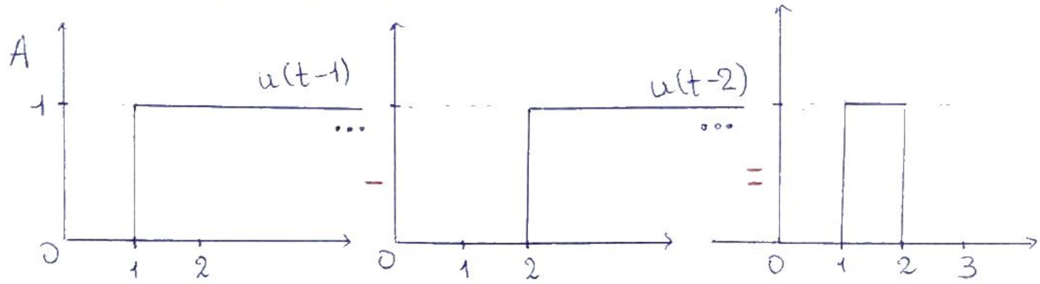
$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\,dt = \int_{1}^{+\infty}\frac{1}{t^2}dt = -\frac{1}{t}\Big|_{t=1}^{+\infty} = -(0-1) = 1$$

(δ) $x(t) = e^{-4|t|}$ παρατήρηση: άπειρης διάρκειας αλλά για $|t|\to\infty$ το πλάτος φθίνει στο 0 (ενέργειας;)

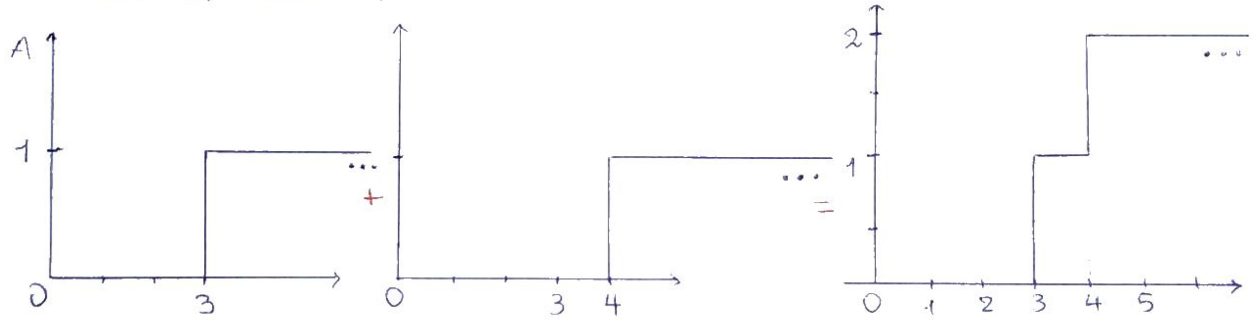
$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-8|t|}\,dt = \int_{-\infty}^{0} e^{8t}\,dt + \int_{0}^{\infty} e^{-8t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{8} e^{8t}\Big|_{-\infty}^{0} - \frac{1}{8} e^{-8t}\Big|_{0}^{+\infty} = \frac{1}{4}$$

(2) (α) $u(t-1) - u(t-2)$

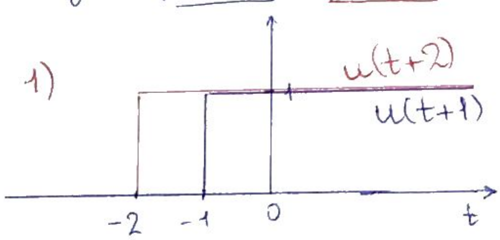


(β) $u(t-3) + u(t-4)$



(γ) $t\,(u(t+1) - u(t+2))$

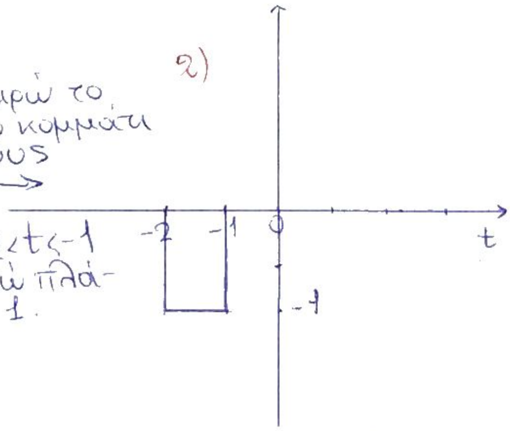
1)



αφαιρώ το κοινό κομμάτι τους

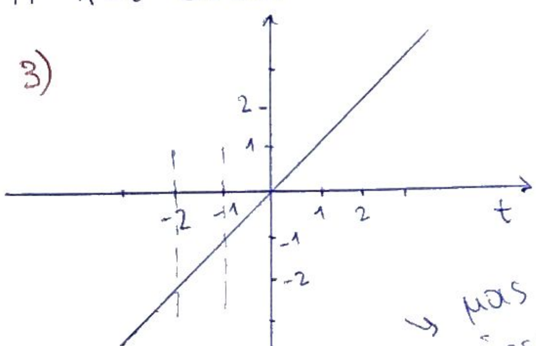
+ στο $-2<t<-1$ αφαιρώ πλάτος 1.

2)



Η $x=t$ είναι:

3)



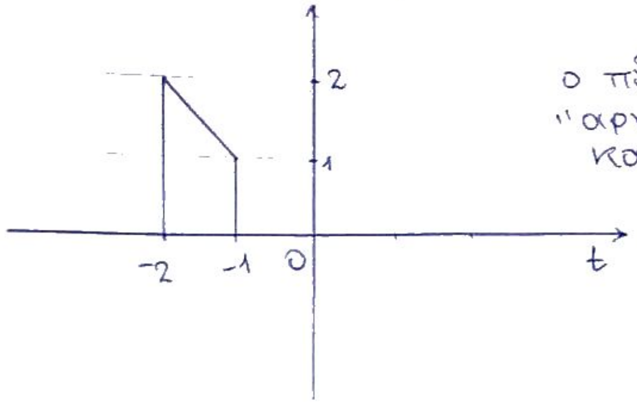
→ μας ενδιαφέρει το διάστημα $-2<t<-1$

$$u(t+1) - u(t+2) = \begin{cases} -1, & -2<t<-1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

άρα $\Rightarrow t\,(u(t+1) - u(t+2)) =$

$$\begin{cases} -t, & -2<t<-1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

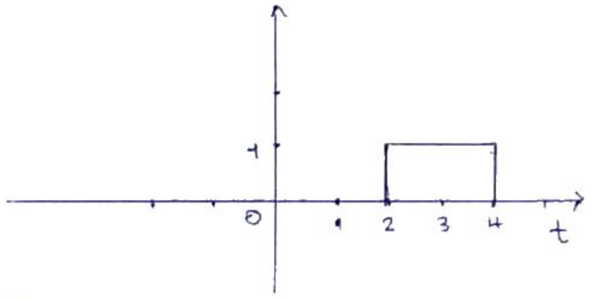
Άρα το τελικό σήμα θα είναι:



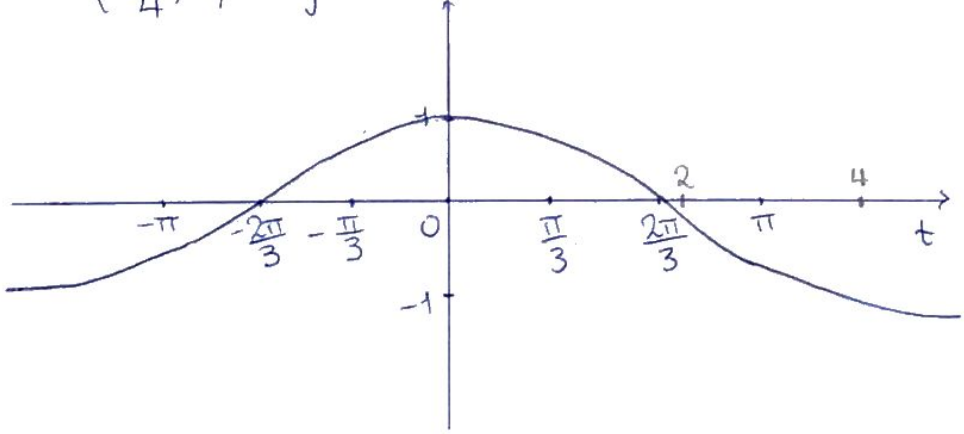
ο πολλαπλασιασμός των δύο "αρχικών" σημάτων (2) και (3)

(δ) $\cos\left(\frac{\pi t}{4}\right)\left(u(t-2)-u(t-4)\right)$

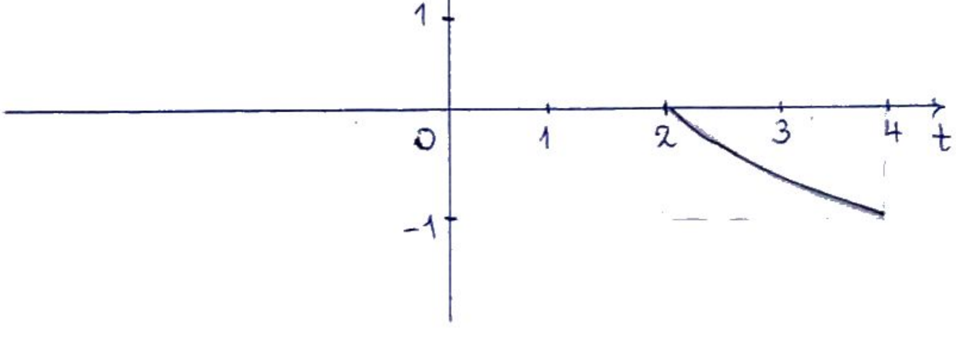
Ομοίως με πριν, το $u(t-2)-u(t-4)$ θα είναι: $\begin{cases} 1, & 2<t<4 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$



Το $\cos\left(\frac{\pi t}{4}\right)$ μοιάζει κάπως:



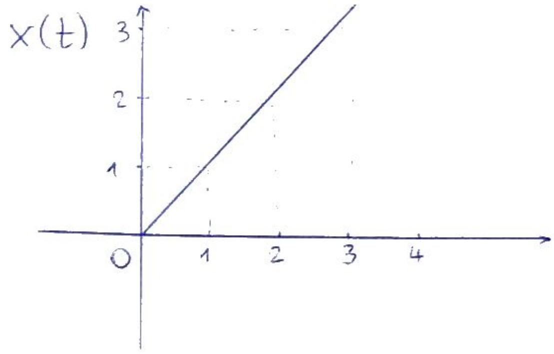
Οπότε το σήμα μας θα είναι:



③ σήμα $x(t) = tu(t)$

σύστημα $y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$

(α)



(β) $y(t) = \frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}tu(t) = t'u(t) + tu'(t) = u(t) + t\delta(t)$

$= u(t) + 0\delta(t) = u(t)$

Δειγματοληπτούμε το σήμα για $t_0 = 0$

Reminder...

Πολλαπλασιασμός συνεχούς σήματος με συνάρτηση Δέλτα για $t = t_0$:

$x(t)\delta(t-t_0) = \underline{x(t_0)}\,\delta(t-t_0)$

Δειγματοληπτεί το σήμα $x(t)$ τη χρονική στιγμή t_0.

(γ) $y_1(t) = \frac{d}{dt}x_1(t) = \frac{d}{dt}u(t) = \delta(t)$

(εξ' ορισμού)

(δ) $x(t) = \cos(2\pi t)\left[u(t) - u(t-1)\right]$

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}\cos(2\pi t)u(t) - \frac{d}{dt}\cos(2\pi t)u(t-1)$$

$$= -\sin(2\pi t)\cdot 2\pi \cdot u(t) + \cos(2\pi t)\cdot\delta(t) - \left(-\sin(2\pi t)2\pi u(t-1) + \cos(2\pi t)\delta(t-1)\right)$$

$$= -2\pi\sin(2\pi t)u(t) + \cos(2\pi t)\delta(t) + 2\pi\sin(2\pi t)u(t-1) - \cos(2\pi t)\delta(t-1)$$

$$= -2\pi\sin(2\pi t)\left(u(t) - u(t-1)\right) + \delta(t) - \delta(t-1)$$

④ (α) $y(t)=|x(t)|$ (β) $y(t)=e^{x(t)}$ (γ) $y(t)=t\sin(|x(t+1)|)$

	(α)	(β)	(γ)
Γραμμικότητα	✗	✗	✗
Χ.Α.	✓	✓	✗
Ευστάθεια	✓	✓	✗
Αιτιατότητα	✓	✓	✗
Δυναμικότητα	✗	✗	✓

Γραμμικό → ομογένεια + προσθετικότητα

• Ομογένεια:

Αν $x(t) \to y(t)$ τότε $ax(t) \to ay(t)$

• Προσθετικότητα:

Αν $x_1(t) \to y_1(t)$ και $x_2(t) \to y_2(t)$

τότε $x_1(t)+x_2(t) \to y_1(t)+y_2(t)$

Αν μία από τις 2 ιδιότητες δεν ισχύει, τότε το σύστημα είναι μη γραμμικό.

(α) Για είσοδο $ax_1(t)$: $y_1(t)=|ax_1(t)|=|a||x_1(t)| \neq ay(t) = a|x(t)|$

(β) Για είσοδο $ax_1(t)$: $y_1(t)=e^{ax_1(t)} \neq ay(t) = ae^{x(t)}$

(γ) Για είσοδο $ax_1(t)$: $y_1(t)=t\sin(|ax(t+1)|) \neq ay(t) = at\sin(|x(t+1)|)$

Χρονικά αμετάβλητο

Αν $x(t) \to y(t)$ τότε $x(t-t_0) \to y(t-t_0)$.

Όσο καθυστερεί η είσοδος καθυστερεί και η έξοδος.

(α) $x_1(t)=x(t-t_0) \longrightarrow y_1(t)=|x(t-t_0)|$

Επίσης, αν καθυστερήσουμε την είσοδο κατά t_0:

$y(t-t_0)=|x(t-t_0)|=y_1(t)$

(β) $x_1(t)=x(t-t_0) \to y_1(t)=e^{x(t-t_0)}$

Ομοίως: $y(t-t_0)=e^{x(t-t_0)}=y_1(t)$

(γ) $x_1(t) = x(t-t_0) \longrightarrow y_1(t) = t\sin(|x(t+1-t_0)|)$

Ομοίως: $y(t-t_0) = (t-t_0)\sin(|x(t+1-t_0)|) \neq y_1(t)$

Ευσταθές

Αν $0 < |x(t)| < B_x$ τότε $0 < |y(t)| < B_y$, $B_x, B_y \in \mathbb{R}$

(α) Έστω $|x(t)| < B_x \in \mathbb{R}$, τότε προφανώς $|y(t)| = |x(t)| < B_x$

(β) Ομοίως αν $|x(t)| < B_x \in \mathbb{R}$ τότε $|y(t)| = e^{x(t)} < e^{B_x} \in \mathbb{R}$

(γ) Ομοίως αν $|x(t)| < B_x \in \mathbb{R}$ τότε $|y(t)| = |t\sin(|x(t+1)|)|$ μεταβλητή $\leq |t|$

διότι $|\sin(.)| \leq 1$.

δεν έχει άνω φράγμα ⇒ ασταθές

Αιτιατό

"Ο υπολογισμός της τρέχουσας τιμής εξόδου απαιτεί προηγούμενες τιμές της εισόδου (ή την τρέχουσα)"

δηλ. $x(t)$, $x(t-1)$, $x(t-2)$ κ.ο.κ.

(α), (β) → αιτιατά γιατί δεν απαιτούν μελλοντικές τιμές της εισόδου

(γ) → μη αιτιατό γιατί απαιτεί μελλοντικές τιμές εισόδου

π.χ. για το $y(1) = 1\cdot\sin(|x(2)|)$

θέλουμε το $x(2)$

Δυναμικό

Το σύστημα απαιτεί μνήμη για τη λειτουργία του (προηγούμενες ή επόμενες τιμές της εισόδου).

(α), (β) → στατικά

(γ) → δυναμικό: πρέπει να αποθηκεύει την t+1 κάθε φορά τιμή της εισόδου.