ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2022-23
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

1ο Φροντιστήριο

Άσκηση 1 - Μιγαδικές Εξισώσεις Ι

Να λυθούν οι εξισώσεις

(α΄) $\dfrac{4-jz}{j+3z}=\dfrac{1}{2}$

(β΄) $\dfrac{2z+16}{z+5}=3-j$

ως προς $z=x+jy$.

Απ.: (α) $\frac{22}{13}-\frac{19}{13}j$, (β) $-2+3j$

Λύση:

Θέτοντας $z=x+jy$, έχουμε

(α΄)

$$\frac{4-jz}{j+3z}=\frac{1}{2} \iff 4-jz=\frac{1}{2}(j+3z) \iff 4-j(x+jy)=\frac{1}{2}j+\frac{3}{2}(x+jy) \tag{1}$$

$$\iff 4-jx-j^2y=\frac{1}{2}j+\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}jy \iff (4+y)-jx=\frac{3}{2}x+j\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}y\right) \tag{2}$$

$$\iff \begin{cases} 4+y &= \frac{3}{2}x \\ -x &= \frac{1}{2}+\frac{3}{2}y \end{cases} \iff \begin{cases} 8+2y &= 3x \\ -2x &= 1+3y \end{cases} \tag{3}$$

Λύνοντας το σύστημα προκύπτει $(x,y)=(22/13,-19/13)$, άρα ο μιγαδικός είναι ο $z=\frac{22}{13}-j\frac{19}{13}$.

(β΄)

$$\frac{2z+16}{z+5}=3-j \iff 2z+16=(3-j)(z+5) \iff 2(x+jy)+16=(3-j)(x+jy+5) \tag{4}$$

$$\iff -x+j2y+1=j3y-jx+y-j5 \iff (1-x-y)+j(-y+x+5)=0 \tag{5}$$

$$\iff \begin{cases} 1-x-y &= 0 \\ x-y+5 &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= 1-y \\ y &= x+5 \end{cases} \tag{6}$$

και λύνοντας το σύστημα παίρνουμε $(x,y)=(-2,3)$ και άρα ο μιγαδικός είναι ο $z=-2+j3$.

Άσκηση 2 - Μιγαδικές Εξισώσεις ΙΙ

(α΄) Να βρεθεί ο μιγαδικός z αν

$$(1-2j)(z+z^*)-(3-j)(z-z^*)=4-\Im\{z\} \tag{7}$$

(β΄) Να βρεθούν οι τιμές των $x,y\in\Re$ αν

$$\left(\frac{1+j}{1-j}\right)^2=1+j-\frac{1}{x+jy} \tag{8}$$

Απ.: (α) $z=\frac{3}{2}-j$, (β) $(x,y)=\left(\frac{2}{5},-\frac{1}{5}\right)$

Λύση:

(α') Έστω $z = x + jy$, έχουμε

$$\begin{aligned}(1-2j)(z+z^*)-(3-j)(z-z^*) = 4-\Im\{z\} &\Longleftrightarrow (1-2j)2\Re\{z\}-(3-j)j2\Im\{z\} = 4-\Im\{z\} &(9)\\ &\Longleftrightarrow (1-2j)2x-(3-j)j2y = 4-y &(10)\\ &\Longleftrightarrow 2x-4jx-j6y+j^2 2y = 4-y &(11)\\ &\Longleftrightarrow (2x-y-4)+j(-4x-6y) = 0 &(12)\\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} 2x-y &= 4\\ 2x &= -3y\end{cases} &(13)\end{aligned}$$

Λύνοντας το σύστημα παίρνουμε $(x, y) = (3/2, -1)$, οπότε $z = \frac{3}{2} - j$.

(β') Είναι

$$\begin{aligned}\left(\frac{1+j}{1-j}\right)^2 = 1+j-\frac{1}{x+jy} &\Longleftrightarrow \left(\frac{(1+j)(1+j)}{|1-j|^2}\right)^2 = 1+j-\frac{1}{x+jy} &(14)\\ &\Longleftrightarrow \frac{-4}{4} = 1+j-\frac{1}{x+jy} \Longleftrightarrow 2+j = \frac{1}{x+jy} \Longleftrightarrow (x+jy)(2+j) = 1 &(15)\\ &\Longleftrightarrow 2x+jx+j2y+j^2y = 1 \Longleftrightarrow (2x-1-y)+j(x+2y) = 0 &(16)\\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} 2x-y &= 1\\ x+2y &= 0\end{cases} &(17)\end{aligned}$$

Λύνοντας το σύστημα παίρνουμε $(x, y) = (2/5, -1/5)$.

Άσκηση 3 - Γεωμετρικοί Τόποι I

Βρείτε και σχεδιάστε τους γεωμετρικούς τόπους του z αν

(α') $\Re\{z\} = -1$

(β') $\Re\{z\} = 1 - 2\Im\{z\}$

(γ') $\Re\{z\} = 4 + 2(\Im\{z\})^2$

(δ') $z^2 - (z^*)^2 = 2\Re\{z\}$

(ε') $|z - (2 - 3j)| = |z - 1 - j|$

Απ.: (α) $x = -1$, (β) $x = 1 - 2y$, (γ) $x = 4 + 2y^2$, (δ) $x = 0, y \in \Re$, (ε) $y = \frac{1}{4}x - \frac{11}{8}$

Λύση:

(α') $\Re\{z\} = -1 \Longleftrightarrow x = -1$
Είναι κατακόρυφη ευθεία που τέμνει κάθετα το σημείο $(-1, 0)$.

(β') $\Re\{z\} = 1 - 2\Im\{z\} \Longleftrightarrow x = 1 - 2y$
Είναι η ευθεία $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x$.

(γ') $\Re\{z\} = 4 + 2(\Im\{z\})^2 \Longleftrightarrow x = 4 + 2y^2$
Είναι η παραβολή $y^2 = \frac{1}{2}x - 2$.

(δ΄) $z^2 - (z^*)^2 = 2\Re\{z\} \iff (z - z^*)(z + z^*) = 2x \iff j2y2x = 2x \iff 2x - j4xy = 0$
Από την παραπάνω σχέση προκύπτει

$$2x = 0 \tag{18}$$
$$4xy = 0 \tag{19}$$

κι έτσι έχουμε $(x, y) = (0, y)$. Άρα είναι όλα τα σημεία του άξονα $y'y$.

(ε΄) Θα έχουμε

$$|z - (2 - 3j)| = |z - 1 - j| \tag{20}$$
$$|z - (2 - 3j)|^2 = |z - 1 - j|^2 \tag{21}$$
$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \tag{22}$$
$$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 \tag{23}$$
$$8y = 2x - 11 \tag{24}$$

Είναι η ευθεία $y = \frac{1}{4}x - \frac{11}{8}$.

Άσκηση 4 - Γεωμετρικοί Τόποι ΙΙ
Βρείτε και σχεδιάστε τους γεωμετρικούς τόπους του z αν

(α΄) $z = \dfrac{2k - 3j}{12 + j8k}$, $k \in \Re$

(β΄) $2z = w + \dfrac{1}{w}$, με το γεωμετρικό τόπο του w να είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 4.

Απ.: (α) $z = -j\frac{1}{4}$, (β) έλλειψη: $\dfrac{x^2}{\left(\frac{17}{8}\right)^2} + \dfrac{y^2}{\left(\frac{15}{8}\right)^2} = 1$

Λύση:

(α΄) $z = \dfrac{2k - 3j}{12 + j8k} = \dfrac{(2k - 3j)(12 - j8k)}{|12 + 8jk|^2} = \dfrac{24k - j16k^2 - 36j - 24k}{144 + 64k^2} = \dfrac{-j(16k^2 + 36)}{64k^2 + 144} = -j\dfrac{1}{4}$, $k \in \Re$

(β΄) Αφού ο γεωμετρικός τόπος του w είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 4, τότε $|w| = 4$, δηλ. $w = 4e^{j\theta}$.

$$2z = w + \frac{1}{w} \iff z = 2e^{j\theta} + \frac{1}{8}e^{-j\theta} \iff z = 2\cos(\theta) + \frac{1}{8}\cos(\theta) + j(2\sin(\theta) - \frac{1}{8}\sin(\theta)) \tag{25}$$
$$\iff x + jy = 2\cos(\theta) + \frac{1}{8}\cos(\theta) + j(2\sin(\theta) - \frac{1}{8}\sin(\theta)) \tag{26}$$
$$\iff \left\{ \begin{array}{ll} x & = \frac{17}{8}\cos(\theta) \\ y & = \frac{15}{8}\sin(\theta) \end{array} \right. \tag{27}$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο και προσθέτοντας, έχουμε

$$\frac{x^2}{\left(\frac{17}{8}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{15}{8}\right)^2} = 1 \tag{28}$$

που αποτελεί μια έλλειψη.

Άσκηση 5 - Ρίζες πολυωνύμων
Να βρεθούν οι τιμές των $\kappa, \lambda \in \Re$ για τις οποίες το πολυώνυμο

$$z^2 + \kappa z + \lambda = 0 \tag{29}$$

έχει ρίζα τον μιγαδικό $z_1 = \frac{1-2j}{1+j}$,

Απ.: $\kappa = 1, \lambda = \frac{5}{2}$

Λύση:
Το πολυώνυμο έχει δυο ρίζες και γνωρίζουμε ότι η μια είναι μιγαδική, δηλ.

$$z_1 = \frac{1-2j}{1+j} = -\frac{1}{2} - j\frac{3}{2} \tag{30}$$

Αφου οι συντελεστές του πολυωνύμου είναι πραγματικοί, τότε η δεύτερη ρίζα θα είναι η συζυγής της πρώτης, δηλ.

$$z_2 = z_1^* = \frac{1+2j}{1-j} = -\frac{1}{2} + j\frac{3}{2} \tag{31}$$

Γνωρίζουμε από τις σχέσεις του Vieta ότι

$$z_1 + z_2 = -\kappa \tag{32}$$

$$z_1 z_2 = \lambda \tag{33}$$

δηλ.

$$z_1 + z_1^* = -\kappa \iff 2\Re\{z_1\} = -\kappa \iff 2\Big(-\frac{1}{2}\Big) = -\kappa \iff \kappa = 1 \tag{34}$$

$$z_1 z_2 = \lambda \iff z_1 z_1^* = \lambda \iff |z_1|^2 = \lambda \iff \lambda = \frac{5}{2} \tag{35}$$

Άσκηση 6 - Επίλυση εξισώσεων
Να λυθούν οι εξισώσεις

(α') $z^3 = 27$

(β') $z - 2z^* = 1 - j$

(γ') $z^4 + 16 = 0$

Απ.: (α) $z = 3e^{j\frac{2k\pi}{3}}$, $k = 0, 1, 2$, (β) $z = -1 - j\frac{1}{3}$, (γ) $z = \pm\sqrt{2} \pm j\sqrt{2}$

Λύση:

(α') Είναι

$$z^3 = 27 \iff z^3 = 27e^{j2k\pi} \iff z = \sqrt[3]{27}e^{j\frac{2k\pi}{3}} \iff z = 3e^{j\frac{2k\pi}{3}},\ \ k = 0, 1, 2 \tag{36}$$

(β') Είναι

$$z - 2z^* = 1 - j \iff x + jy - 2x + 2jy = 1 - j \iff (-x-1) + j(3y+1) = 0 \iff \left\{ \begin{array}{ll} x & = -1 \\ 3y+1 & = 0 \end{array} \right. \tag{37}$$

και άρα $z = -1 - j\frac{1}{3}$.

(γ΄) Είναι

$$z^4+16=0 \Longleftrightarrow z^4=-16=-16e^{j2k\pi} \Longleftrightarrow z^4=16e^{j(2k\pi+\pi)} \Longleftrightarrow z=\sqrt[4]{16}e^{j\frac{2k\pi+\pi}{4}} \Longleftrightarrow z=2e^{j\frac{2k\pi+\pi}{4}} \tag{38}$$

που για $k=0,1,2,3$ δίνουν $z=\pm\sqrt{2}\pm j\sqrt{2}$.

Άσκηση 7 - Euler και De Moivre

Υπολογίστε τους μιγαδικούς

(α΄) $(1+j)^{12}$

(β΄) $(2+2j)^4$

(γ΄) $(1+j)^4-(1-j)^5$

(δ΄) $\dfrac{(-1+j)^{16}}{(1+j)^{10}}$

Απ.: (α) -64, (β) -64, (γ) $-4j$, (δ) $-8j$

<u>Λύση:</u>

(α΄) $(1+j)^{12}=(\sqrt{2}e^{j\pi/4})^{12}=\sqrt{2}^{12}e^{j3\pi}=64e^{j\pi}=-64$

(β΄) $(2+2j)^4=2^4(1+j)^4=16(\sqrt{2}e^{j\pi/4})^4=64e^{j\pi}=-64$

(γ΄) $(1+j)^4-(1-j)^5=(\sqrt{2}e^{j\pi/4})^4-(\sqrt{2}e^{-j\pi/4})^5=4e^{j\pi}-4\sqrt{2}e^{-j5\pi/4}=-4+4\sqrt{2}e^{-j\pi/4}=-4j$

(δ΄) $\dfrac{(-1+j)^{16}}{(1+j)^{10}}=\dfrac{(\sqrt{2}e^{j3\pi/4})^{16}}{(\sqrt{2}e^{j\pi/4})^{10}}=\sqrt{2}^{6}e^{j38\pi/4}=8e^{-j\pi/2}=-8j$