ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Φροντιστήριο Σειρές Fourier

1. Σειρές Fourier και Ιδιότητες

1.1) Ένα πραγματικό περιοδικό σήμα όταν αναπτυχθεί σε εκθετική σειρά Fourier έχει μη μηδενικούς συντελεστές για κ > 0 ως εξής:

$$X_1 = 5,\ X_2 = 4j,\ X_3 = 3e^{j\pi/8}$$

Α.) Πόση είναι η ισχύς του σήματος;

Β.) Τι ποσοστό της συνολικής ισχύος του σήματος οφείλεται στον πρώτο όρο της τριγωνομετρικής (ή μονόπλευρης) αναπαράστασής του σε σειρά Fourier (δηλαδή για κ = 1);

Γ.) Αν γνωρίζετε ότι για το σήμα (έστω x(t)) ισχύει $T_0 = 2$, να βρείτε το σήμα

<u>Λύση:</u>

Α.) Γνωρίζουμε ότι η ισχύς δίνεται ως $P_x = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2$ από Θ. Parseval. Αφού $x(t) \in \mathbb{R}$, τότε $|X_\kappa| = |X^*{}_{-\kappa}|$ από ιδιότητες άρα

$P_x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 = 2(|5|^2 + |4j|^2 + \left|3e^{j\frac{\pi}{8}}\right|^2) = 2\ (25 + 16 + 9) = 100$

Β.) Στον πρώτο όρο της τριγωνομετρικής σειράς αντιστοιχούν τα $X_1, X_{-1} = X^*{}_1$ τα οποία έχουν ισχύ 25 και 25 (συνολικά 50) άρα αντιστοιχούν στο 50% της συνολικής ισχύος

Γ.) Αφού $T_0 = 2$, $f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2}$ και

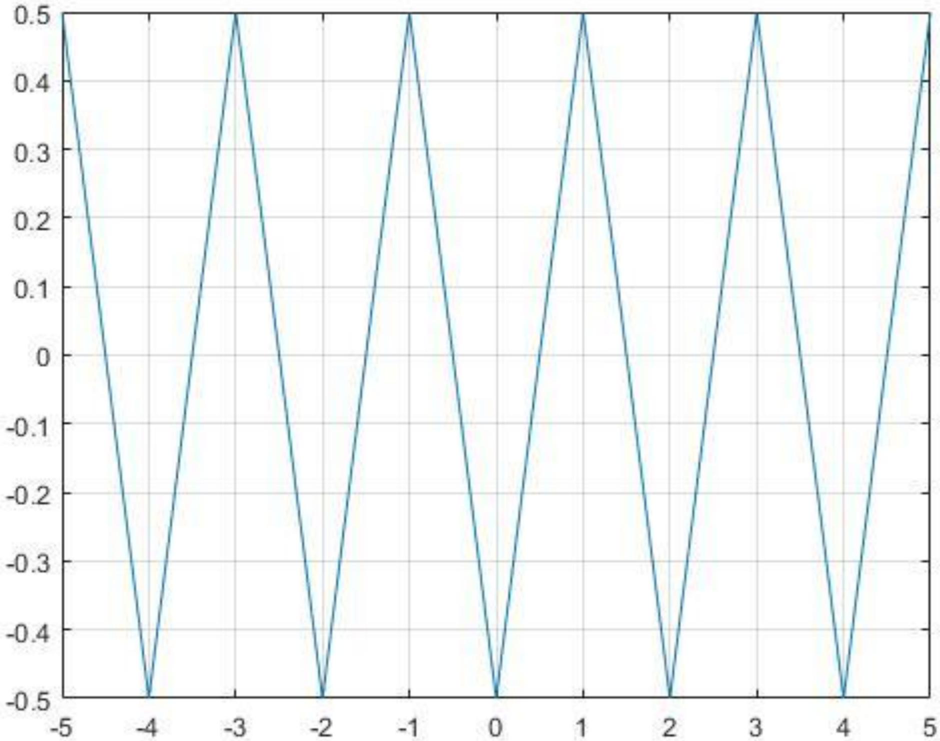
$$x(t) = \sum_{k=-3}^{3} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

$$= 5e^{j2\pi(-1)\frac{1}{2}t} - 4je^{j2\pi(-2)\frac{1}{2}t} + 3e^{-j\frac{\pi}{8}}e^{j2\pi(-3)\frac{1}{2}t} + 5e^{j2\pi\frac{1}{2}t} + 4je^{j2\pi 2\frac{1}{2}t} + 3e^{j\frac{\pi}{8}}e^{j2\pi 3\frac{1}{2}t}$$

$$= 5e^{-j\pi t} + 4e^{-j\frac{\pi}{2}}e^{-j2\pi t} + 3e^{-j\frac{\pi}{8}}e^{-j3\pi t} + 5e^{j\pi t} + 4e^{j\frac{\pi}{2}}e^{j2\pi t} + 3e^{j\frac{\pi}{8}}e^{j3\pi t} =$$

$$= 10\cos(\pi t) + 8\cos\left(3\pi t + \frac{\pi}{8}\right) - 6\,sin(2\pi t)$$

1.2) Έστω το εξής περιοδικό σήμα x(t):



Να υπολογίσετε τους συντελεστές $X_κ$ του σήματος, καθώς και τον συντελεστή X_0

<u>Λύση:</u>

Παρατηρούμε ότι το σήμα είναι ένας μετατοπισμένος τριγωνικός παλμός. Γνωρίζουμε ότι για το $Atri\left(\frac{t}{\frac{T_0}{2}}\right), -\frac{T_0}{2} < t < \frac{T_0}{2}$ οι συντελεστές Fourier $X_κ = \frac{2A}{\pi^2 k^2}, k\ περιττό$. Εδώ βλέπουμε ότι A = 1, T_0 = 1, και το σήμα είναι μετατοπισμένο κατά 1 δεξιά και $\frac{1}{2}$ κάτω. Επομένως, το $x(t) = tri\left(\frac{t-1}{2}\right) - \frac{1}{2}$. Μπορούμε να προσεγγίσουμε τη σειρά Fourier του $tri(\frac{t}{2})$, και μετατοπίζοντας μετά τα ημίτονα κατά $\frac{1}{2}$ προς τα κάτω. Για το χρονικά μετατοπισμένο tri έχουμε $X_κ = \frac{2}{\pi^2 k^2} e^{-j2\pi κ \frac{1}{2} 1} = \frac{2}{\pi^2 k^2} e^{-j\pi κ}$

Άρα $(t) = X_0' - \frac{1}{2} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$ όπου X_0' ο συντελεστής Fourier για k = 0 του μη κατακόρυφα μετατοπισμένου σήματος. Ο $X_0' = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)dt = \frac{1}{2}$ και $X_0 = X_0' - \frac{1}{2} = 0$

1.3) (HW2-2015-16 Άσκηση 7) Έστω ένα περιοδικό με περίοδο T_0 σήμα x(t) το οποίο έχει συντελεστές Fourier

$$X_k = -\frac{\pi^2}{2jk^2}$$

Χωρίς να υπολογίσετε το x(t), απαντήστε στα παρακάτω ερωτήματα:

a.) Το σήμα x(t) είναι πραγματικό ή μιγαδικό;

b.) Βρείτε τους συντελεστές Fourier Y_k του σήματος $y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$

c.) Βρείτε τους συντελεστές Fourier Z_k του σήματος $z(t) = x(t - \frac{T_0}{2})$

d.) Βρείτε τους συντελεστές Fourier W_k του σήματος $w(t) = \int_{-\infty}^{t} y(\tau)d\tau$

Λύση:

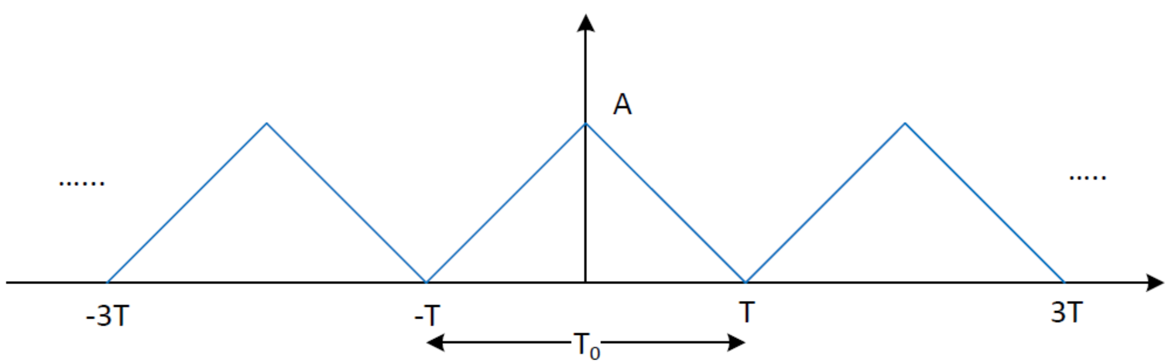
α΄) Είναι $X_k^* = \left(-\frac{\pi^2}{2jk^2}\right)^* = \frac{\pi^2}{2jk^2}$ και $X_{-k} = -\frac{\pi^2}{2j(-k)^2} = -\frac{\pi^2}{2jk^2}$, άρα το σήμα δεν είναι πραγματικό.

β΄) $Y_k = X_k j2\pi k f_0 = -\frac{\pi^2}{2jk^2} j2\pi k f_0 = -\frac{\pi^3}{kT_0}$

γ΄) $Z_k = X_k e^{-j2\pi k f_0 \frac{T_0}{2}} = -\frac{\pi^2}{2jk^2} e^{-j\pi k} = -\frac{\pi^2}{2jk^2}(-1)^k$

δ΄) $W_k = \frac{Y_k}{j2\pi k f_0} = -\frac{\pi^3}{kT_0} \cdot \frac{1}{j2\pi k f_0} = -\frac{\pi^2}{j2k^2}$

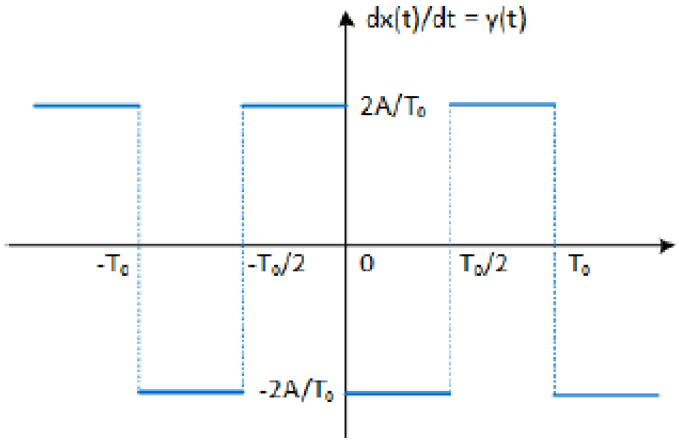
1.4) (HW2-2015-16 Άσκηση 11) Έστω το σήμα του παρακάτω σχήματος:



Βρείτε τους συντελεστές της εκθετικής σειράς Fourier.

Λύση:

Αν παραγωγίσουμε το σήμα μας, θα έχουμε:



Αυτό είναι γνωστό σήμα από τις διαλέξεις μόνο που είναι μετατοπισμένο κατά $\frac{T_0}{2}$ δεξιά. Έστω $\hat{\mathrm{X}}_k$ οι συντελεστές του σήματος των διαλέξεων.

Άρα (από διαλ.8) έχουμε ότι οι συντελεστές Fourier της παραγώγου είναι:

$$\begin{aligned}
Y_k &= \overbrace{\frac{2A}{j\pi k T_0}\left(1-(-1)^k\right)}^{\hat{\mathrm{X}}_k} e^{-j2\pi k f_0 \frac{T_0}{2}} \\
&= \frac{2A}{j\pi k T_0}\left(1-(-1)^k\right)e^{-j\pi k} \\
&= \frac{2A}{j\pi k T_0}\left(1-(-1)^k\right)(-1)^k \\
&= \frac{2A}{j\pi k T_0}\left((-1)^k-1\right)
\end{aligned}$$

Άρα οι συντελεστές του αρχικού σήματος θα είναι:

$$X_k = \frac{1}{j2\pi k f_0}\cdot\frac{2A}{j\pi k T_0}\left((-1)^k-1\right) = \frac{A}{\pi^2 k^2}\left(1-(-1)^k\right),$$

και

$$X_0 = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)dt = \frac{1}{T_0}(\text{Εμβ. Τριγ.}) = \frac{1}{T_0}\cdot\frac{T_0\cdot A}{2} = \frac{A}{2}$$

Εναλλακτικά, μπορείτε να θεωρήσετε το παραπάνω $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ ως ανάκλαση του παραδείγματος των διαλέξεων, και άρα οι συντελεστές Fourier του θα είναι:

$$Y_k = \hat{\mathrm{X}}_{-k} = \frac{2A}{j\pi(-k)T_0}\left(1-(-1)^{-k}\right) = -\frac{2A}{j\pi k T_0}\left(1-(-1)^{-k}\right)$$

και οι συντελεστές του ζητούμενου σήματος θα είναι:

$$\begin{aligned}
X_k &= \frac{1}{j2\pi k f_0}\cdot\frac{2A}{j\pi k T_0}\left((-1)^{-k}-1\right) \\
&= \frac{A}{\pi^2 k^2}\left(1-(-1)^{-k}\right)
\end{aligned}$$

που δίνεται ως απάντηση στην εκφώνηση. Ξανά με $X_0 = \frac{A}{2}$ όπως παραπάνω.

1.5) (HW3-2017-18 Άσκηση 4) Έστω ότι για ένα περιοδικό σήμα x(t) μας δίνονται οι παρακάτω πληροφορίες:

- Είναι πραγματικό και περιττό
- Έχει περίοδο $T_0 = 2$ και συντελεστές Fourier X_k
- Ισχύει $X_k = 0$ για $|k| > 1$
- Ισχύει $\frac{1}{2}\int_0^2 |x(t)|^2 dt = 1$

Βρείτε δύο σήματα που ικανοποιούν τις παραπάνω προδιαγραφές.

Λύση:

Αφού το σήμα είναι πραγματικό και έχει συντελεστές X_k μόνο για $|k| \leq 1$, θα είναι της μορφής

$$x(t) = X_1^* e^{-j2\pi\frac{1}{2}t} + X_0 + X_1 e^{j2\pi\frac{1}{2}t} \tag{29}$$

Επιπλέον, αφού είναι περιττό, τότε οι συντελεστές X_k θα είναι καθαρά φανταστικοί αριθμοί και περιττοί, δηλ.

$$X_k = -X_{-k} \tag{30}$$

όπως επίσης και $X_0 = 0$. Από τη σχέση του ολοκληρώματος - που αποτελεί το θεώρημα του Parseval - θα έχουμε

$$\frac{1}{2}\int_0^2 |x(t)|^2 dt = 1 \iff \sum_{k=-1}^{1} |X_k|^2 = 1 \iff 2|X_1|^2 + |X_0|^2 = 1 \tag{31}$$

$$\iff 2|X_1|^2 = 1 \tag{32}$$

$$\iff |X_1| = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{33}$$

$$\iff X_1 = \pm j\frac{1}{\sqrt{2}} \tag{34}$$

$$\tag{35}$$

Έτσι, αν $X_1 = j\frac{1}{\sqrt{2}}$, τότε $-X_{-1} = X_1 = j\frac{1}{\sqrt{2}}$, και αν $X_1 = -j\frac{1}{\sqrt{2}}$, τότε $-X_{-1} = X_1 = -j\frac{1}{\sqrt{2}}$. Τα δυο σήματα που ικανοποιούν τα παραπάνω είναι τα

$$x_1(t) = \frac{1}{j\sqrt{2}}e^{j\pi t} - \frac{1}{j\sqrt{2}}e^{-j\pi t} = \sqrt{2}\sin(\pi t) \tag{36}$$

$$x_2(t) = -\frac{1}{j\sqrt{2}}e^{j\pi t} + \frac{1}{j\sqrt{2}}e^{-j\pi t} = -\sqrt{2}\sin(\pi t) \tag{37}$$

1.6) (HW3-2018-19) Έστω x(t) ένα περιοδικό σήμα με θεμελιώδη συχνότητα f_0 και συντελεστές Fourier X_k. Πως σχετίζεται η θεμελιώσης συχνότητα $\widehat{f_0}$ του σήματος

$$y(t) = x(1-t) + x(t-1)$$

με τη συχνότητα f_0 του x(t); Βρείτε επίσης μια σχέση μεταξύ των συντελεστών Fourier X_k του σήματος x(t) και των Y_k του y(t).

<u>Λύση:</u>

Το σήμα $y(t)$ είναι απλά το άθροισμα δυο σημάτων: το ένα έχει μετατοπιστεί κατά $t_0 = 1$ δεξιά, άρα διατηρεί την ίδια περίοδο και άρα την ίδια θεμελιώδη συχνότητα, ενω το άλλο έχει μετατοπιστεί κατά την ίδια ποσότητα $t_0 = 1$ αριστερά και αντιστραφεί χρονικά, άρα κι αυτό διατηρεί την ίδια περίοδο και την ίδια θεμελιώδη συχνότητα. Το άθροισμα των δυο σημάτων θα είναι κι αυτό περιοδικό με την ίδια θεμελιώδη συχνότητα, f_0.

Το άθροισμα

$$y(t) = x(1-t) + x(t-1) \tag{20}$$

έχει συντελεστές Fourier

$$Y_k = X_{-k}e^{j2\pi(-k)f_0t} + X_ke^{-j2\pi kf_0t} = e^{-j2\pi kf_0t}(X_k + X_{-k}) \tag{21}$$