HY-215

Φροντιστήριο 4

→ Σειρές Fourier και Ιδιότητες

Πίνακας Ιδιοτήτων των σειρών Fourier

Ιδιότητα	Περιοδικό σήμα	Συντελεστές Fourier
	x(t) περιοδικό με περίοδο T_0 **y(t) περιοδικό με περίοδο T_0**	$\mathbf{X_k}$ $\mathbf{Y_k}$
Γραμμικότητα	$Ax(t) + By(t)$	$AX_k + BY_k$
Χρονική μετατόπιση	$x(t - t_0)$	$X_k e^{-j2\pi k f_0 t_0}$
Μετατόπιση στη συχνότητα	$e^{j2\pi M f_0 t} x(t)$	X_{k-M}
Αντιστροφή στο χρόνο	$x(-t)$	X_{-k}
Συζυγές σήμα στο χρόνο	$x^*(t)$	X^*_{-k}
Στάθμιση στο χρόνο	$x(at),\ a > 0$	X_k, με περίοδο T_0/a
Περιοδική συνέλιξη	$\int_{T_0} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$	$T_0 X_k Y_k$
Πολλαπλασιασμός στο χρόνο	$x(t)y(t)$	$\sum_{l=-\infty}^{\infty} X_l Y_{k-l}$
Παραγώγιση στο χρόνο	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j2\pi k f_0 X_k$
Ολοκλήρωση στο χρόνο	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$	$\frac{X_k}{j2\pi k f_0}$
Συζυγής συμμετρία	$x(t)$ πραγματικό	$\begin{cases} X_k = X^*_{-k}, \\ \Re\{X_k\} = \Re\{X_{-k}\}, \\ \Im\{X_k\} = -\Im\{X_{-k}\}, \\ \lvert X_k \rvert = \lvert X_{-k} \rvert, \\ \sphericalangle X_k = -\sphericalangle X_{-k} \end{cases}$
Άρτιο σήμα	$x(t) = x(-t)$, $x(t)$ πραγματικό	$X_k \in \Re$
Περιττό σήμα	$x(t) = -x(-t)$, $x(t)$ πραγματικό	$X_k \in \Im$
Άρτιο μέρος	$x_e(t) = \mathrm{Ev}\{x(t)\}$, $x(t)$ πραγματικό	$\Re\{X_k\}$
Περιττό μέρος	$x_o(t) = \mathrm{Od}\{x(t)\}$, $x(t)$ πραγματικό	$j\Im\{X_k\}$
Θεώρημα του Parseval	$\frac{1}{T_0}\int_{T_0} \lvert x(t) \rvert^2 dt$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \lvert X_k \rvert^2$

π.χ. έχω $y(t) = Ax_1(t) + Bx_2(t)$ με A, B σταθερές και ξέρω τους X_k^1 και X_k^2 αντίστοιχα (Συντελεστές fourier των $x_1(t)$, $x_2(t)$)

Προσοχή! Δεν αλλάζει το $|X_k|$ μόνο η $\sphericalangle(X_k)$

Πολλές φορές κάνει το σήμα να μην είναι πραγματικό...

Συχνά συνδιάζεται με χρονική μετατόπιση π.χ. [$x(-t \pm t_0)$. Θέτω $u = -t$ και κάνω τη Χ.Μ. και μετά αντιστρέφω το σήμα που προκύπτει]

Αλλάζει η περίοδος άρα αλλάζει η απόσταση των "κορυφών" στα φάσματα

$> T_0 \Rightarrow$ Μικρότερη Απόσταση

$< T_0 \Rightarrow$ Μεγαλύτερη Απόσταση

"Διπλασιάζει" τη γνώση μου. Αν ξέρω π.χ. X_1, X_2, X_3 ξέρω και X_{-1}, X_{-2}, X_{-3}

Ψάχνω X_k ενός $x(t)$ ενώ ξέρω τα $\hat{X}_k$ του $\hat{x}(t) = \frac{d}{dt}x(t)$ ή $\hat{x}(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$

Πολ/μός στο χρόνο = Συνέλιξη στη Συχνότητα

Συνέλιξη στο χρόνο = Πολ/μός στη Συχνότητα

Σ αντί $\int$ γιατί τα φάσματα είναι σήματα διακριτού χρόνου

Συνήθεις Σειρές Fourier

Περιοδικό σήμα	Συντελεστές Fourier
$x(t) = \begin{cases} A, & 0 < t < \frac{T_0}{2} \\ -A, & \frac{T_0}{2} < t < T_0 \end{cases}$	$X_k = \frac{2A}{\pi k} e^{-j\pi/2},\ k$ περιττά
$x(t) = \begin{cases} A, & 0 < t < \frac{T_0}{2} \\ 0, & \frac{T_0}{2} < t < T_0 \end{cases}$	$X_k = \frac{A}{\pi k} e^{-j\pi/2},\ k$ περιττά
$x(t) = \frac{2A}{T_0}t,\ -\frac{T_0}{2} < t < \frac{T_0}{2}$	$X_k = \frac{A}{\pi k}(-1)^k e^{j\pi/2}$
$x(t) = A\mathrm{tri}\left(\frac{t}{\frac{T_0}{2}}\right),\ -\frac{T_0}{2} < t < \frac{T_0}{2}$	$X_k = \frac{2A}{\pi^2 k^2},\ k$ περιττά
$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0)$	$X_k = \frac{1}{T_0}$

1. Σειρές Fourier και Ιδιότητες

1.1) Ένα πραγματικό περιοδικό σήμα όταν αναπτυχθεί σε εκθετική σειρά Fourier έχει μη μηδενικούς συντελεστές για κ > 0 ως εξής:

$$X_1 = 5,\ X_2 = 4j,\ X_3 = 3e^{j\pi/8}$$

A.) Πόση είναι η ισχύς του σήματος;

B.) Τι ποσοστό της συνολικής ισχύος του σήματος οφείλεται στον πρώτο όρο της τριγωνομετρικής (ή μονόπλευρης) αναπαράστασής του σε σειρά Fourier (δηλαδή για κ = 1);

Γ.) Αν γνωρίζετε ότι για το σήμα (έστω x(t)) ισχύει $T_0 = 2$, να βρείτε το σήμα

A.] $$P_x = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} |x(t)|^2 dt \overset{\text{Θ. Pars.}}{=\!=} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 =$$

$$= 2\left(|X_1|^2 + |X_2|^2 + |X_3|^2\right) = 2\left(|5|^2 + |4j|^2 + |3e^{j\pi/8}|^2\right)$$

$$= 2(25 + 16 + 9) = 100$$

B.] Για τον πρώτο όρο έχω $2\cdot|X_1|^2 = 50$

Άρα, αφού η συνολική ισχύς είναι $P_x = 100$, τότε τον όρο $k=1$ αντιστοιχεί το 50%

Γ.] $$x(t) = \cancel{X_0} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} = \sum_{k=-3}^{3} X_k e^{j2\pi k \cancel{f_0} t}$$ $^{1/2}$

$$= \sum_{k=-3}^{3} X_k e^{j\pi k t} = 3e^{-j\pi/8} e^{-3j\pi t} - 4j e^{-2j\pi t} + 5e^{-j\pi t} +$$

$-j = e^{j\pi/2}$

$$+ 5e^{j\pi t} + 4j e^{2j\pi t} + 3e^{j\pi/8} e^{3j\pi t} =$$

$j = e^{j\pi/2}$

$$= 5\left(e^{j\pi t} + e^{-j\pi t}\right) + 3\left(e^{-3j\pi t} e^{-j\frac{\pi}{8}} + e^{3j\pi t} e^{j\frac{\pi}{8}}\right) +$$

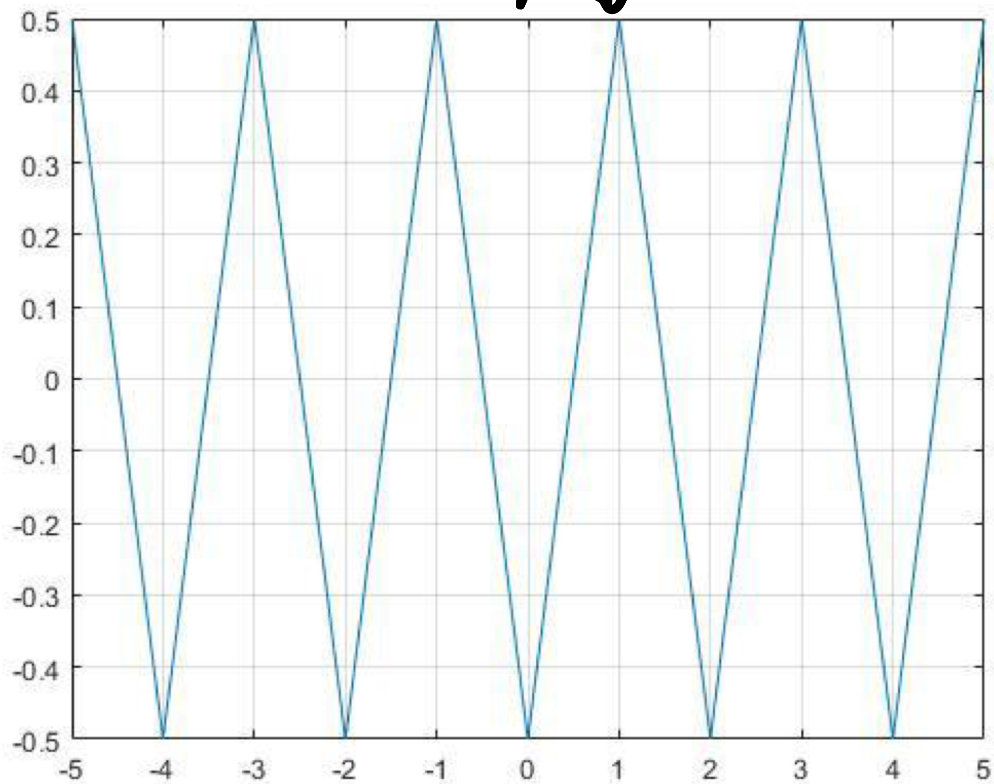
$$+ 4\left(e^{-2\pi j t} e^{-j\frac{\pi}{2}} + e^{2j\pi t} e^{j\frac{\pi}{2}}\right) =$$

$$= 10\cos(\pi t) + 6\cos\left(3\pi t - \frac{\pi}{8}\right) + 8\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 10\cos(\pi t) + 6\cos\left(3\pi t - \frac{\pi}{8}\right) - 8\sin(2\pi t)$$

1.2) Έστω το εξής περιοδικό σήμα x(t):

1sec delay



$T_{0\pi} = 2$ $T_0 = 1$

Να υπολογίσετε τους συντελεστές X_κ του σήματος, καθώς και τον συντελεστή X_0

Γνωρίζω X_k για το

$$\hat{x}(t) = A\,\mathrm{tri}\left(\frac{t}{\frac{T_0}{2}}\right), \quad -\frac{T_0}{2} < t < \frac{T_0}{2}$$

Το x(t), είναι μετατοπισμένο χρονικά κατά 1sec, και κατακόρυφα κατά $-\frac{1}{2}$

$$\underline{x(t)} = \underline{tri(t-1) - \frac{1}{2}}$$

X_k?

$$X_k = \hat{X}_k \underbrace{e^{-j2\pi k f_0 t_0}}_{\text{(ιδιότητα μετατόπισης στο χρόνο)}}$$

$f_0 \to \frac{1}{2}$, $t_0 \to 1$

$$X_k = \hat{X}_k e^{-j2\pi \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot k} = \frac{2}{\pi^2 k^2} e^{-j\pi k}$$

$$x(t) = X_0' - \frac{1}{2} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

?

$$X_0' = \int_{T_0} \hat{x}(t)\, dt = 1$$

$$x(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

1.3) (HW2-2015-16 Άσκηση 7) Έστω ένα περιοδικό με περίοδο T_0 σήμα x(t) το οποίο έχει συντελεστές Fourier

$$X_k = -\frac{\pi^2}{2jk^2}$$

Χωρίς να υπολογίσετε το x(t), απαντήστε στα παρακάτω ερωτήματα:

a.) Το σήμα x(t) είναι πραγματικό ή μιγαδικό;

b.) Βρείτε τους συντελεστές Fourier Y_k του σήματος $y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$

c.) Βρείτε τους συντελεστές Fourier Z_k του σήματος $z(t) = x(t - \frac{T_0}{2})$

d.) Βρείτε τους συντελεστές Fourier W_k του σήματος $w(t) = \int_{-\infty}^{t} y(\tau)d\tau$

a.) $X_k^* = -\left(-\frac{\pi^2}{2jk^2}\right) = \frac{\pi^2}{2jk^2}$

$X_{-k} = -\frac{\pi^2}{2j(-k)^2} = \frac{-\pi^2}{2jk^2}$

$\neq$ Άρα το $x(t) \notin \mathbb{R}$

b.) $Y_k = j2\pi k f_0 \cdot X_k = j2\pi k f_0 \cdot \left(\frac{-\pi^2}{\cancel{2}\cancel{j}k^{\cancel{2}}}\right) =$

(Ιδιότητα παρ/σης)

$= \frac{-\pi^3}{k \cdot T_0}$

c.) $Z_k = X_k e^{-j2\pi k f_0 t_0} = \frac{-\pi^2}{2jk^2} \cdot e^{-j\cancel{2}\pi k \frac{1}{\cancel{T_0}} \frac{\cancel{T_0}}{\cancel{2}}}$

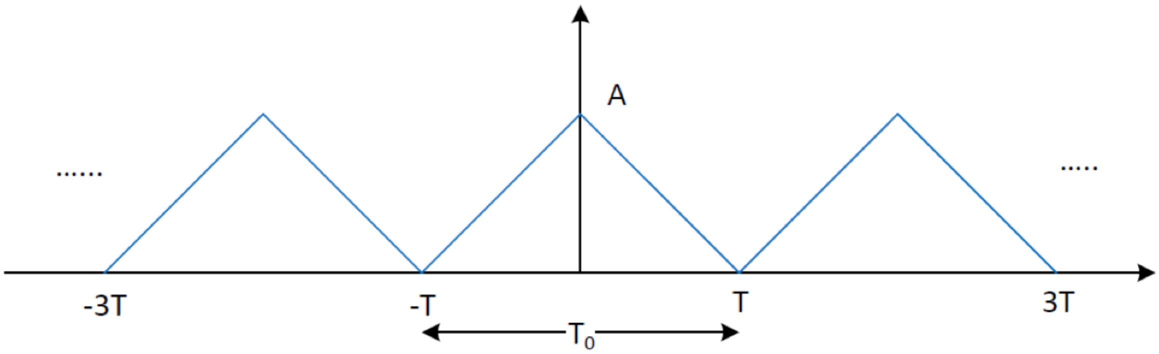
(Ιδιότητα χρ. μετ.)

$= \frac{-\pi^2}{2jk^2} \cdot e^{-j\pi k}$

d.) $W_k = \frac{X_k}{j2\pi k f_0} = \frac{\frac{-\pi^2}{2jk^2}}{j2\pi k \cdot \frac{1}{T_0}} = \frac{\pi^{\cancel{2}} T_0}{j4\cancel{\pi}k^3} = \frac{\pi T_0}{4k^3}$

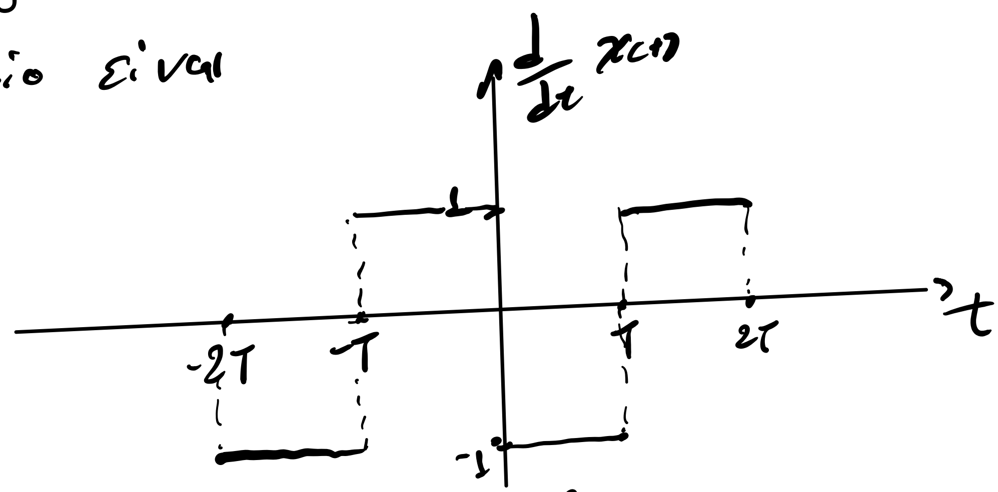
(Ιδιότητα ολοκλ.)

1.4) (HW2-2015-16 Άσκηση 11) Έστω το σήμα του παρακάτω σχήματος:



Βρείτε τους συντελεστές της εκθετικής σειράς Fourier.

Γνωρίζουμε τους συντελεστές X_k' του $\frac{d}{dt}x(t)$ το οποίο είναι



$$\underbrace{X_k}_{\text{(ιδιότητα ολοκλ.)}} = \frac{X_k'}{j2\pi k f_0} e^{-j2\pi k f_0 t_0} \quad \text{(ιδιότητα χρ. μετ.)}$$

1.5) (HW3-2017-18 Άσκηση 4) Έστω ότι για ένα περιοδικό σήμα x(t) μας δίνονται οι παρακάτω πληροφορίες:

- Είναι πραγματικό και περιττό
- Έχει περίοδο $T_0 = 2$ και συντελεστές Fourier X_k
- Ισχύει $X_k = 0$ για $|k| > 1$
- Ισχύει $\frac{1}{2}\int_0^2 |x(t)|^2 dt = 1$

Βρείτε δύο σήματα που ικανοποιούν τις παραπάνω προδιαγραφές.

$$x(t) = X_1^* e^{-j2\pi\frac{1}{2}t} + X_0 + X_1 e^{j2\pi\frac{1}{2}t}$$

$(k=-1, T_0=2)$ $(k=1, T_0=2)$

$(X_k = -X_{-k})$ επειδή $x(t)$ περιττό

και $X_0 = 0$

$$\sum_{k=-1}^{1} |X_k|^2 = 2|X_1|^2 = 1 \Rightarrow |X_1| = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ή } |X_1| = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

(Θ. Parseval $\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2$)

$$\Rightarrow \underbrace{X_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} j}_{(1)} \text{ ή } \underbrace{X_1 = \frac{-1}{\sqrt{2}} j}_{(2)}$$

$$x_1(t) = \frac{1}{j\sqrt{2}} e^{j\pi t} - \frac{1}{j\sqrt{2}} e^{-j\pi t}$$

$$x_2(t) = \frac{-1}{j\sqrt{2}} e^{j\pi t} + \frac{1}{j\sqrt{2}} e^{-j\pi t}$$

1.6) (HW3-2018-19) Έστω x(t) ένα περιοδικό σήμα με θεμελιώδη συχνότητα f_0 και συντελεστές Fourier X_k. Πως σχετίζεται η θεμελιώσης συχνότητα $\widehat{f_0}$ του σήματος

$$y(t) = x(1-t) + x(t-1)$$

με τη συχνότητα f_0 του x(t); Βρείτε επίσης μια σχέση μεταξύ των συντελεστών Fourier X_k του σήματος x(t) και των Y_k του y(t).

<u>Λύση:</u>

Το σήμα $y(t)$ είναι απλά το άθροισμα δυο σημάτων: το ένα έχει μετατοπιστεί κατά $t_0 = 1$ δεξιά, άρα διατηρεί την ίδια περίοδο και άρα την ίδια θεμελιώδη συχνότητα, ενω το άλλο έχει μετατοπιστεί κατά την ίδια ποσότητα $t_0 = 1$ αριστερά και αντιστραφεί χρονικά, άρα κι αυτό διατηρεί την ίδια περίοδο και την ίδια θεμελιώδη συχνότητα. Το άθροισμα των δυο σημάτων θα είναι κι αυτό περιοδικό με την ίδια θεμελιώδη συχνότητα, f_0.

Το άθροισμα

$$y(t) = x(1-t) + x(t-1) \tag{20}$$

έχει συντελεστές Fourier

$$Y_k = X_{-k}e^{j2\pi(-k)f_0 t} + X_k e^{-j2\pi k f_0 t} = e^{-j2\pi k f_0 t}(X_k + X_{-k}) \tag{21}$$