ΗΥ-215

Φροντιστήριο 6

Πίνακας Ιδιοτήτων Δίπλευρου Μετασχηματισμού Laplace

Ιδιότητα	**Σήμα**	**Μετασχημ. Laplace**	**ROC**
	$\mathbf{x(t)}$	$\mathbf{X(s)}$	$\mathbf{R_x}$
	$\mathbf{y(t)}$	$\mathbf{Y(s)}$	$\mathbf{R_y}$
Γραμμικότητα	$Ax(t)+By(t)$	$AX(s)+BY(s)$	$R \supseteq R_x \cap R_y$
Χρονική μετατόπιση	$x(t-t_0)$	$X(s)e^{-st_0}$	R_x
Μετατόπιση στο χώρο του s	$e^{s_0 t}x(t)$	$X(s-s_0)$	Μετατόπιση του R_x
Συζυγές σήμα στο χρόνο	$x^*(t)$	$X^*(s^*)$	R_x
Αντιστροφή στο χρόνο	$x(-t)$	$X(-s)$,	$-R_x$
Στάθμιση στο χρόνο	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{s}{a}\right)$	Σταθμισμένο R_x
Συνέλιξη στο χρόνο	$x(t)*y(t)$	$X(s)Y(s)$	$R \supseteq R_x \cap R_y$
Παραγώγιση στο χρόνο	$\frac{dx(t)}{dt}$	$sX(s)$	$R \supseteq R_x$
n-οστή παραγώγιση στο χρόνο	$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$s^n X(s)$	$R \supseteq R_x$
Παραγώγιση στη συχνότητα	$-tx(t)$	$\frac{dX(s)}{ds}$	R_x
n-οστη παραγώγιση στη συχνότητα	$(-1)^n t^n x(t)$	$\frac{d^n X(s)}{ds^n}$	R_x
Ολοκλήρωση στο χρόνο	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$	$\frac{X(s)}{s}$	$R \supseteq \left(R_x \cap \{\mathrm{Re}\{s\}>0\}\right)$

Χρήσιμα Ζεύγη Μετασχηματισμού Laplace

Σήμα	**Μετασχηματισμός Laplace**	**ROC**
$\delta(t)$	1	Όλο το s-επίπεδο
$\delta(t-t_0)$	e^{-st_0}	Όλο το s-επίπεδο
$\cos(2\pi f_0 t)u(t)$	$\frac{s}{s^2+(2\pi f_0)^2}$	$\mathrm{Re}\{s\}>0$
$\sin(2\pi f_0 t)u(t)$	$\frac{2\pi f_0}{s^2+(2\pi f_0)^2}$	$\mathrm{Re}\{s\}>0$
$A\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$	$\frac{A}{s}(e^{sT/2}-e^{-sT/2})$	Όλο το s-επίπεδο
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\mathrm{Re}\{s\}>0$
$-u(-t)$	$\frac{1}{s}$	$\mathrm{Re}\{s\}<0$
$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$	$\mathrm{Re}\{s\}>0$
$-tu(-t)$	$\frac{1}{s^2}$	$\mathrm{Re}\{s\}<0$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\mathrm{Re}\{s\}>0$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(-t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\mathrm{Re}\{s\}<0$
$e^{-a\lvert t\rvert},\ a>0$	$\frac{2a}{a^2-s^2}$	$a>\mathrm{Re}\{s\}>-a$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\mathrm{Re}\{s\}>-\mathrm{Re}\{a\}$
$-e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\mathrm{Re}\{s\}<-\mathrm{Re}\{a\}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\mathrm{Re}\{s\}>-\mathrm{Re}\{a\}$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\mathrm{Re}\{s\}<-\mathrm{Re}\{a\}$
$e^{-at}\cos(2\pi f_0 t)u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+(2\pi f_0)^2}$	$\mathrm{Re}\{s\}>-\mathrm{Re}\{a\}$
$e^{-at}\sin(2\pi f_0 t)u(t)$	$\frac{2\pi f_0}{(s+a)^2+(2\pi f_0)^2}$	$\mathrm{Re}\{s\}>-\mathrm{Re}\{a\}$
$t\cos(2\pi f_0 t)u(t)$	$\frac{s^2-(2\pi f_0)^2}{(s^2+(2\pi f_0)^2)^2}$	$\mathrm{Re}\{s\}>0$
$t\sin(2\pi f_0 t)u(t)$	$\frac{2s2\pi f_0}{(s^2+(2\pi f_0)^2)^2}$	$\mathrm{Re}\{s\}>0$

Άσκηση 1 (HW7-2015-16 Άσκηση 6)

$$x(t) \longleftrightarrow \frac{2s}{s^2+2}, \quad x(t)=0,\ t<0, \quad \Re\{s\}>0$$

a) $x(3t) \longleftrightarrow \frac{1}{3}X\left(\frac{s}{3}\right) = \frac{1}{3}\frac{\frac{2}{3}s}{\left(\frac{s}{3}\right)^2+2} = \frac{2}{9}\frac{s}{\frac{s^2}{9}+2}$, $\Re\{s\}>0$

β.) $x(t-2) \longleftrightarrow X(s)e^{-2s} = \frac{2s}{s^2+2}e^{-2s}$, $\Re\{s\}>0$

γ.) $x(t) * \frac{d}{dt}x(t) \longleftrightarrow X(s)\cdot s\cdot X(s) = s\cdot X^2(s) = s\left(\frac{2s}{s^2+2}\right)^2$

$$= \frac{4s^3}{(s^2+2)^2}, \quad \Re\{s\}>0$$

δ.) $e^{-t}x(t) \longleftrightarrow X(s+1) = \frac{2(s+1)}{(s+1)^2+2}$, $\Re\{s\}>-1$

ε.) $2t\,x(t) \longleftrightarrow -2\frac{d}{ds}X(s) = -2\frac{d}{ds}\left(\frac{2s}{s^2+2}\right) =$

$$= -4\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+2}\right) = -4\frac{s^2+2-2s^2}{(s^2+2)^2} = -4\frac{-s^2+2}{(s^2+2)^2} =$$

$$= 4\frac{s^2-2}{(s^2+2)^2}, \quad \Re\{s\}>0$$

στ) $\int_0^t x(3u)\,du \longleftrightarrow \frac{1}{3}\cdot\frac{X\left(\frac{s}{3}\right)}{s} = \frac{1}{3\cancel{s}}\frac{\frac{2}{3}\cancel{s}}{\left(\frac{s}{3}\right)^2+2} =$

$$= \frac{2}{9} \frac{1}{\frac{s^2}{9}+2}, \quad \mathbb{R}\{s\} > 0$$

Άσκηση 2 (HWS-2017-18 Άσκηση 6)

$$y(t) = x_1(t-2) * x_2(3-t)$$

$x_1(t) = e^{-2t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+2}$

$x_2(t) = e^{-3t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+3}$

$Y(s)$?
(ROC?)

$$Y(s) = X_1(s) \cdot e^{-2s} \cdot X_2(-s)\, e^{-3s} = X_1(s)\, X_2(-s)\, e^{-5s}$$

$$= \frac{1}{s+2}\left(\frac{1}{-s+3}\right) e^{-5s} = \frac{1}{(s+2)(3-s)} e^{-5s}$$

$\boxed{>-2}$ $\boxed{<3}$

$$\text{ROC}: \{\mathbb{R}\{s\} > -2\} \cap \{\mathbb{R}\{s\} < 3\}$$
$$= \{-2 < \mathbb{R}\{s\} < 3\}$$

Άσκηση 3 (HWS-2017-18 Άσκηση 7)

Έστω ότι για το $x(t)$ ισχύουν:

(1). $x(t) \in \mathbb{R}$, $x(t)$ άρτιο $(x(t) = x(-t))$

(2). $X(s)$, 4 πόλους, κανένα μηδενικό

(3). $X(s)$, 1 πόλο στο $s = \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{4}}$

(4). $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,dt = 4$

$X(s)$?
ROC?

Γνωρίζω λόγω (1) $X(s) = X^*(s^*) = X(-s)$

$\xRightarrow{(2)|(3)}$ Υποχρεωτικά έχω πόλους στα: $s_1 = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}$

$s_2 = -\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$

$s_3 = -\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}$

$$X(s) = \frac{A}{\left(s-\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}\right)\left(s-\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}\right)\left(s+\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}\right)\left(s+\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}\right)}$$

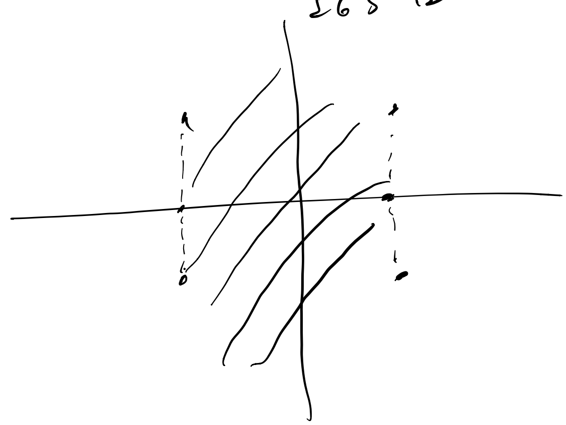
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}\,dt}_{X(s)}\Bigg|_{s=0} = X(0) \overset{(4)}{=} 4$$

Για $s=0$, $X(s) = \frac{A}{\left(-\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}\right)\left(-\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}\right)\left(\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}\right)\left(\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}\right)}$

$= 4 \Rightarrow \dots \Rightarrow A = \frac{1}{4} \xRightarrow{\text{πράξεις}} X(s) = \frac{4}{16s^4+1}$

Για το ROC:

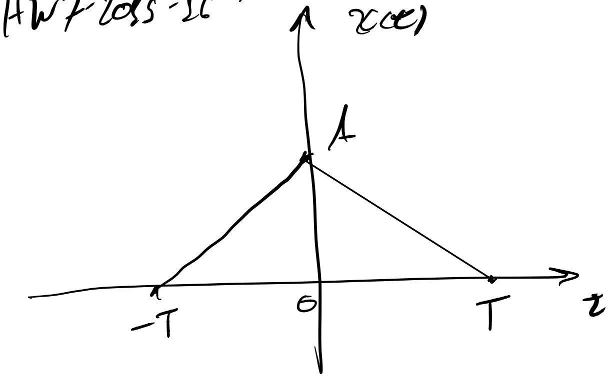
$-\frac{\sqrt{2}}{4} < \Re\{s\} < \frac{\sqrt{2}}{4}$

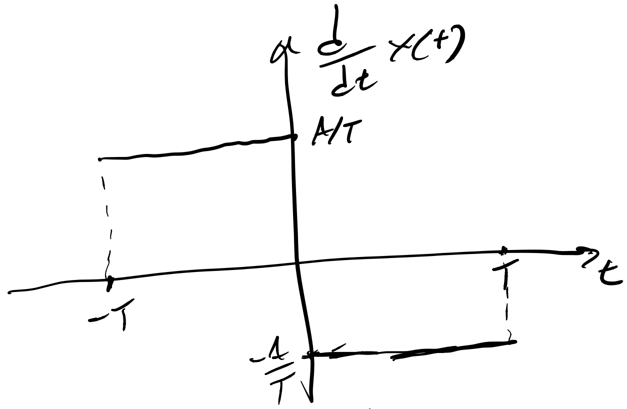


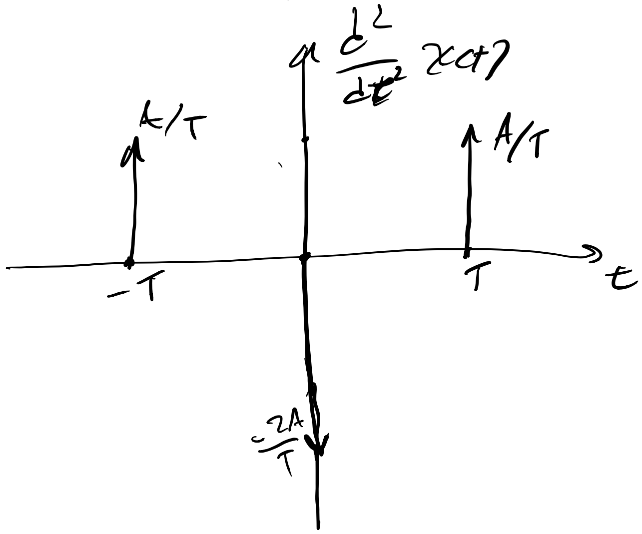
Άσκηση 4 (HW7 2015-16 Άσκηση 3β)

$X(s)$?

ROC?







$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) = \frac{A}{T}\delta(t+T) - \frac{2A}{T}\delta(t) + \frac{A}{T}\delta(t-T)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2}{dt^2}x(t)\right\} = \frac{A}{T}e^{sT} - \frac{2A}{T} + \frac{A}{T}e^{-sT} = s^2 X(s)$$

$$\Rightarrow X(s) = \frac{A}{T}\left(\frac{e^{sT}+e^{-sT}-2}{s^2}\right), \quad \mathbb{R}e\{s\} \in \mathbb{R}$$

γιατί $x(t)$ πεπ. διάρκειας