HY-215

Φροντιστήριο 5

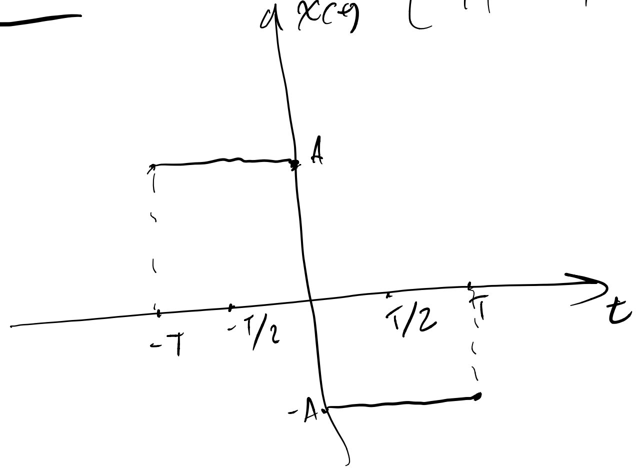
Πίνακας Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier

Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
	$x(t)$ $y(t)$	$X(f)$ $Y(f)$
Γραμμικότητα	$Ax(t)+By(t)$	$AX(f)+BY(f)$
Χρονική μετατόπιση	$x(t-t_0)$	$X(f)e^{-j2\pi f t_0}$
Μετατόπιση στη συχνότητα	$e^{j2\pi f_0 t}x(t)$	$X(f-f_0)$
Συζυγές σήμα στο χρόνο	$x^*(t)$	$X^*(-f)$
Αντιστροφή στο χρόνο	$x(-t)$	$X(-f)$
Στάθμιση	$x(at)$	$\frac{1}{\|a\|}X(\frac{f}{a})$
Συνέλιξη στο χρόνο	$x(t)*y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)y(t-\tau)d\tau$	$X(f)Y(f)$
Δυικότητα	$X(t)$	$x(-f)$
Πολλαπλασιασμός στο χρόνο	$x(t)y(t)$	$X(f)*Y(f)$
Παραγώγιση στη συχνότητα	$tx(t)$	$\frac{j}{2\pi}\frac{d}{df}X(f)$
Παραγώγιση στο χρόνο	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j2\pi f\boxed{X(f)}$
Ολοκλήρωση στο χρόνο	$\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$	$\frac{X(f)}{j2\pi f}+\frac{X(0)}{2}\delta(f)$
Συζυγής συμμετρία	$x(t)$ πραγματικό	$\begin{cases} X(f)=X^*(-f), \\ \Re\{X(f)\}=\Re\{X(-f)\}, \\ \Im\{X(f)\}=-\Im\{X(-f)\}, \\ \|X(f)\|=\|X(-f)\|, \\ \phi_x(f)=-\phi_x(-f) \end{cases}$
Άρτιο σήμα	$x(t)=x(-t)$, πραγματικό	$X(f)\in\Re$
Περιττό σήμα	$x(t)=-x(-t)$, πραγματικό	$X(f)\in\Im$
Άρτιο μέρος	$x_e(t)=\mathrm{Ev}\{x(t)\}$, πραγματικό	$\Re\{X(f)\}$
Περιττό μέρος	$x_o(t)=\mathrm{Od}\{x(t)\}$, πραγματικό	$j\Im\{X(f)\}$
Θεώρημα του Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty}\|x(t)\|^2dt$	$\int_{-\infty}^{\infty}\|X(f)\|^2df$

Συνήθη ζεύγη Μετασχηματισμού Fourier

Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
$\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_k e^{jk2\pi f_0 t}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_k\delta(f-kf_0)$
$e^{\pm j2\pi f_0 t}$	$\delta(f\mp f_0)$
$\delta(t\pm t_0)$	$e^{\pm j2\pi f t_0}$
$\cos(2\pi f_0 t+\phi)$	$\frac{1}{2}e^{j\phi}\delta(f-f_0)+\frac{1}{2}e^{-j\phi}\delta(f+f_0)$
$\sin(2\pi f_0 t+\phi)$	$\frac{1}{2}e^{-j\phi}e^{-j\pi/2}\delta(f-f_0)+\frac{1}{2}e^{j\phi}e^{j\pi/2}\delta(f+f_0)$
1	$\delta(f)$
$A\mathrm{rect}\Big(\frac{t}{T}\Big)$	$AT\mathrm{sinc}(fT)$
$A\mathrm{tri}\Big(\frac{t}{T}\Big)$	$AT\mathrm{sinc}^2(fT)$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)$	$\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\Big(f-k\frac{1}{T}\Big)$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{2}\delta(f)+\frac{1}{j2\pi f}$
$\mathrm{sgn}(t)$	$\frac{1}{j\pi f}$
$e^{-at}\sin(2\pi f_0 t)u(t),\ a>0$	$\frac{2\pi f_0}{(a+j2\pi f)^2+4\pi^2 f_0^2}$
$e^{-at}\cos(2\pi f_0 t)u(t),\ a>0$	$\frac{a+j2\pi f}{(a+j2\pi f)^2+4\pi^2 f_0^2}$
$e^{-a\|t\|},\ \Re\{a\}>0$	$\frac{2a}{a^2+4\pi^2 f^2}$
$e^{-at}u(t),\ \Re\{a\}>0$	$\frac{1}{a+j2\pi f}$
$e^{at}u(-t),\ \Re\{a\}>0$	$\frac{1}{a-j2\pi f}$
$te^{-at}u(t),\ \Re\{a\}>0$	$\frac{1}{(a+j2\pi f)^2}$
$-te^{at}u(-t),\ \Re\{a\}>0$	$\frac{1}{(a-j2\pi f)^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t),\ \Re\{a\}>0$	$\frac{1}{(a+j2\pi f)^n}$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{at}u(-t),\ \Re\{a\}>0$	$\frac{1}{(a-j2\pi f)^n}$
$e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$	$\sigma\sqrt{2\pi}e^{-\frac{\sigma^2 f^2}{2}}$

Άσκηση 1 (HW4-2015-16 Άσκηση 3)



α) $\mathcal{F}\{x(t)\}$; Ορισμό (Υπόδειξη: $1-\cos(2\theta) = 2\sin^2(\theta)$)

Ορισμός
$\mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t}\, dt$

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-T}^{0} A e^{-j2\pi f t}\, dt + \int_{0}^{T} (-A) e^{-j2\pi f t}\, dt =$$

$$= A\left[\frac{1}{-j2\pi f} e^{-j2\pi f t}\right]_{-T}^{0} - A\left[\frac{1}{-j2\pi f} e^{-j2\pi f t}\right]_{0}^{T} =$$

$$= \frac{A}{j2\pi f}\left(e^{-j2\pi f T} - 1 - 1 + e^{j2\pi f T}\right) =$$

$$= \frac{A}{j2\pi f}\left(2\cos(2\pi f T) - 2\right) = \frac{A}{j2\pi f}\left(-4\sin^2(\pi f T)\right)$$

$$= \frac{-2A}{j\pi f}\sin^2(\pi f T) = \underline{\frac{2Aj}{\pi f}\sin^2(\pi f T)}$$

b.) $\mathcal{F}\{x(t)\}$? / Ιδιότητες

2 rect στις θέσεις $t = \pm \frac{T}{2}$, με πλάτος A και διάρκεια T

$\frac{\sin(\pi\theta)}{\pi\theta} = \mathrm{sinc}(\theta)$

* Γνωρίζουμε (γνωστό ζεύγος)

$$A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) = AT\,\mathrm{sinc}(fT)$$

* Ιδιότητα Μετατόπισης

$$AT\,\mathrm{sinc}(fT)\,e^{\pm j2\pi f t_0}$$

* Ιδιότητα Γραμμικότητας

$$\mathcal{F}\{x_1(t) + x_2(t)\} = \mathcal{F}\{x_1(t)\} + \mathcal{F}\{x_2(t)\}$$

Συνολικά

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = AT\,\mathrm{sinc}(fT)\,e^{j2\pi f\frac{T}{2}} - AT\,\mathrm{sinc}(fT)\,e^{-j2\pi f\frac{T}{2}}$$

$$= AT\,\mathrm{sinc}(fT)\left(e^{j\pi fT} - e^{-j\pi fT}\right) =$$

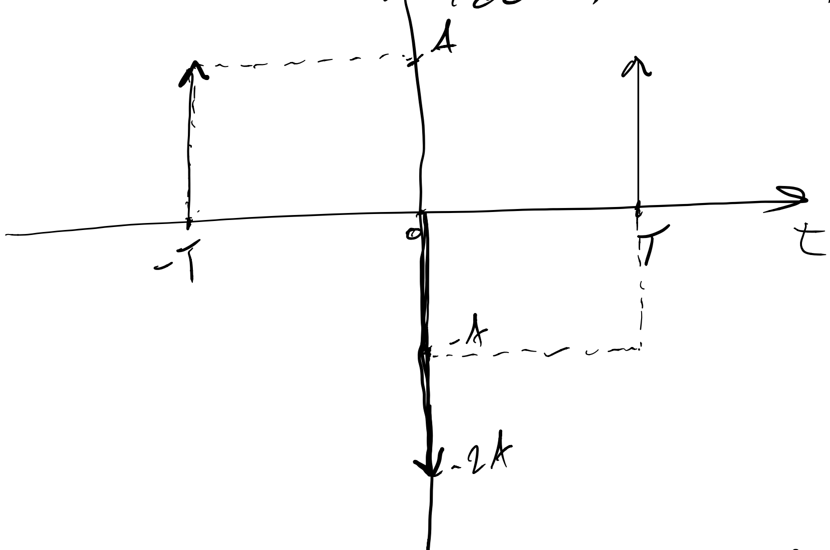
$$= AT\,\mathrm{sinc}(fT)\left(2j\sin(\pi fT)\right) =$$

$$= A\cancel{T}\,\frac{\sin(\pi fT)}{\pi f\cancel{T}} \cdot 2j\sin(\pi fT) =$$

$$= \frac{2Aj}{\pi f} \cdot \sin^2(\pi fT)$$

γ) $\mathcal{F}\{x(t)\}$? Ιδιότητα παρ/σης (+ μετατόπισης)

$$\frac{d}{dt}x(t) = A\delta(t+T) - 2A\delta(t) + A\delta(t-T)$$



* Γνωστό Ζεύγος

$$\delta(t) \leftrightarrow 1$$

* Ιδιότητα Μετατόπισης

$$\delta(t+T) \leftrightarrow 1 \cdot e^{j2\pi fT}$$

$$\delta(t-T) \leftrightarrow 1 \cdot e^{-j2\pi fT}$$

$$\mathcal{F}\left\{\frac{d}{dt}x(t)\right\} = A \cdot e^{j2\pi fT} - 2A + Ae^{-j2\pi fT} =$$

$$= 2A\cos(2\pi fT) - 2A = -4A\sin^2(\pi fT)$$

* Ιδιότητα Παρ/σης

$$-4A\sin^2(\pi fT) = j2\pi f \cdot X(f) \Rightarrow$$

$$X(f) = \frac{-4A\sin^2(\pi fT)}{j2\pi f} = \frac{2Aj}{\pi f} \cdot \sin^2(\pi fT)$$

$$= \mathcal{F}\{x(t)\}$$

Άσκηση 2 (HW4-2015-16 Άσκηση 4)

Ιδιότητα Δυϊκότητας

α) $\frac{1}{2}\delta(t) + \frac{j}{2\pi t} \longleftrightarrow u(f)$

Γνωρίζουμε $u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$

$u(-t) \longleftrightarrow \frac{1}{2}\delta(f) - \frac{1}{j2\pi f}$

Άρα: $\frac{1}{2}\delta(t) - \frac{1}{j2\pi t} \underset{\text{δυϊκότητα}}{\longleftrightarrow} u(f)$

β) $\delta(t+T) + \delta(t-T) \longleftrightarrow 2\cos(2\pi f T)$

Γνωρίζουμε $2\cos(2\pi f t) \longleftrightarrow \delta(f-T) + \delta(f+T)$

Από δυϊκότητα: $\delta(t-T) + \delta(t+T) \longleftrightarrow 2\cos(2\pi f T)$

γ) $\delta(t+T) - \delta(t-T) \longleftrightarrow 2j\sin(2\pi f T)$

Γνωρίζουμε $2j\sin(2\pi T t) \longleftrightarrow \delta(f+T) - \delta(f-T)$

Από δυϊκότητα: $\delta(t-T) - \delta(t+T) \longleftrightarrow 2j\sin(2\pi T(-f))$

$= -2j\sin(2\pi T f)$

$\Rightarrow \delta(t+T) - \delta(t-T) \longleftrightarrow 2j\sin(2\pi f T)$

Άσκηση 3 (HWs 2016-17 Άσκηση 2)

$\mathcal{F}\{x(t)\}$?

α.) $x(t) = \sin(2\pi t)e^{-t}u(t)$

Από γνωστό ζεύγη: $\mathcal{F}\{x(t)\} = \dfrac{2\pi}{(1+j2\pi f)^2 + 4\pi^2}$

β.) $x(t) = t e^{-3|t-1|}$

Από γνωστά ζεύγη: $e^{-3|t|} \longleftrightarrow \dfrac{6}{9+4\pi^2 f^2}$

Ιδ. Μετ.: $e^{-3|t-1|} \longleftrightarrow \dfrac{6}{9+4\pi^2 f^2} e^{-j2\pi f}$

Ιδ. Παρ. Συχν.: $t \cdot e^{-3|t-1|} \longleftrightarrow \dfrac{j}{2\pi}\dfrac{d}{df}\left[\dfrac{6}{9+4\pi^2 f^2} e^{-j2\pi f}\right]$

$= \dfrac{j}{2\pi}\left(\dfrac{6e^{-j2\pi f}}{9+4\pi^2 f^2} - \dfrac{12 j e^{-j2\pi f}}{(9+4\pi^2 f^2)^2}\right)$

γ.) $x(t) = \dfrac{2\sin(3\pi t)}{\pi t} \cdot \dfrac{\sin(2\pi t)}{\pi t} \cdot \dfrac{3}{3} \cdot \dfrac{2}{2} = \underline{12\,\mathrm{sinc}(3t)}\ \underline{\mathrm{sinc}(2t)}$

Ιδιότητα δυικότητας, Πολ/μός στο χρόνο

$t \cdot \quad * \, f$

$12\,\mathrm{sinc}(3t) \cdot \mathrm{sinc}(2t) \longleftrightarrow 12\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{3}\right) * \mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right)$

δ.) $x(t) = \frac{d}{dt}\left(te^{-2t}\sin(t)u(t)\right)$

$x(t) \xleftrightarrow{F} F(x(t))$, $\frac{d}{dt}x(t) \xleftrightarrow{F} F\left(\frac{d}{dt}x(t)\right)$, $F(x(t)) \xleftrightarrow{\times j2\pi f} F\left(d/dt\, x(t)\right)$

Θα λεω το

$F\{\underbrace{te^{-2t}u(t)}_{\text{Π.Σ}}\underbrace{\sin(t)}_{\frac{e^{jt}-e^{-jt}}{2j}}\}$

Π.Σ: $\frac{1}{(2+j2\pi f)^2}$

$e^{jt}S(t) \longleftrightarrow S\left(f-\frac{1}{2\pi}\right)$

$S(f) = F\left\{ te^{-2t}u(t)\left(\frac{e^{jt}}{2j} - \frac{e^{-jt}}{2j}\right)\right\}$

Μετατόπιση στη Συχνότητα

Ιδιότητα Παραγωγής

$F\{x(t)\} = j2\pi f \cdot S(f) = \pi f\left(\frac{1}{(2+j2\pi(f-\frac{1}{2\pi}))^2} - \frac{1}{(2+j2\pi(f+\frac{1}{2\pi}))^2}\right)$

ε.) $x(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{\sin(2\pi\tau)}{\pi\tau}\,d\tau$

- $\frac{\sin(2\pi t)}{\pi t} = 2\,\mathrm{sinc}(2t) = s(t) \longleftrightarrow \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2}\right) = S(f)$
- $\int_{-\infty}^{t} s(\tau)\,d\tau \longleftrightarrow \frac{1}{j2\pi f}S(f) + \frac{S(0)}{2}\delta(f)$

στ) $x(t) = e^{-t+2} u(t-2) = e^{-(t-2)} u(t-2)$

$\boxed{\Gamma 2.}$ $e^{-t} u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{1+j2\pi f}$

Ιδιότ. Μετ. $e^{-(t-2)} u(t-2) \longleftrightarrow \frac{1}{1+j2\pi f} e^{-j4\pi f}$

ζ) $x(t) = \frac{\sin(t)}{\pi t} * \frac{d}{dt}\left[\frac{\sin(2t)}{\pi t}\right]$

- $\frac{\sin(t)}{\pi t} = \frac{1}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{t}{\pi}\right) \xleftrightarrow[\Gamma.2.]{F} \text{rect}\left(\frac{f}{1/\pi}\right) = S_1(f)$

- Ιδιότ. Παρ/σης : $j2\pi f \, \text{rect}\left(\frac{f}{1/2\pi}\right) = S_2(f)$

$X(f) = S_1(f) \cdot S_2(f)$ (Ιδιότητα Συνέλιξης)

Άσκηση 4 (HWS-2016-17 Άσκηση 6)