HY-215

Φροντιστήριο 2

Άσκηση 1 (HW2-2019-20 Άσκ. 2)

a.) $x(t) = t\,u(-t)$

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \cancel{u^2(-t)}\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} t^2\,dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-\infty}^{0} = +\infty$$

$$P_x = \lim_{T\to+\infty} \underbrace{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x^2(t)\,dt} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{0} t^2\,dt$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-T}^{0} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\cancel{T}}\frac{T^{\cancel{3}2}}{3} = +\infty$$

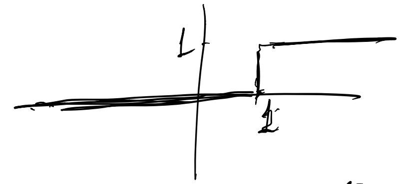
Ούτε ενέργειας, ούτε ισχύος

b.) $x(t) = 3\cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{2}\right) + 4\sin\left(10\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$

$$P_x = \left(\frac{3^2}{2} + \frac{4^2}{2}\right) = \frac{25}{2}$$

Σήμα ισχύος

γ.) $x(t) = \frac{1}{t} u(t-1)$



$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\,dt = \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt = \left[-t^{-1}\right]_{1}^{\infty} =$$

$$= -1(0-1) = 1$$

Σήματα Ενέργειας και Ισχύος

- Σήμα ενέργειας:
  - Το πλάτος και η διάρκεια του σήματος είναι πεπερασμένα.
  - Αν το πλάτος είναι πεπερασμένο αλλά όχι και η διάρκεια, τότε αναγκαία συνθήκη είναι η $x(t) \to 0$ όταν $|t| \to \infty$. Η συνθήκη αυτή όμως δεν είναι και ικανή[α΄].
- Σήμα ισχύος:
  - Εμφανίζει περιοδικότητα με περίοδο T_0 και *απολύτως φραγμένο* πλάτος, δηλ.

$$|x(t)| < M_x, \quad \forall t \text{ και } M_x \in \Re \tag{2.24}$$

  - Δεν εμφανίζει περιοδικότητα, αλλά η διάρκεια του σήματος είναι άπειρη με το πλάτος του να είναι *απολύτως φραγμένο*.

[α΄] Δείτε ότι παρ' όλο που το σήμα

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ \frac{1}{\sqrt{t}}, & t \geq 1 \end{cases} \tag{2.23}$$

φθίνει στο μηδέν όταν $|t| \to \infty$, η ενέργειά του είναι άπειρη!

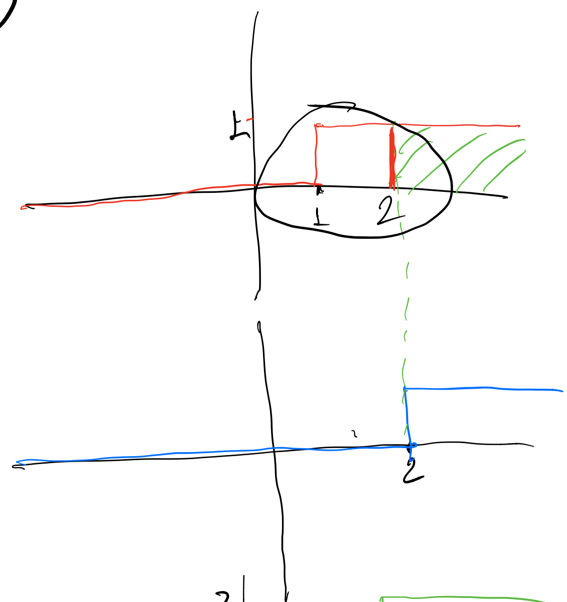
δ.) $x(t) = e^{-4|t|}$

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-8|t|}\,dt = \int_{-\infty}^{0} e^{8t}\,dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-8t}\,dt$$

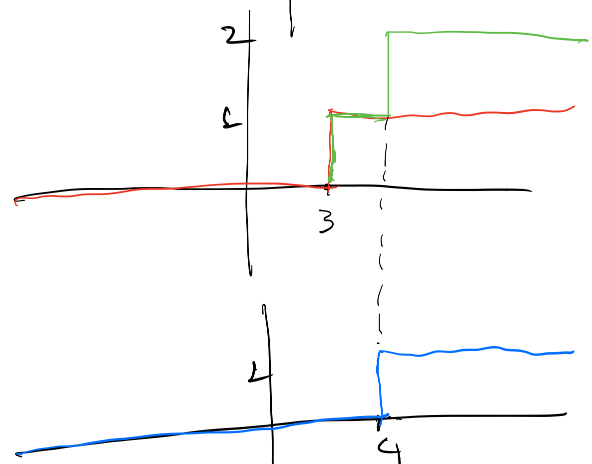
$$= \left[\frac{1}{8} e^{8t}\right]_{-\infty}^{0} + \left[-\frac{1}{8} e^{-8t}\right]_{0}^{+\infty} = \frac{1}{4}$$

Άσκηση 2 (HW3-2019-20 Άσκ. 3)

α.) $u(t-1) - u(t-2)$



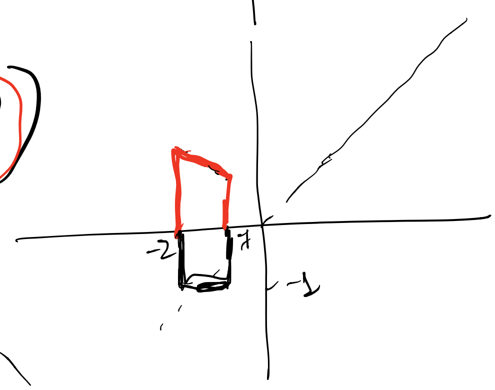
β.) $u(t-3) + u(t-4)$

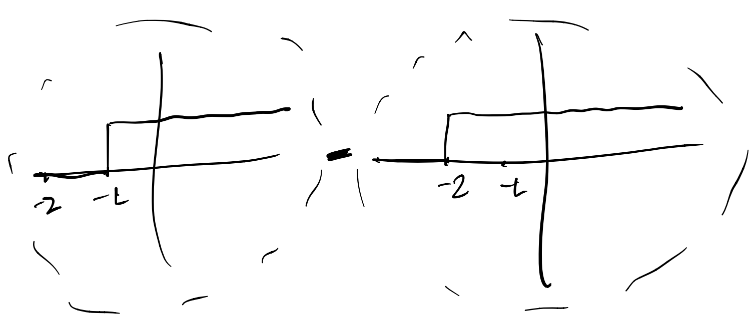


[-1, -2]

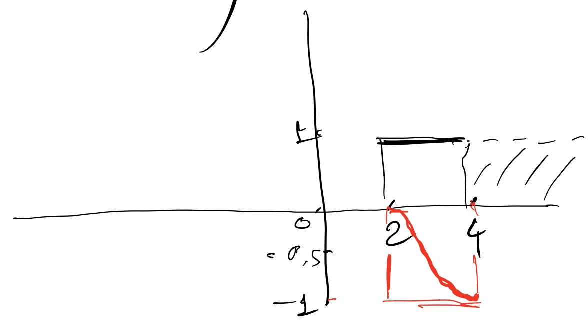
−1

γ.) $t\left(u(t+1) - u(t+2)\right)$



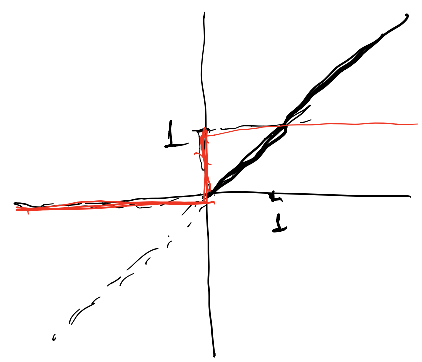


δ.) $\cos\left(\frac{\pi t}{4}\right)\left(u(t-2)-u(t-4)\right)$



Άσκηση 3 (HW2-2019-20 Ασκ. 6)

Έστω το σήμα $\underbrace{x(t)=t\cdot u(t)}_{\text{Σήμα Ράμπας}}$



Έστω $x(t) \longrightarrow y(t)=\frac{d}{dt}x(t)$

α.) Σχεδίασε το $x(t)$

β.) Δ.Ο. $y(t)=\frac{d}{dt}x(t)=u(t)$

$$\frac{d}{dt}\left(t\cdot u(t)\right) = \frac{d}{dt}t\cdot u(t) + t\cdot \overbrace{\boxed{\frac{d}{dt}u(t)}}^{\delta(t)}$$

$t-t_0,\ t_0=0$

$$= u(t) + \underbrace{t\cdot\delta(t)} = u(t) + \cancel{0\cdot\delta(t)} = u(t)$$

γ.) $\underset{x_1(t)}{u(t)} \longrightarrow y(t) = \frac{d}{dt}\underset{u(t)}{x_1(t)} = \delta(t)$

δ.) $x_2(t) = \cos(2\pi t)\left[u(t) - u(t-1)\right]$

$$x_2(t) \rightarrow y(t) = \frac{d}{dt} x_2(t) =$$

$$\frac{d}{dt}\left[\cos(2\pi t)\cdot u(t)\right] - \frac{d}{dt}\left[\cos(2\pi t)\cdot u(t-1)\right]$$

$$= -2\pi\sin(2\pi t)\cdot u(t) + \cos(2\pi t)\cdot\delta(t) - \Big(-2\pi\sin(2\pi t)u(t-1) + \cos(2\pi t)\cdot\delta(t-1)\Big)$$

$$1\cdot\delta(t-1)$$

$$= -2\pi\sin(2\pi t)\cdot u(t) + \delta(t) + 2\pi\sin(2\pi t)u(t-1) - \delta(t-1)$$

$$= -2\pi\sin(2\pi t)\left[u(t) - u(t-1)\right] + \delta(t) - \delta(t-1)$$

Άσκηση 4 (HW2-2019-20 Άσκ. 6)

α.) $y(t) = |x(t)|$

	Γρ.	Χ.Α.	Ευστ.	Αιτ.	Δυν.
α	X	✓	✓	✓	X
β	X	✓	✓	✓	X
γ	X	X	X	X	✓

Γρ.

$(a\,x(t))$

$$y(t) = |a\,x(t)| = |a|\cdot|x(t)| \neq a\cdot y(t)\ \big(a\cdot|x(t)|\big)$$

όχι γραμμικό

Χ.Α.

$$x_1(t) = x(t-t_0)$$

$$y_1(t) = |x(t-t_0)|$$

$$\parallel$$

$$y(t-t_0) = |x(t-t_0)|$$

είναι Χ.Α.

Ευστάθεια

Αν $|x(t)| < B_x \in \mathbb{R}$

$$|y(t)| = ||x(t)|| = |x(t)| < B_x$$

Αιτιατό

Δεν απαιτεί μελ. τιμές άρα είναι αιτιατό

Δυναμικό

Δεν απαιτεί μνήμη άρα δεν είναι δυναμικό

$y(t) = e^{x(t)}$

Γρ.

$a x_1(t) \rightarrow y_1(t) = e^{a x_1(t)} \neq a \cdot e^{x_1(t)}$

όχι γρ.

Χ.Α.

$x(t-t_0) \rightarrow y_1(t) = e^{x(t-t_0)}$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad //$

$y(t-t_0) = e^{x(t-t_0)}$

άρα είναι Χ.Α.

Ευστάθεια

$x(t) < B_x$

$y(t) = \left| e^{x(t)} \right| < e^{B_x}$

άρα είναι ευσταθές

Αιτιατό

Δεν απαιτεί μελ. τιμές άρα είναι αιτιατό

Δυναμικό

Παρομοίως με α, δεν είναι

γ.) $y(t) = t\sin(|x(t+1)|)$

Γρ $ax(t) \to y_1(t) = t\sin(|ax(t+1)|) \neq a \cdot y(t)$

άρα όχι γρ.

X.A.

$x(t-t_0) \to y_1(t) = t\sin(|x(t+1-t_0)|)$

$y(t-t_0) = (t-t_0)\sin(|x(t+1-t_0)|)$

άρα όχι X.A.

Ευσταθής

$|x(t)| < B_x$

$t \nearrow^{\infty} \cdot \sin(|x(t+1)|) < 1$

άρα ασταθής

Αιτιατό

Χρειάζεται το $x(t+1)$ που είναι μελ. τιμή άρα όχι αιτιατό

Δυναμικό

Χρειάζεται μνήμη για το tf1 άρα είναι δυναμικό