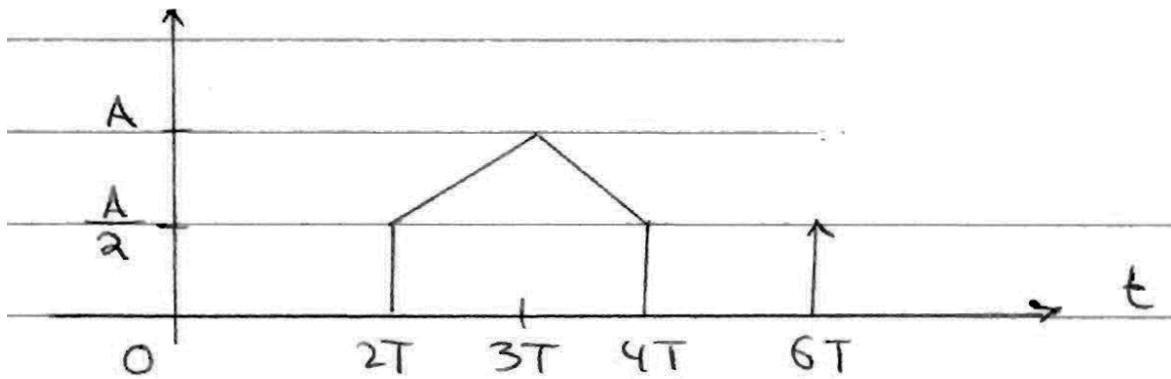


1. Απλός Μετασχηματισμός Fourier - I

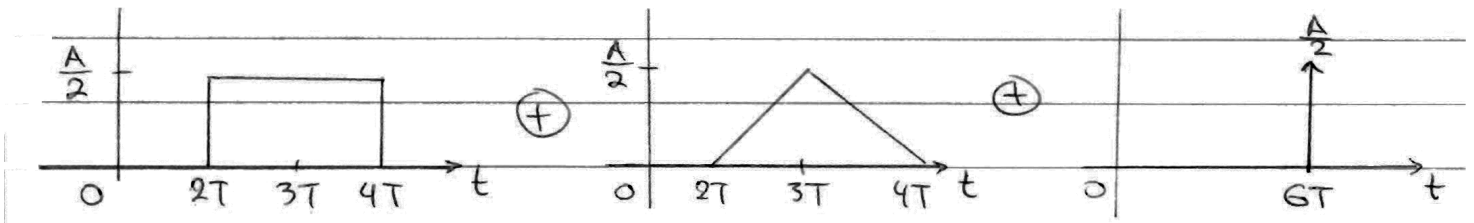
Βρείτε το μετασχ. Fourier του παρακάτω σήματος



Σχήμα 1: Σχήμα Άσκησης 1

Λύση:

Μπορούμε να σπάσουμε το σήμα σε κάποια μικρότερα γνωστά μας σήματα. Ποιά θα είναι αυτά; Θα είναι ένα τετραγωνικό παράθυρο, διάρκειας $2T$, με κέντρο το $t_0 = 3T$, ένα τριγωνικό παράθυρο διάρκειας $2T$, με κέντρο το $t_0 = 3T$, και μια συνάρτηση Δέλτα στη θέση $t_0 = 6T$, όπως στο σχήμα 2. Για το πρώτο σήμα του σχήματος 2,



Σχήμα 2: Σχήμα Άσκησης 1 - Σπασμένο σήμα

Θα έχουμε

$$X_1(f) = F\left\{\frac{A}{2}\text{rect}\left(\frac{t-3T}{2T}\right)\right\} = \frac{A}{2}2T\text{sinc}(2fT)e^{-j2\pi f3T}$$

για το δεύτερο, θα είναι

$$X_2(f) = F\left\{\frac{A}{2}\text{tri}\left(\frac{t-3T}{T}\right)\right\} = \frac{A}{2}T\text{sinc}^2(fT)e^{-j2\pi f3T}$$

και για το τρίτο, θα είναι

$$X_3(f) = F\left\{\frac{A}{2}\delta(t-6T)\right\} = \frac{A}{2}e^{-j2\pi f6T}$$

Άρα συνολικά θα είναι

$$X(f) = \frac{A}{2} 2T \operatorname{sinc}(2fT) e^{-j2\pi f3T} + \frac{A}{2} T \operatorname{sinc}^2(fT) e^{-j2\pi f3T} + \frac{A}{2} e^{-j2\pi f6T} \quad (1)$$

που είναι και το ζητούμενο.

2. Απλός Μετασχηματισμός Fourier- II

Βρείτε το μετασχ. Fourier του σήματος

$$x(t) = A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{2T}\right) * (\delta(t - 5T) + \delta(t) + \delta(t + 5T))$$

Λύση:

Θα χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα της συνάρτησης Δέλτα

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$$

Άρα θα έχουμε

$$\begin{aligned} x(t) &= A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{2T}\right) * (\delta(t - 5T) + \delta(t) + \delta(t + 5T)) \\ &= A \operatorname{rect}\left(\frac{t - 5T}{2T}\right) + A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{2T}\right) + A \operatorname{rect}\left(\frac{t + 5T}{2T}\right) \longleftrightarrow \\ X(f) &= 2AT \operatorname{sinc}(2fT) e^{-j2\pi f5T} + 2AT \operatorname{sinc}(2fT) + 2AT \operatorname{sinc}(2fT) e^{j2\pi f5T} \\ &= 2AT \operatorname{sinc}(2fT) (e^{-j2\pi f5T} + 1 + e^{j2\pi f5T}) \\ &= 2AT \operatorname{sinc}(2fT) (1 + 2 \cos(10\pi fT)) \end{aligned} \quad (2)$$

Ένας άλλος τρόπος θα ήταν να χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα που λέει *συνέλιξη στο χρόνο* $\longleftrightarrow$ *πολίπλασιασμός στη συχνότητα*. Τότε, θα είχαμε

$$\begin{aligned} X(f) &= F\left\{A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{2T}\right)\right\} F\{(\delta(t - 5T) + \delta(t) + \delta(t + 5T))\} \\ &= 2AT \operatorname{sinc}(2fT) (e^{-j2\pi f5T} + 1 + e^{j2\pi f5T}) \\ &= 2AT \operatorname{sinc}(2fT) (1 + 2 \cos(10\pi fT)) \end{aligned} \quad (3)$$

που είναι και το ζητούμενο.

3. Μετασχηματισμός Fourier - Ορισμός, Μέτρο, Φάση, Μέση Τιμή

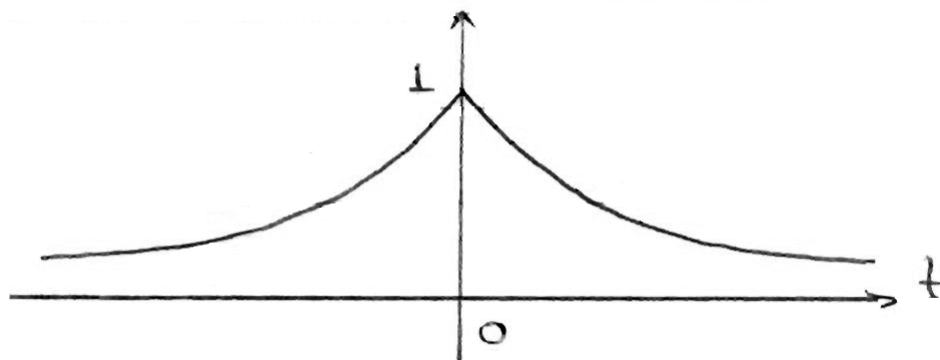
Να σχεδιάσετε το σήμα

$$x(t) = e^{-\alpha|t|}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \alpha > 0$$

με $\alpha > 0$ και να υπολογίσετε το μετασχ. Fourier του σήματος. Επίσης, να υπολογίσετε το μέτρο και τη φάση του. Υπολογίστε τη μέση τιμή του σήματος

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt$$

Σε ποιές συχνότητες το φάσμα πλάτους ισούται με το μισό της μέσης τιμής του σήματος;



Σχήμα 3: Σήμα Άσκησης 3

Λύση:

Το σήμα φαίνεται στο σχήμα 3. Είναι

$$\begin{aligned}
 X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-j2\pi ft} dt + \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j2\pi ft} dt \\
 &= \int_{-\infty}^0 e^{(a-j2\pi f)t} dt + \int_0^{\infty} e^{-(a+j2\pi f)t} dt \\
 &= \frac{1}{a-j2\pi f} e^{(a-j2\pi f)t} \Big|_{-\infty}^0 + \frac{1}{-a-j2\pi f} e^{-(a+j2\pi f)t} \Big|_0^{\infty} \\
 &= \frac{1}{a-j2\pi f} (1-0) + \frac{1}{-a-j2\pi f} (0-1) = \frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2}, \quad a > 0
 \end{aligned} \tag{4}$$

όπου τα όρια στο $\pm\infty$ οφείλονται σε γνωστό λήμμα¹. Παρατηρούμε ότι το $X(f)$ είναι πραγματικό σήμα, και θετικό για κάθε f . Άρα η φάση του είναι $\phi = 0$ και το μέτρο του είναι ο ίδιος ο μετασχηματισμός Fourier, δηλ.

$$|X(f)| = \frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2} \text{ και } \angle X(f) = 0 \tag{5}$$

Επίσης

$$\mu_x = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt = X(f) \Big|_{f=0} = X(0) = \frac{2}{a} \tag{6}$$

Θέλουμε τώρα να βρούμε σε ποιές συχνότητες, τέλος, το φάσμα πλάτους ισούται με το μισό της μέσης τιμής του σήματος. Λύνοντας απλά την εξίσωση, έχουμε

$$\begin{aligned}
 |X(f)| = \frac{\frac{2}{a}}{2} = \frac{1}{a} &\iff \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2} = \frac{1}{a} \\
 &\iff (2\pi f)^2 = a^2 \\
 &\iff f = \pm \frac{a}{2\pi}
 \end{aligned} \tag{7}$$

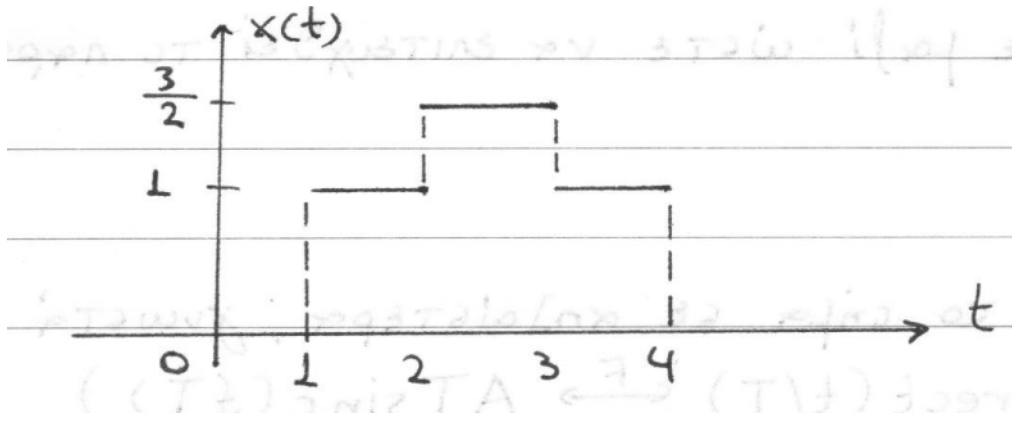
4. Απλός Μετασχηματισμός Fourier - III

Να βρεθεί ο μετασχ. Fourier του σήματος που φαίνεται στο σχήμα 4.

Λύση:

Για την εύρεση του μετασχ. Fourier του σήματος $x(t)$ που απεικονίζεται στο σχήμα, μπορούμε να εφαρμόσουμε πολλούς τρόπους. Ας δούμε μερικούς...

¹Αν $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$ και $|g(t)| < B$, τότε $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)g(t) = 0$



Σχήμα 4: Σχήμα Άσκησης 4

(α') Με τον ορισμό:

$$\begin{aligned}
 X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt \\
 &= \int_1^2 1e^{-j2\pi ft} dt + \int_2^3 \frac{3}{2}e^{-j2\pi ft} dt + \int_3^4 1e^{-j2\pi ft} dt \\
 &= -\frac{1}{j2\pi f} e^{-j2\pi ft} \Big|_1^2 - \frac{3}{2} \frac{1}{j2\pi f} e^{-j2\pi ft} \Big|_2^3 - \frac{1}{j2\pi f} e^{-j2\pi ft} \Big|_3^4 \\
 &= \underbrace{\frac{1}{(-j2\pi f)} e^{-j2\pi 2f} - \frac{1}{(-j2\pi f)} e^{-j2\pi f}}_{\text{Term 1}} + \underbrace{\frac{1}{(-j2\pi f)} \frac{3}{2} e^{-j2\pi 3f} - \frac{1}{(-j2\pi f)} \frac{3}{2} e^{-j2\pi 2f}}_{\text{Term 2}} \\
 &\quad + \underbrace{\frac{1}{(-j2\pi f)} e^{-j4\pi f} - \frac{1}{(-j2\pi f)} e^{-j6\pi f}}_{\text{Term 3}} \\
 &= \frac{1}{(-j2\pi f)} e^{-j\frac{3}{2}2\pi f} (e^{-j\frac{1}{2}2\pi f} - e^{j\frac{1}{2}2\pi f}) + \frac{3}{2} \frac{1}{(-j2\pi f)} e^{-j\frac{5}{2}2\pi f} (e^{-j\frac{1}{2}2\pi f} - e^{j\frac{1}{2}2\pi f}) + \\
 &\quad + \frac{1}{(-j2\pi f)} e^{-j7\pi f} (e^{-j\pi f} - e^{j\pi f}) \\
 &= \frac{1}{(-j2\pi f)} e^{-j3\pi f} (-2j \sin(\pi f)) + \frac{3}{2} \frac{1}{(-j2\pi f)} e^{-j5\pi f} (-2j \sin(\pi f)) + \frac{1}{(-j2\pi f)} e^{-j7\pi f} (-2j \sin(\pi f)) \\
 &= \frac{\sin(\pi f)}{\pi f} e^{-j3\pi f} + \frac{3}{2} \frac{\sin(\pi f)}{\pi f} e^{-j5\pi f} + \frac{\sin(\pi f)}{\pi f} e^{-j7\pi f} \\
 &= \text{sinc}(f) \left(e^{-j3\pi f} + \frac{3}{2} e^{-j5\pi f} + e^{-j7\pi f} \right) \tag{8}
 \end{aligned}$$

Παρατηρήστε τους όρους που βγάλαμε κοινό παράγοντα ώστε να εμφανιστούν τα $\sin(\pi f)$. Με άγκιστρο είναι τα εκθετικά που χρησιμοποιήσαμε μαζί ώστε να το πετύχουμε αυτό.

(β') Αναλύοντας το σήμα σε απλούστερα γνωστά σήματα. Το πιο απλό είναι η παρακάτω διάσπαση, που φαίνεται στο Σχήμα 5. Έχουμε άρα

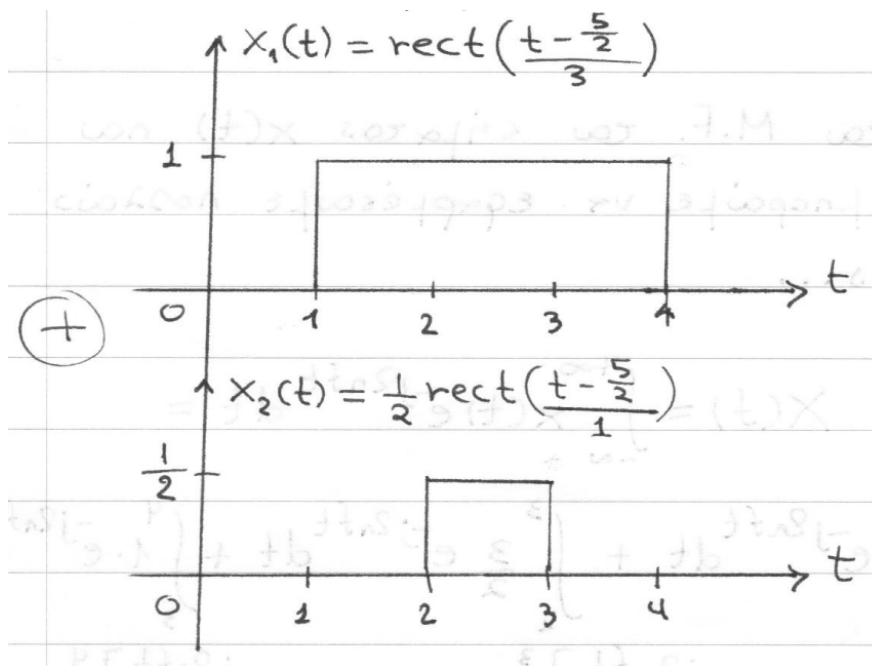
$$X_1(f) = 3\text{sinc}(3f)e^{-j5\pi f}$$

και

$$X_2(f) = \frac{1}{2}\text{sinc}(f)e^{-j5\pi f}$$

Άρα το τελικό σήμα θα είναι το άθροισμα

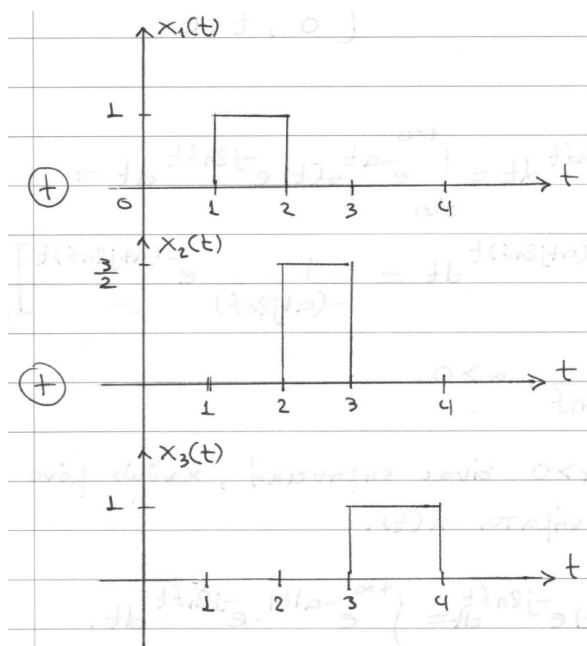
$$X(f) = X_1(f) + X_2(f) = e^{-j5\pi f} \left(\frac{1}{2}\text{sinc}(f) + 3\text{sinc}(3f) \right) \tag{9}$$



Σχήμα 5: Διάσπαση Άσκησης 4 - δεύτερος τρόπος

Παρατηρήστε ότι το αποτέλεσμα μοιάζει διαφορετικό από αυτό του πρώτου τρόπου που ακολουθήσαμε, αλλά στην ουσία είναι το ίδιο σήμα. Αυτό μπορείτε να το επιβεβαιώσετε με το MATLAB ή κάνοντας πράξεις στο αποτέλεσμα του πρώτου τρόπου.

- (γ) Αναλύοντας το σήμα σε τρία σήματα, αντί για δύο, όμοια με το δεύτερο τρόπο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 6. Όμοια λοιπόν, θα έχουμε



Σχήμα 6: Διάσπαση Άσκησης 4 - τρίτος τρόπος

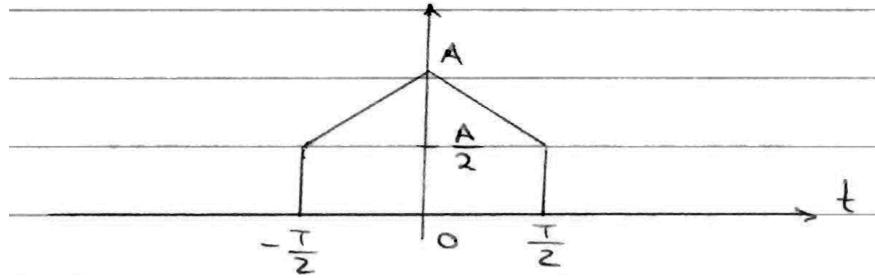
$$X(f) = X_1(f) + X_2(f) + X_3(f) = \text{sinc}(f) \left(e^{-j3\pi f} + \frac{3}{2} e^{-j5\pi f} + e^{-j7\pi f} \right) \quad (10)$$

Το αποτέλεσμα είναι ίδιο με αυτό που προέκυψε με τον ορισμό, αλλά πολύ πιο εύκολα και σύντομα. :-)

Υπάρχουν 1-2 τρόποι ακόμα που μπορείτε να σπάσετε το αρχικό σήμα σε απλούστερα. Χρησιμοποιήστε τη φαντασία σας! ;-)

5. Μετασχηματισμός Fourier - Παραγωγή

Να υπολογίσετε το μετασχ. Fourier του σήματος στο σχήμα 7.



Σχήμα 7: Σχήμα Άσκησης 5

Λύση:

Ο εύκολος τρόπος είναι να σπάσουμε το σήμα μας όπως στην Άσκηση 1. Κάντε το! :-) Επιβεβαιώστε ότι το αποτέλεσμα είναι

$$X(f) = \frac{AT}{2} \left(\text{sinc}(fT) + \frac{1}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{fT}{2}\right) \right) \quad (11)$$

Ένας άλλος τρόπος θα ήταν να χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα της παραγωγής, η οποία σε περιπτώσεις που δεν μπορούμε να σπάσουμε το σήμα μας, μας λύνει τα χέρια. Η ιδιότητα θυμίζεται ότι είναι

$$\frac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow j2\pi f X(f) \iff F\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = j2\pi f X(f) \quad (12)$$

Θα δουλέψουμε ως εξής: θα χρησιμοποιήσουμε την παράγωγο του $x(t)$, θα βρούμε τον μετασχ. Fourier, και μέσω της σχέσης 12, θα βρούμε το $X(f)$. Στην προσπάθειά μας να παραγωγίσουμε το $x(t)$ έχοντας στο μυαλό μας την κλασική θεωρία της Ανάλυσης, θα συναντήσουμε δυσκολίες. Υπάρχουν σημεία στο σήμα όπου υπάρχουν ασυνέχειες. Τα σημεία αυτά είναι στις χρονικές στιγμές $t = \pm \frac{T}{2}$, όπου το σήμα αλλάζει ακαριαία τιμές. Σύμφωνα με όσα γνωρίζουμε από τον Απειροστικό Λογισμό, δεν ορίζεται παράγωγος στα σημεία αυτά. Όμως έχετε δει ότι

$$\frac{du(t - t_0)}{dt} = \delta(t - t_0) \quad (13)$$

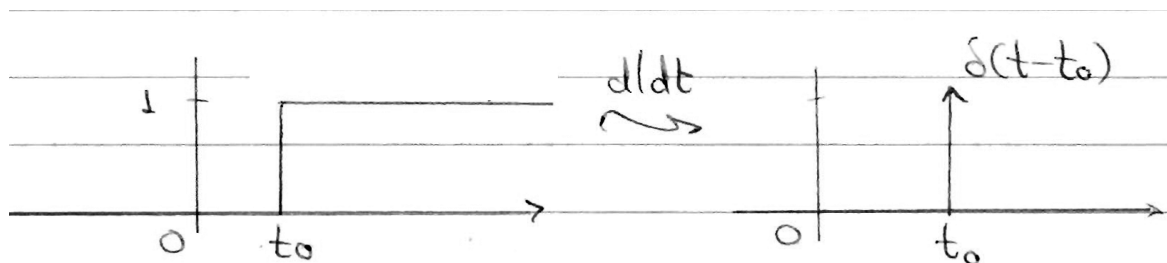
δηλ. ότι η παράγωγος της βηματικής συνάρτησης $u(t - t_0)$ είναι μια συνάρτηση Δέλτα στη θέση $t = t_0$. Κατ' αυτόν τον τρόπο, ορίστηκε η παράγωγος μιας ασυνέχειας, όπως αυτή που έχει η βηματική συνάρτηση, με χρήση γενικευμένων συναρτήσεων, όπως είναι η συνάρτηση Δέλτα. Αυτή η διαδικασία φαίνεται στο σχήμα 8. Αυτό σημαίνει ότι οποιοδήποτε σήμα περιέχει μια ασυνέχεια (ή και περισσότερες), μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός βηματικών συναρτήσεων. Για παράδειγμα, ο γνωστός μας τετραγωνικός παλμός

$$x(t) = \text{Arect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

μπορεί να γραφεί ως

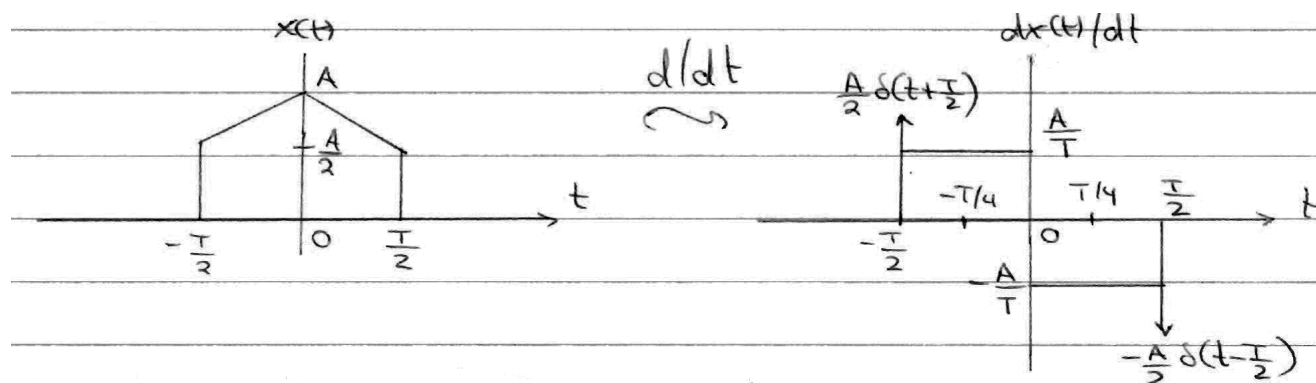
$$x(t) = \text{Arect}\left(\frac{t}{T}\right) = \text{Au}\left(t + \frac{T}{2}\right) - \text{Au}\left(t - \frac{T}{2}\right)$$

όπου και με την παραγωγή του, προκύπτουν δυο συναρτήσεις Δέλτα στις θέσεις $t = \pm \frac{T}{2}$, ακριβώς λόγω της παραπάνω σχέσης και της σχέσης 13.



Σχήμα 8: Παράγωγος βηματικής συνάρτησης

Οπότε όταν παραγωγίζουμε ένα σήμα, πρέπει να είμαστε ιδιαίτερα προσεκτικοί στα σημεία ασυνέχειας, αρχικά αναγνωρίζοντάς τα, και έπειτα χωρίς να παραλείπουμε να βάζουμε την αντίστοιχη συνάρτηση Δέλτα στα σημεία ασυνέχειας. Παραγωγίζοντας λοιπόν το σήμα, καταλήγουμε στο σχήμα 9. Οπότε έχουμε ότι το σήμα $\frac{dx(t)}{dt}$



Σχήμα 9: Παραγωγή σήματος Άσκησης 5

αποτελείται από:

- Μια συνάρτηση Δέλτα, $x_1(t) = \frac{A}{2}\delta\left(t + \frac{T}{2}\right)$
- Ένα τετραγωνικό παράθυρο, $x_2(t) = \frac{A}{T}\text{rect}\left(\frac{t + \frac{T}{4}}{T/2}\right)$
- Άλλο ένα τετραγωνικό παράθυρο, $x_3(t) = -\frac{A}{T}\text{rect}\left(\frac{t - \frac{T}{4}}{T/2}\right)$
- Και μια ακόμα συνάρτηση Δέλτα, $x_4(t) = -\frac{A}{2}\delta\left(t - \frac{T}{2}\right)$

Άρα τελικά θα είναι

$$\begin{aligned}
 \frac{dx(t)}{dt} &= x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) + x_4(t) \\
 &= \frac{A}{2}\delta\left(t + \frac{T}{2}\right) + \frac{A}{T}\text{rect}\left(\frac{t + \frac{T}{4}}{T/2}\right) - \frac{A}{T}\text{rect}\left(\frac{t - \frac{T}{4}}{T/2}\right) - \frac{A}{2}\delta\left(t - \frac{T}{2}\right) \longleftrightarrow \\
 F\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} &= \frac{A}{2}e^{j2\pi fT/2} + \frac{A}{T}\frac{T}{2}\text{sinc}\left(\frac{fT}{2}\right)e^{j2\pi fT/4} - \frac{A}{T}\frac{T}{2}\text{sinc}\left(\frac{fT}{2}\right)e^{-j2\pi fT/4} - \frac{A}{2}e^{-j2\pi fT/2} \\
 &= Aj\sin(\pi fT) + \frac{A}{2}\text{sinc}\left(\frac{fT}{2}\right)2j\sin\left(\frac{fT}{2}\right) \\
 j2\pi fX(f) &= Aj\sin(\pi fT) + \frac{A}{2}\text{sinc}\left(\frac{fT}{2}\right)2j\sin\left(\frac{fT}{2}\right) \\
 X(f) &= \frac{AT}{2}\text{sinc}(fT) + \frac{AT}{4}\text{sinc}^2\left(\frac{fT}{2}\right)
 \end{aligned} \tag{14}$$

που είναι και το ζητούμενο και ίδιο αποτέλεσμα με αυτό που θα παίρναμε αν χρησιμοποιούσαμε απλά σπάσιμο σε απλούστερα σήματα (δες ξανά πρώτη γραμμή αυτής της λύσης).

6. Μετασχηματισμός Fourier - Δυσκολότητα

Να βρεθεί ο μετασχ. Fourier του σήματος

$$x(t) = \frac{2}{1+t^2}$$

Λύση:

Η λύση με τον ορισμό δε συνίσταται... θα κάνουμε χρήση ιδιοτήτων και συγκεκριμένα την ιδιότητα της δυσκολότητας

$$x(t) \longleftrightarrow X(f) \implies X(t) \longleftrightarrow x(-f)$$

Επίσης γνωρίζουμε από προηγούμενη άσκηση ότι

$$e^{-a|t|} \longleftrightarrow \frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2}$$

Για $a = 2\pi$, η παραπάνω σχέση γράφεται ως

$$e^{-2\pi|t|} \longleftrightarrow \frac{4\pi}{(2\pi)^2 + (2\pi f)^2} = \frac{4\pi}{4\pi^2} \frac{1}{1+f^2} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+f^2}$$

Ο δεύτερος όρος της παραπάνω εξίσωσης έχει τη μορφή του σήματος στο χρόνο που ψάχνουμε. Με χρήση της ιδιότητας της δυσκολότητας, θα είναι

$$x(t) = \frac{2}{1+t^2} \longleftrightarrow X(f) = 2\pi e^{-2\pi|-f|} = 2\pi e^{-2\pi|f|} \tag{15}$$

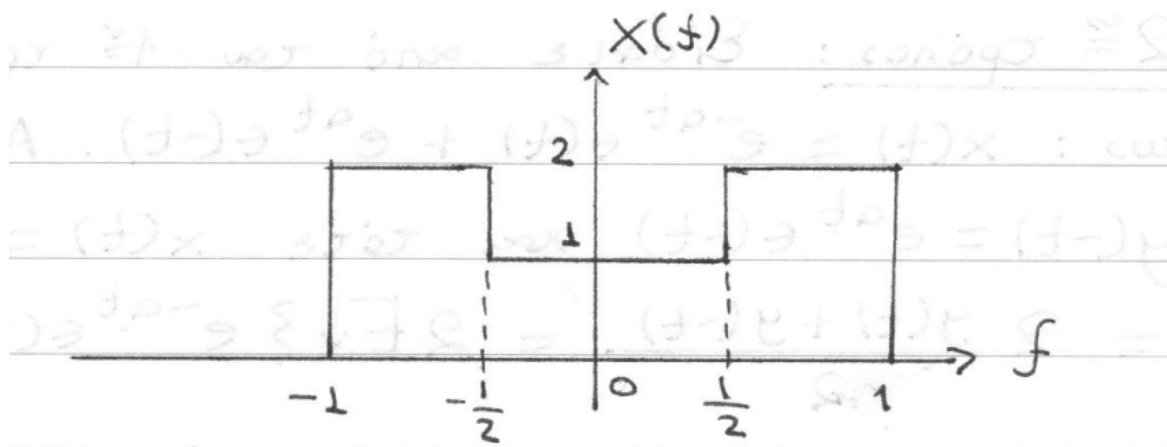
που είναι και το ζητούμενο.

7. Θεώρημα Parseval

Υπολογίστε τα

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt, \quad x(0)$$

για το σήμα $x(t)$ που έχει μετασχ. Fourier όπως στο σχήμα 10.



Σχήμα 10: Σήμα Άσκησης 7

Λύση:

Αρχικά, θα μπορούσε κάποιος να σκεφτεί να βρει το $x(t)$ μέσω του $X(f)$, αφού το τελευταίο είναι απλό σήμα. Αφού το $X(f)$ αποτελείται από σήματα $\text{rect}(\cdot)$, τότε το $x(t)$ θα αποτελείται από σήματα $\text{sinc}(\cdot)$, λόγω της ιδιότητας της Δυσικότητας. Πιο συγκεκριμένα, αν

$$\begin{aligned} X(f) &= 2\text{rect}\left(f - 3/4 / (1/2)\right) + \text{rect}(f) + 2\text{rect}\left((f + 3/4) / (1/2)\right) \longleftrightarrow \\ x(t) &= \text{sinc}(t)e^{j2\pi 3t/4} + \text{sinc}(t) + \text{sinc}(t)e^{-j3\pi t/4} \\ &= \text{sinc}(t) + 2\text{sinc}(t) \cos(3\pi t/2) \\ &= \text{sinc}(t) \left(1 + 2 \cos\left(\frac{3\pi t}{2}\right)\right) \end{aligned} \quad (16)$$

Αφού φτάσαμε ως εδώ, πρέπει τώρα να βρούμε το $|x(t)|^2$ και να ολοκληρώσουμε. Αυτός ο τρόπος - αν βγάζει και πουθενά :-) - ΔΕΝ συνίσταται!

Ένα άλλος τρόπος θα ήταν να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα του Parseval,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

Αρκεί να υπολογίσουμε το δεύτερο μέλος, άρα θα είναι

$$\int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df = \left(2 \int_0^{1/2} 1^2 df + 2 \int_{1/2}^1 2^2 df\right) = 5 \quad (17)$$

που είναι και το ζητούμενο. Η τιμή $x(0)$ δίνεται εύκολα ως

$$x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df \Big|_{t=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^0 df = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) df \quad (18)$$

που αποτελεί το εμβαδό του σήματος του Σχήματος 10, το οποίο από απλή γεωμετρία βρίσκουμε ότι ισούται με 3.

8. Συνάρτηση Δέλτα - Θεωρητικό

Είδαμε στη θεωρία ότι πολλές συναρτήσεις μπορούν να προσεγγίσουν τη συνάρτηση Δέλτα. Αν ορίσουμε τη συνάρτηση Δέλτα ως

$$\delta(t) = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi t/A)}{\pi t}$$

αποδείξτε ότι ο μετασχ. Fourier της $\delta(t)$ είναι 1.

Λύση:

Ο μετασχ. Fourier είναι

$$\begin{aligned} F\{\delta(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{A \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi t/A)}{\pi t} e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \lim_{A \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi t/A)}{\pi t} e^{-j2\pi ft} dt = \lim_{A \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{A} \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{A}\right) e^{-j2\pi ft} dt \end{aligned}$$

Όμως το ολοκλήρωμα αυτό δεν είναι τίποτα άλλο από το μετασχ. Fourier του σήματος

$$x(t) = \frac{1}{A} \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{A}\right)$$

Από την ιδιότητα της δυικότητας, εύκολα βρίσκουμε ότι ο μετασχ. Fourier του σήματος $x(t)$, είναι

$$X(f) = \operatorname{rect}\left(\frac{f}{1/A}\right)$$

Οπότε τώρα ζητάμε το

$$\lim_{A \rightarrow 0} \operatorname{rect}\left(\frac{f}{1/A}\right)$$

Παρατηρούμε ότι το $1/A$ είναι η διάρκεια του παλμού, όπως ξέρουμε. Όσο $A \rightarrow 0$, τόσο το $1/A \rightarrow \infty$, άρα τόσο μεγαλύτερος γίνεται ο παλμός σε διάρκεια, μέχρι που πλέον δεν υπάρχει παλμός, αλλά για κάθε f η τιμή του σήματος είναι σταθερή και ίση με 1. Άρα τελικά

$$F\{\delta(t)\} = \lim_{A \rightarrow 0} \operatorname{rect}\left(\frac{f}{1/A}\right) = 1 \quad (19)$$

Μια λιγότερο διαισθητική ερμηνεία έρχεται όταν χρησιμοποιήσουμε απλά μαθηματικά, δηλ.

$$\lim_{A \rightarrow 0} \operatorname{rect}\left(\frac{f}{1/A}\right) = \lim_{A \rightarrow 0} \operatorname{rect}(Af) = \operatorname{rect}(0) = 1 \quad (20)$$

που είναι και το ζητούμενο.

9. Θεώρημα Parseval

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Parseval, αποδείξτε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(\alpha t)}{t^2} dt = \alpha\pi$$

Λύση:

Θυμίζουμε το θεώρημα του Parseval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(at)}{t^2} dt &= \int_{-\infty}^{\infty} a^2 \frac{\sin^2\left(\pi \frac{a}{\pi} t\right)}{a^2 t^2} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left(a \frac{\sin\left(\pi \frac{a}{\pi} t\right)}{\pi \frac{a}{\pi} t} \right)^2 dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(a \operatorname{sinc}\left(\frac{a}{\pi} t\right) \right)^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt\end{aligned}\quad (21)$$

Άρα αρκεί να βρούμε το μετασχ. Fourier του σήματος

$$x(t) = a \operatorname{sinc}\left(\frac{a}{\pi} t\right)$$

Από γνωστές ιδιότητες (δυσικότητα - $X(t) \longleftrightarrow x(-f)$) έχουμε ότι

$$x(t) = a \operatorname{sinc}\left(\frac{a}{\pi} t\right) \longleftrightarrow X(f) = \pi \operatorname{rect}\left(\frac{f}{a}\right)$$

Άρα θα είναι

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(a \operatorname{sinc}\left(\frac{a}{\pi} t\right) \right)^2 dt = \pi^2 \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{rect}^2\left(\frac{f}{a}\right) df \\ &= \pi^2 \int_{-a/2\pi}^{a/2\pi} 1^2 df = \pi^2 f \Big|_{-a/2\pi}^{a/2\pi} = \pi^2 \frac{2a}{2\pi} = a\pi\end{aligned}\quad (22)$$

που είναι και το ζητούμενο.

10. Μετασχηματισμός Fourier - Ιδιότητες

Υπολογίστε το μετασχ. Fourier του σήματος

$$x(t) = \frac{1}{\pi t}$$

Λύση:

Το σήμα

$$x(t) = \frac{1}{\pi t}$$

είναι περιττό γιατί ισχύει $x(t) = -x(-t)$. Άρα ο μετασχ. Fourier του σήματος θα έχει μόνο φανταστικό μέρος, δηλαδή:

$$X(f) = j\Im(f) = -2j \int_0^{\infty} \frac{\sin(2\pi ft)}{\pi t} dt = -\frac{2}{\pi} j \int_0^{\infty} \frac{\sin(2\pi ft)}{t} dt$$

Όμως ισχύει - από τυπολόγιο - ότι

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(ax)}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & a > 0, \\ 0, & a = 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & a < 0 \end{cases}$$

Οπότε θα είναι

$$X(f) = \begin{cases} -j, & f > 0, \\ 0, & f = 0, \\ j, & f < 0 \end{cases}$$

που γράφεται εν συντομία ως

$$X(f) = -j \operatorname{sgn}(f) \quad (23)$$

με $\text{sgn}(f)$ η συνάρτηση προσήμου

$$\text{sgn}(f) = \frac{f}{|f|}, f \neq 0.$$

11. Μετασχηματισμός Fourier - Θεωρητικό Ι

Έστω ότι $X(f) = \Re(f) + j\Im(f)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier ενός πραγματικού σήματος $x(t)$. Αποδείξτε ότι ο μετασχ. Fourier του άρτιου μέρους του $x(t)$ είναι ίσος με $\Re(f)$ και ο αντίστοιχος του περιττού μέρους είναι ίσος με $j\Im(f)$.

Λύση:

Είναι

$$\begin{aligned} X(f) &= X_{ev}(f) + X_{odd}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x_{ev}(t)e^{-j2\pi ft}dt + \int_{-\infty}^{\infty} x_{odd}(t)e^{-j2\pi ft}dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_{ev}(t) \cos(2\pi ft)dt - j \int_{-\infty}^{\infty} x_{ev}(t) \sin(2\pi ft)dt + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} x_{odd}(t) \cos(2\pi ft)dt - j \int_{-\infty}^{\infty} x_{odd}(t) \sin(2\pi ft)dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x_{ev}(t) + x_{odd}(t)) \cos(2\pi ft)dt - j \int_{-\infty}^{\infty} (x_{ev}(t) + x_{odd}(t)) \sin(2\pi ft)dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos(2\pi ft)dt - j \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin(2\pi ft)dt \\ &= \Re(f) + j\Im(f) \end{aligned} \quad (24)$$

που είναι και το ζητούμενο.

12. Μετασχηματισμός Fourier - Θεωρητικό ΙΙ

Αποδείξτε ότι το πραγματικό, $\Re(f)$, και φανταστικό, $\Im(f)$, του μετασχηματισμού Fourier ενός μιγαδικού σήματος $x(t) = x_R(t) + jx_I(t)$ δίνονται από τις παρακάτω εξισώσεις:

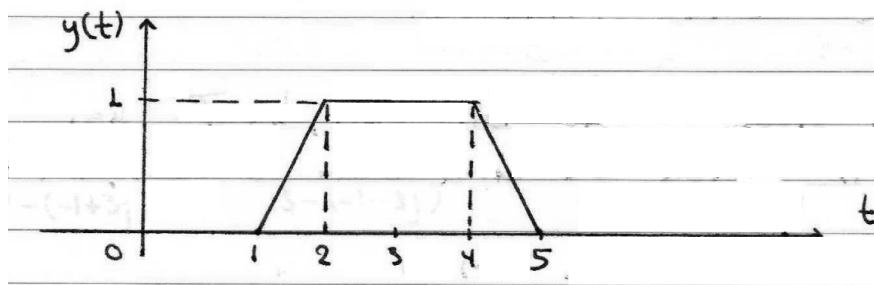
$$\begin{aligned} \Re(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} [x_R(t) \cos(2\pi ft) + x_I(t) \sin(2\pi ft)] dt \\ \Im(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} [x_I(t) \cos(2\pi ft) - x_R(t) \sin(2\pi ft)] dt \end{aligned}$$

Λύση:

Ο μετασχ. Fourier γράφεται ως

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-\infty}^{\infty} [x_R(t) + jx_I(t)]e^{-j2\pi ft}dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [x_R(t)e^{-j2\pi ft} + jx_I(t)e^{-j2\pi ft}]dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_R(t)e^{-j2\pi ft}dt + j \int_{-\infty}^{\infty} x_I(t)e^{-j2\pi ft}dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_R(t)(\cos(2\pi ft) - j\sin(2\pi ft))dt + j \int_{-\infty}^{\infty} x_I(t)(\cos(2\pi ft) - j\sin(2\pi ft))dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x_R(t) \cos(2\pi ft) + x_I(t) \sin(2\pi ft))dt + j \int_{-\infty}^{\infty} (x_I(t) \cos(2\pi ft) - x_R(t) \sin(2\pi ft))dt \\ &= \Re(f) + j\Im(f) \end{aligned} \quad (25)$$

13. Μετασχηματισμός Fourier - Παραγωγή, Φάση

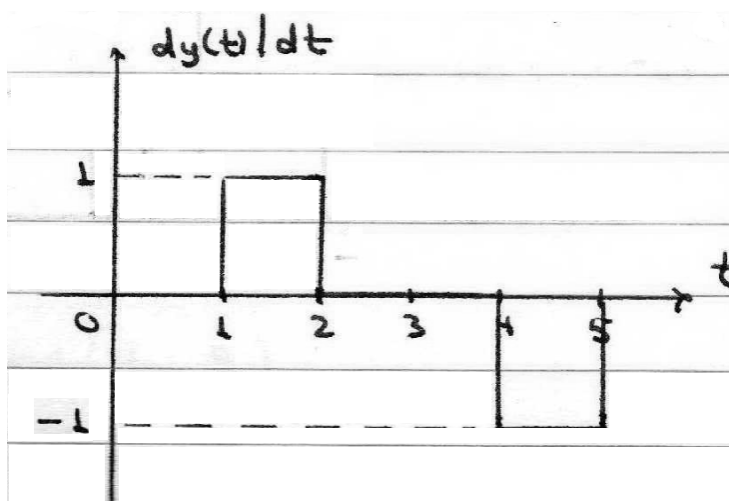
Έστω το σήμα $y(t)$ του σχήματος 11.

Σχήμα 11: Σήμα Άσκησης 13

- (α) Υπολογίστε το μετασχ. Fourier του $y(t)$.
 (β) Σε ποιές συχνότητες υπάρχουν μηδενισμοί στην $Y(f)$?
 (γ) Υπολογίστε το φάσμα φάσης για $-1 < f < 1$ Hz.

Λύση:

- (α) Θα χρησιμοποιήσουμε παραγωγή για να βρούμε εύκολα το μετ. Fourier του σήματος. Η παράγωγος φαίνεται στο σχήμα 12. Είναι:



Σχήμα 12: Παράγωγος σήματος Άσκησης 13

$$\begin{aligned}
 \frac{dy(t)}{dt} &= \text{rect}\left(\frac{t-3/2}{1}\right) - \text{rect}\left(\frac{t-9/2}{1}\right) \longleftrightarrow \\
 F\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\} &= \text{sinc}(f)e^{-j3\pi f} - \text{sinc}(f)e^{-j9\pi f} \\
 j2\pi f Y(f) &= \text{sinc}(f)(e^{-j3\pi f} - e^{-j9\pi f}) \\
 j2\pi f Y(f) &= \text{sinc}(f)e^{-j6\pi f} 2j \sin(3\pi f) \\
 Y(f) &= 3e^{-j6\pi f} \text{sinc}(3f) \text{sinc}(f)
 \end{aligned}$$

(26)

- (β) Οι μηδενισμοί γίνονται όταν

$$3\pi f = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{και} \quad \pi f = l\pi, \quad l \in \mathbb{Z}$$

άρα το φάσμα θα μηδενίζεται όταν

$$f = \frac{k}{3}, k \in Z \quad (27)$$

(γ) Η φάση του σήματος αποτελείται από τη φάση του εκθετικού, $-6\pi f$, και τη φάση του $\text{sinc}(3f)\text{sinc}(f)$. Δεδομένου ότι οι μηδενισμοί γίνονται κάθε $1/3$ Hz, θα έχουμε ότι

$$\angle Y(f) = \begin{cases} -6\pi f, & \text{sinc}(3f)\text{sinc}(f) > 0, \\ -6\pi f + \pi, & \text{sinc}(3f)\text{sinc}(f) < 0, f > 0 \\ -6\pi f - \pi, & \text{sinc}(3f)\text{sinc}(f) < 0, f < 0 \end{cases}$$

Συγκεντρωτικά,

$$\angle Y(f) = \begin{cases} -6\pi f, & -1 < f < -2/3 \\ -6\pi f - \pi, & -2/3 < f < -1/3 \\ -6\pi f, & -1/3 < f < 1/3 \\ -6\pi f + \pi, & 1/3 < f < 2/3 \\ -6\pi f, & 2/3 < f < 1 \end{cases}$$

14. Μετασχηματισμός Fourier - Σύστημα, Φάση

Το σήμα $y(t)$ του προηγούμενου θέματος είναι είσοδος στο σύστημα με απόκριση $h(t) = \delta(t) + \delta(t + 6)$. Να υπολογιστεί ο μετασχ. Fourier της εξόδου και οι τιμές του φάσματος για $-\frac{1}{3} \leq f \leq \frac{1}{3}$.

Λύση:
Είναι

$$\begin{aligned} Z(f) &= Y(f)H(f) = 3e^{-j2\pi 3f}\text{sinc}(3f)\text{sinc}(3f)H(f) \\ &= 3e^{-j2\pi 3f}\text{sinc}(3f)\text{sinc}(f)(1 + e^{j2\pi 6f}) \\ &= 3\text{sinc}(3f)\text{sinc}(f)(e^{-j2\pi 3f} + e^{j2\pi 3f}) \\ &= 6\text{sinc}(3f)\text{sinc}(f)\cos(2\pi 3f) \end{aligned} \quad (28)$$

Επειδή το σήμα είναι πραγματικό, δηλ. $\Im(f) = 0$, η φάση θα είναι 0 ή $\pm\pi$. Όπου το σήμα είναι θετικό, η φάση είναι 0 . Όπου είναι αρνητικό, έχουμε δυο περιπτώσεις: για θετικές συχνότητες, η φάση είναι π , ενώ για αρνητικές συχνότητες, έχουμε φάση $-\pi$. Τα σημεία μηδενισμού για κάθε όρο του γινομένου είναι στις θέσεις

$$\begin{aligned} 3\pi f &= k\pi, \quad \pi f = l\pi, \quad 6\pi f = m\pi \pm \frac{\pi}{2}, \quad k, l, m \in Z \\ f &= \frac{k}{3}, \quad f = l, \quad f = \frac{m \pm \frac{1}{2}}{6} = \frac{m}{6} \pm \frac{1}{12}, \quad k, l, m \in Z \end{aligned} \quad (29)$$

Προφανώς, το συνολικό σήμα μηδενίζεται στο διάστημα $[-1/3, 1/3]$ όταν

$$f = \frac{m}{6} \pm \frac{1}{12}$$

Συγκεντρωτικά,

$$\angle Z(f) = \begin{cases} 0, & -1/3 \leq f < -3/12 \\ -\pi, & -3/12 \leq f < -1/12 \\ 0, & -1/12 \leq f \leq 1/12 \\ +\pi, & 1/12 < f \leq 3/12 \\ 0, & 3/12 < f \leq 1/3 \end{cases}$$

που είναι και το ζητούμενο.

15. Μετασχηματισμός Fourier - Θεωρητικό IV

Ένα σήμα $x(t)$ έχει μη μηδενικές συχνότητες στο διάστημα $[-B, B]$. Δείξτε ότι το σήμα $x^n(t)$ έχει μη μηδενικές συχνότητες στο διάστημα $[-nB, nB]$.

Λύση:

Γνωρίζουμε ότι

$$x(t)x(t) \longleftrightarrow X(f) * X(f)$$

και το φάσμα είναι μη μηδενικό στο διάστημα $[-2B, 2B]$, αφού η συνέλιξη δυο σημάτων που είναι μη μηδενική στο $[a, b]$ και στο $[c, d]$ αντίστοιχα, είναι μη μηδενική στο $[a + c, b + d]$.

Όμοια,

$$x(t)x(t)x(t) \longleftrightarrow [X(f) * X(f)] * X(f)$$

και το φάσμα είναι μη μηδενικό στο διάστημα $[-3B, 3B]$ Αντίστοιχα,

$$\underbrace{x(t)x(t) \cdots x(t)}_{n \text{ φορές}} \longleftrightarrow \underbrace{X(f) * X(f) * \cdots * X(f)}_{n \text{ φορές}}$$

και σκεπτόμενοι όμοια, το φάσμα είναι μη μηδενικό στις συχνότητες $[-nB, nB]$.

16. Μετασχηματισμός Fourier - Σύστημα, Ενέργεια

Δίνεται το σύστημα με κρουστική απόκριση

$$h(t) = \frac{\sin(2\pi f_c t)}{\pi t}$$

Βάζουμε ως είσοδο στο παραπάνω φίλτρο το σήμα

$$x(t) = e^{-2t}u(t)$$

Ζητείται η συχνότητα αποκοπής f_c του φίλτρου τέτοια ώστε το φίλτρο να αφήνει να περάσει στην έξοδο $y(t)$ ακριβώς η μισή της συνολικής ενέργειας του σήματος $x(t)$.

Δίνεται ότι $\int \frac{1}{\alpha^2 + x^2} dx = \frac{1}{\alpha} \tan^{-1} \left(\frac{x}{\alpha} \right)$.

Λύση:

Γνωρίζουμε ότι

$$h(t) = \frac{\sin(2\pi f_c t)}{\pi t} = 2f_c \text{sinc}(2f_c t) \longleftrightarrow H(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{f_c}\right) = \begin{cases} 1, & |f| < f_c \\ 0, & |f| > f_c \end{cases}$$

και ότι

$$x(t) = e^{-2t}u(t) \longleftrightarrow X(f) = \frac{1}{2 + j2\pi f}$$

και άρα η απόκριση του φίλτρου στο πεδίο των συχνοτήτων είναι

$$Y(f) = X(f)H(f) = \begin{cases} \frac{1}{2 + j2\pi f}, & |f| < f_c \\ 0, & |f| > f_c \end{cases}$$

Η ενέργεια του σήματος εισόδου είναι

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_0^{\infty} e^{-4t} dt = -\frac{1}{4} e^{-4t} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{4}$$

Θέλουμε να ισχύει

$$E_y = \frac{1}{2} E_x \implies E_y = \frac{1}{8} \implies \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt = \frac{1}{8}$$

Όμως από θεώρημα του Parseval, έχουμε:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |Y(f)|^2 df &= \frac{1}{8} \iff \int_{-f_c}^{f_c} \left| \frac{1}{2 + j2\pi f} \right|^2 df = \frac{1}{8} \\ \int_{-f_c}^{f_c} \frac{1}{|2 + j2\pi f|^2} df &= \frac{1}{8} \\ 2 \int_0^{f_c} \frac{1}{4 + 4\pi^2 f^2} df &= \frac{1}{8} \\ \frac{2}{4\pi^2} \int_0^{f_c} \frac{1}{\frac{4}{4\pi^2} + f^2} df &= \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{f_c} \frac{1}{\left(\frac{1}{\pi}\right)^2 + f^2} df &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$\int_0^{f_c} \frac{1}{\left(\frac{1}{\pi}\right)^2 + f^2} df = \frac{\pi^2}{4}$$

$$\pi \tan^{-1}(\pi f_c) = \frac{\pi^2}{4}$$

$$\tan^{-1}(\pi f_c) = \frac{\pi}{4}$$

$$\pi f_c = \tan(\pi/4)$$

$$\pi f_c = 1$$

$$f_c = \frac{1}{\pi} \text{ Hz}$$

(30)

17. Μετασχηματισμός Fourier - Σταθερά + σήμα

Βρείτε το μετασχ. Fourier που φαίνεται στο παρακάτω Σχήμα 13.

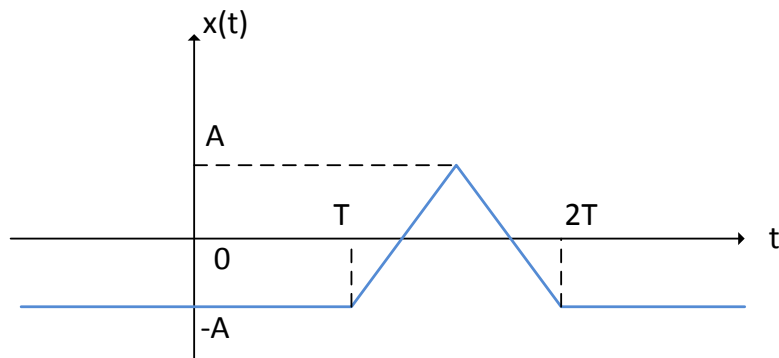
Λύση:

Το σήμα που ζητείται μοιάζει πολύ με το γνωστό μας τρίγωνο, δηλ. με το Σχήμα (14). αλλά μοιάζει να έχει “κατέβει” κατά μια σταθερά A . Με άλλα λόγια, του έχει προστεθεί η σταθερά $-A$. Προσέξτε, η σταθερά αυτή έχει προστεθεί σε ΟΛΟ το σήμα, ακόμα και στις μηδενικές τιμές δεξιά κι αριστερά του τριγώνου! Ξέρουμε ότι

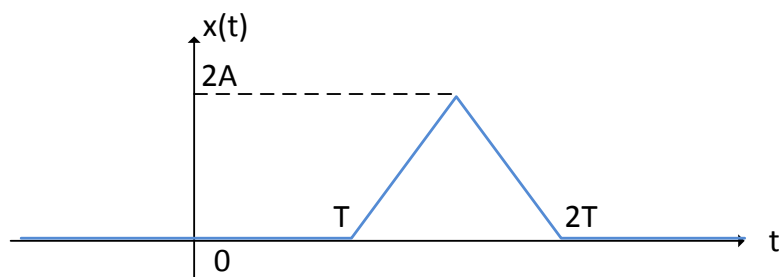
$$\text{Atri}\left(\frac{t}{T}\right) \longleftrightarrow \text{ATsinc}(fT)$$

Έτσι, με την ιδιότητα της μετατόπισης, θα είναι

$$2\text{Atri}\left(\frac{t - 3T/2}{T/2}\right) \longleftrightarrow X(f) = \text{ATsinc}\left(f\frac{T}{2}\right)e^{-j2\pi f3T/2} = \text{ATsinc}\left(\frac{fT}{2}\right)e^{-j3\pi fT}$$



Σχήμα 13: Σήμα Άσκησης 17



Σχήμα 14: Τριγωνικό Σήμα Άσκησης 17

Αφαιρώντας τη σταθερά A , θα έχουμε

$$x(t) = 2A \operatorname{tri}\left(\frac{t - 3T/2}{T/2}\right) - A \longleftrightarrow X(f) = AT \operatorname{sinc}\left(\frac{fT}{2}\right) e^{-j3\pi fT} - A\delta(f) \quad (31)$$

18. Μετασχηματισμός Fourier - Θεωρητικό V

Δείξτε ότι ο μετασχ. Fourier της εξόδου $y(t)$ ενός ΓΧΑ συστήματος με κρουστική απόκριση $h(t)$ και είσοδο $x(t)$ δίνεται από τη σχέση

$$Y(f) = |X(f)||H(f)|e^{j(\phi_x(f)+\phi_h(f))} \quad (32)$$

όπου $X(f), H(f)$ ο μετασχηματισμός Fourier της εισόδου και του συστήματος και $\phi_x(f), \phi_h(f)$ η φάση της εισόδου και του συστήματος, αντίστοιχα.

Λύση:

Η είσοδος $x(t)$ περιγράφεται στο χώρο της συχνότητας ως

$$X(f) = |X(f)|e^{j\phi_x(f)} \quad (33)$$

Το σύστημα $h(t)$ περιγράφεται στο χώρο της συχνότητας ως

$$H(f) = |H(f)|e^{j\phi_h(f)} \quad (34)$$

Η έξοδος του συστήματος $y(t)$ ισούται με τη συνέλιξη της εισόδου, $x(t)$, με το σύστημα, $h(t)$. Στο χώρο της συχνότητας, η συνέλιξη γίνεται γινόμενο, και άρα

$$Y(f) = X(f)H(f) = |X(f)|e^{j\phi_x(f)}|H(f)|e^{j\phi_h(f)} = |H(f)||X(f)|e^{j(\phi_x(f)+\phi_h(f))} \quad (35)$$

που είναι και το ζητούμενο. Παρατηρείστε ότι ένα σύστημα επιδρά **πολλαπλασιαστικά** στο φάσμα πλάτους της εισόδου, αλλά **αθροιστικά** στο φάσμα φάσης της εισόδου!!

19. Μετασχηματισμός Fourier - Σύστημα

Έστω το σύστημα

$$h(t) = 2e^{-5t}u(t)$$

Στην είσοδό του παρουσιάζεται το σήμα

$$x(t) = e^{-t}u(t) + e^{-3t}u(t)$$

Βρείτε την έξοδο του συστήματος $y(t)$.

Λύση:

Αυτό που θα μπορούσαμε να κάνουμε είναι να υπολογίσουμε τη συνέλιξη της εισόδου με το σύστημα, με τον κλασικό τρόπο του ολοκληρώματος. Όμως, αν μεταφερθούμε στο πεδίο της συχνότητας, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} y(t) = x(t) * h(t) &\longleftrightarrow Y(f) = X(f)H(f) = \left(\frac{1}{1+j2\pi f} + \frac{1}{3+j2\pi f} \right) \frac{2}{5+j2\pi f} \\ &= \frac{2}{(5+j2\pi f)(1+j2\pi f)} + \frac{2}{(5+j2\pi f)(3+j2\pi f)} \\ &= \frac{A}{1+j2\pi f} + \frac{B}{5+j2\pi f} + \frac{C}{5+j2\pi f} + \frac{D}{3+j2\pi f} \longleftrightarrow \\ y(t) &= Ae^{-t}u(t) + (B+C)e^{-5t}u(t) + Ce^{-3t}u(t) \end{aligned} \quad (36)$$

με

$$A = \frac{2}{(1+j2\pi f)(5+j2\pi f)}(1+j2\pi f) \Big|_{j2\pi f=-1} = \frac{2}{(5+j2\pi f)} \Big|_{j2\pi f=-1} = \frac{1}{2} \quad (37)$$

$$B = \frac{2}{(1+j2\pi f)(5+j2\pi f)}(5+j2\pi f) \Big|_{j2\pi f=-5} = \frac{2}{(1+j2\pi f)} \Big|_{j2\pi f=-5} = -\frac{1}{2} \quad (38)$$

$$C = \frac{2}{(5+j2\pi f)(3+j2\pi f)}(5+j2\pi f) \Big|_{j2\pi f=-5} = \frac{2}{(3+j2\pi f)} \Big|_{j2\pi f=-5} = -1 \quad (39)$$

$$D = \frac{2}{(5+j2\pi f)(3+j2\pi f)}(3+j2\pi f) \Big|_{j2\pi f=-3} = \frac{2}{(5+j2\pi f)} \Big|_{j2\pi f=-3} = 1 \quad (40)$$

και άρα

$$y(t) = \frac{1}{2}e^{-t}u(t) - \frac{3}{2}e^{-5t}u(t) + e^{-3t}u(t) \quad (41)$$

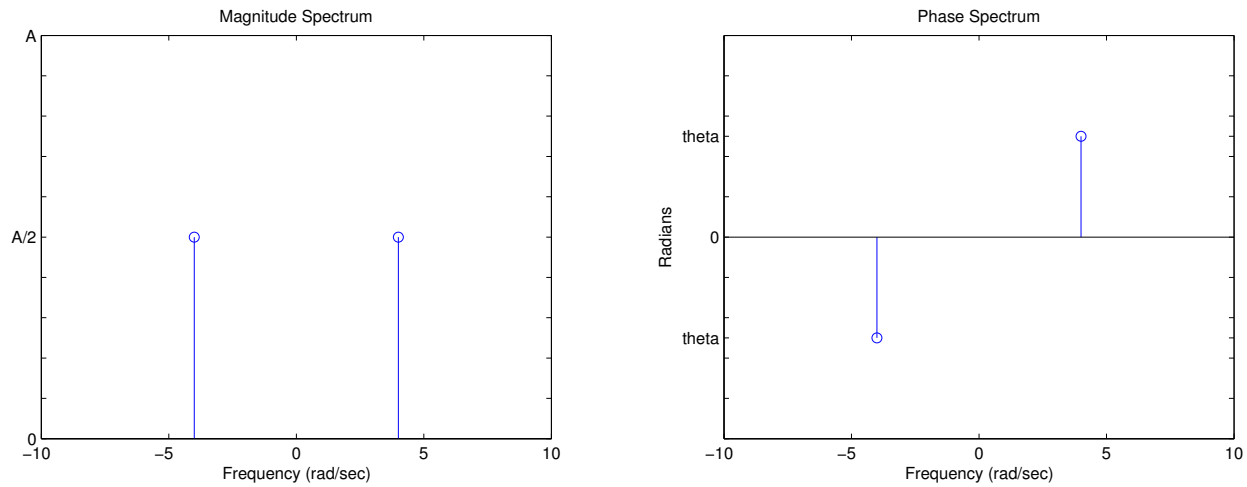
20. Μετασχηματισμός Fourier - Σύστημα

Σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και φάσης του σήματος $h(t) = e^{-4t}u(t)$ και θεωρήστε το ως σύστημα, στην είσοδο του οποίου εμφανίζεται το σήμα $x(t) = A \cos(4t + \theta)$. Βρείτε και σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και φάσης της εισόδου, του συστήματος, και της εξόδου. Τι παρατηρείτε; Τέλος, υπολογίστε την ενέργεια της εισόδου $x(t)$, του συστήματος $h(t)$, και της εξόδου $y(t)$.

Λύση:

Η είσοδος γράφεται

$$x(t) = A \cos(4t + \theta) = \frac{A}{2}e^{j4t}e^{j\theta} + \frac{A}{2}e^{-j4t}e^{-j\theta} \quad (42)$$

(α) Φάσμα Πλάτους Εισόδου $x(t)$ Άσκησης 20(β) Φάσμα Φάσης Εισόδου $x(t)$ Άσκησης 20

Σχήμα 15: Φάσματα Σήματος Εισόδου Άσκησης 20

Το φάσμα πλάτους και φάσης της εισόδου $x(t)$ φαίνεται στο σχήμα 15α' και 15β' αντίστοιχα. Θα είναι, ως γνωστόν

$$h(t) = e^{-4t}u(t) \longleftrightarrow H(f) = \frac{1}{4 + j2\pi f} \quad (43)$$

Άρα το πλάτος θα είναι

$$|H(f)| = \frac{1}{|4 + j2\pi f|} = \frac{1}{\sqrt{16 + (2\pi f)^2}} \quad (44)$$

ενώ για τη φάση θα έχουμε

$$H(f) = \frac{1}{4 + j2\pi f} = \frac{4 - j2\pi f}{|4 + j2\pi f|^2} = \frac{4}{16 + (2\pi f)^2} - j \frac{2\pi f}{16 + (2\pi f)^2} \quad (45)$$

Άρα το σύστημα γράφεται ως

$$H(f) = |H(f)|e^{j \tan^{-1} \frac{\Im\{H(f)\}}{\Re\{H(f)\}}} \quad (46)$$

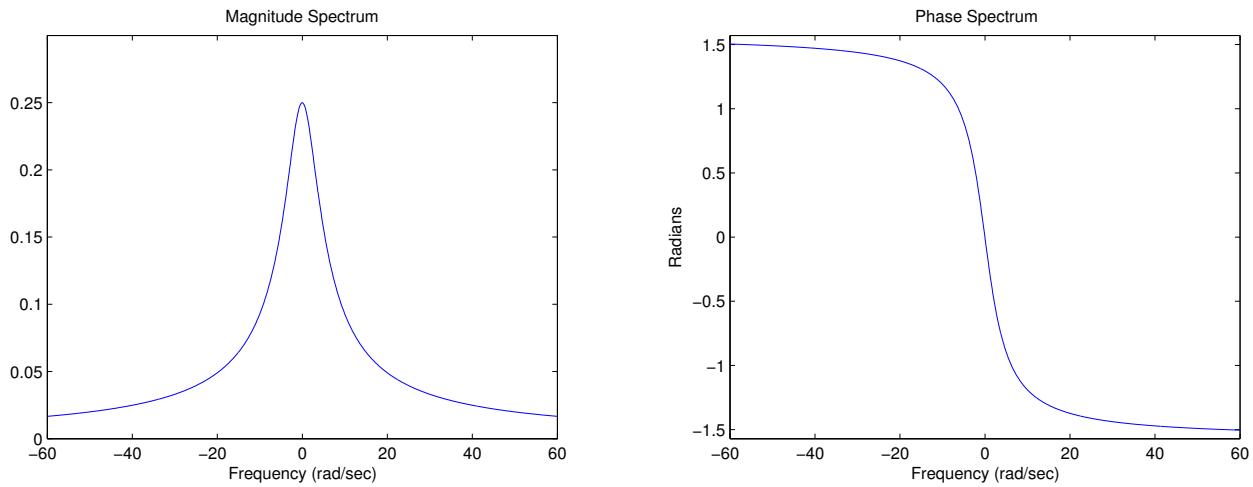
και άρα η φάση θα είναι

$$\phi(f) = \tan^{-1} \frac{\Im\{H(f)\}}{\Re\{H(f)\}} = \tan^{-1} \left(\frac{-\frac{2\pi f}{16 + (2\pi f)^2}}{\frac{4}{16 + (2\pi f)^2}} \right) = \tan^{-1} \left(-\frac{2\pi f}{4} \right) = -\tan^{-1} \frac{2\pi f}{4} \quad (47)$$

Το φάσμα πλάτους και φάσης του συστήματος φαίνεται στο σχήμα 16α' και 16β' αντίστοιχα. Η έξοδος θα είναι προφανώς η συνέλιξη της εισόδου, $x(t)$, με το σύστημα, $h(t)$. Όμως η είσοδος είναι της μορφής

$$x(t) = A \cos(4t + \theta) = \frac{A}{2} e^{j4t} e^{j\theta} + \frac{A}{2} e^{-j4t} e^{-j\theta} \quad (48)$$

Γνωρίζουμε ότι οι μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις αποτελούν ιδιοσυναρτήσεις του συστήματος, και έτσι, δεδομέ-

(α) Φάσμα Πλάτους Συστήματος $h(t)$ Άσκησης 19(β) Φάσμα Φάσης Συστήματος $h(t)$ Άσκησης 19

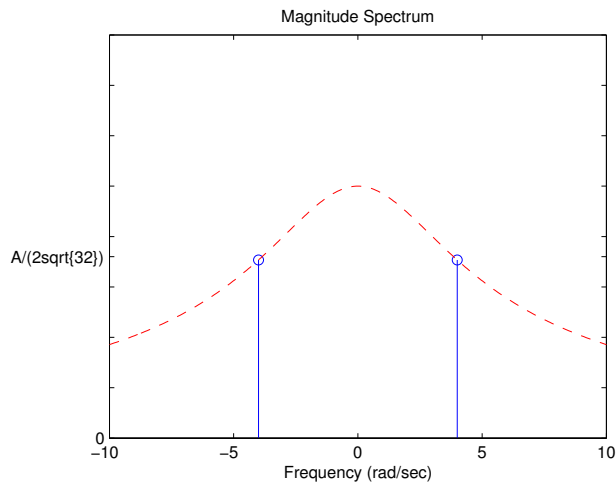
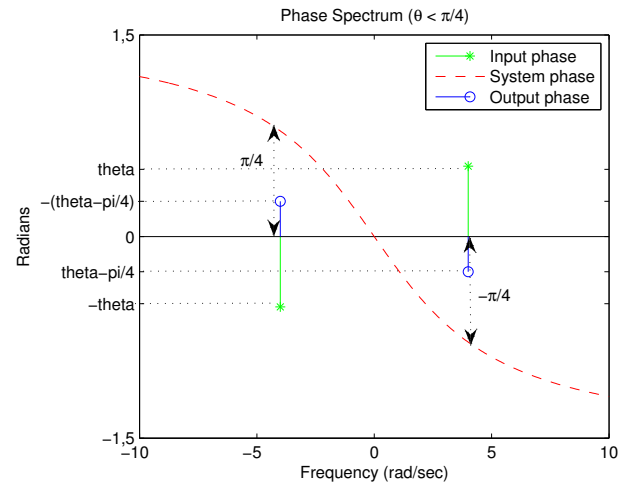
Σχήμα 16: Φάσματα Συστήματος Άσκησης 19

νου ότι το σύστημα είναι πραγματικό σήμα, η έξοδος $y(t)$ δίνεται από τη σχέση²:

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \frac{AH(4/2\pi)}{2} e^{j4t} e^{j\theta} + \frac{AH(-4/2\pi)}{2} e^{-j4t} e^{-j\theta} \\
 &= \frac{AH(4/2\pi)}{2} e^{j4t} e^{j\theta} + \frac{AH^*(4/2\pi)}{2} e^{-j4t} e^{-j\theta} \\
 &= \frac{A|H(4/2\pi)|e^{j\phi(4/2\pi)}}{2} e^{j4t} e^{j\theta} + \frac{A|H(4/2\pi)|e^{-j\phi(4/2\pi)}}{2} e^{-j4t} e^{-j\theta} \\
 &= \frac{A}{2} |H(4/2\pi)| e^{j(4t+\theta+\phi(4/2\pi))} + \frac{A}{2} |H(4/2\pi)| e^{-j(4t+\theta+\phi(4/2\pi))} \\
 &= \frac{A}{2} |H(4/2\pi)| 2 \cos(4t + \theta + \phi(4/2\pi)) \\
 &= \frac{A}{\sqrt{32}} \cos(4t + \theta - \frac{\pi}{4})
 \end{aligned} \tag{49}$$

Παρατηρούμε ότι η έξοδος είναι πάλι ημιτονοειδής μορφή, όπως η είσοδος, και έχει επηρεαστεί από το σύστημα τόσο στο πλάτος της (πλάτος εισόδου A , πλάτος εξόδου $A|H(4/2\pi)|$), όσο και στη φάση της (φάση εισόδου θ , φάση εξόδου $\theta + \phi(4/2\pi)$). Το φάσμα πλάτους και φάσης της εξόδου $y(t)$ φαίνεται στο σχήμα 17α' και 17β' αντίστοιχα. Με κόκκινη διακεκομμένη γραμμή φαίνεται το φάσμα πλάτους και φάσης του συστήματος, και πώς επηρέασε αυτό τις τιμές του φάσματος πλάτους και φάσης της εξόδου. Συγκρίνετε με τα αντίστοιχα της εισόδου.

²Αν και γνωρίζουμε πιο σύντομη σχέση για το αποτέλεσμα, ας το δούμε αναλυτικά.

(α') Φάσμα Πλάτους Εξόδου $x(t)$ Άσκησης 20(β') Φάσμα Φάσης Εξόδου $x(t)$ Άσκησης 20

Σχήμα 17: Φάσματα Σήματος Εξόδου Άσκησης 20