ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2016-17
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Λυμένες Ασκήσεις - Σειρές Fourier

1. **Έστω το σήμα**

$$\mathbf{x(t) = \sin^2(5\pi t)\cos(22\pi t)}$$

Βρείτε την περίοδο $\mathrm{T_0}$ του σήματος και υπολογίστε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^{\mathbf{T_0}} \mathbf{x^2(t)dt}$$

Λύση:
Για να βρούμε την περίοδο, θα πρέπει να γράψουμε το $x(t)$ ως άθροισμα ημιτόνων ή/και συνημιτόνων. Είναι:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \sin^2(5\pi t)\cos(22\pi t) = \Big(\frac{1}{2j}e^{j5\pi t} - \frac{1}{2j}e^{-j5\pi t}\Big)^2\Big(\frac{1}{2}e^{j22\pi t} + \frac{1}{2}e^{-j22\pi t}\Big) \\
&= \Big(\frac{1}{4j^2}e^{j10\pi t} - 2\frac{1}{2j}\frac{1}{2j}e^{j5\pi t}e^{-j5\pi t} + \frac{1}{4j^2}e^{-j10\pi t}\Big)\Big(\frac{1}{2}e^{j22\pi t} + \frac{1}{2}e^{-j22\pi t}\Big) \\
&= \Big(-\frac{1}{4}e^{j10\pi t} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{-j10\pi t}\Big)\Big(\frac{1}{2}e^{j22\pi t} + \frac{1}{2}e^{-j22\pi t}\Big) \\
&= -\frac{1}{8}e^{j32\pi t} - \frac{1}{8}e^{-j12\pi t} + \frac{1}{4}e^{j22\pi t} + \frac{1}{4}e^{-j22\pi t} - \frac{1}{8}e^{-j32\pi t} - \frac{1}{8}e^{j12\pi t} \\
&= -\frac{1}{4}\cos(12\pi t) + \frac{1}{2}\cos(22\pi t) - \frac{1}{4}\cos(32\pi t) \\
&= -\frac{1}{4}\cos(2\pi 6t) + \frac{1}{2}\cos(2\pi 11t) - \frac{1}{4}\cos(2\pi 16t) \\
&= \frac{1}{4}\cos(2\pi 6t + \pi) + \frac{1}{2}\cos(2\pi 11t) + \frac{1}{4}\cos(2\pi 16t + \pi) \qquad (1)
\end{aligned}$$

Ένας διαφορετικός τρόπος λύσης θα ήταν να χρησιμοποιήσουμε τις τριγωνομετρικές ταυτότητες:

$$\sin^2(\theta) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\theta)$$

και

$$\cos(\theta)\cos(\omega) = \frac{1}{2}\cos(\theta+\omega) + \frac{1}{2}\cos(\theta-\omega)$$

Τότε θα είναι:

$$\begin{aligned}
\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(10\pi t)\Big)\cos(22\pi t) &= \frac{1}{2}\cos(22\pi t) - \frac{1}{2}\cos(22\pi t)\cos(10\pi t) \\
&= \frac{1}{2}\cos(22\pi t) + \frac{1}{4}\cos(32\pi t + \pi) + \frac{1}{4}\cos(12\pi t + \pi)
\end{aligned}$$

Προφανώς, η θεμελιώδης συχνότητα θα είναι: $f_0 = \text{ΜΚΔ}(6, 11, 16) = 1$. Άρα $T_0 = \frac{1}{f_0} = 1$ sec.

Τώρα, το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι δύσκολο να υπολογιστεί κατευθείαν στο πεδίο του χρόνου. Όμως η σχέση του Parseval μας λέει ότι:

$$\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x^2(t)dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}|X_k|^2 = A_0^2 + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(A_k)^2}{2}$$

όπου X_k οι συντελεστές του εκθετικού αναπτύγματος και $A_k = 2|X_k|$ οι συντελεστές του τριγωνομετρικού αναπτύγματος. Επιλέξτε όποιο σας βολεύει.

Άρα θα είναι:

$$\int_0^{T_0} x^2(t)dt = T_0 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 = 4\Big| -\frac{1}{8}\Big|^2 + 2\Big| -\frac{1}{4}\Big|^2 = \frac{4}{64} + \frac{2}{16} = \frac{12}{64} = \frac{3}{16} \tag{2}$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε και με τον τύπο

$$T_0\Big(A_0^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(A_k)^2}{2}\Big) = 2\left(\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2}{2}\right) + \left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2}\right) = \frac{1}{16} + \frac{1}{8} = \frac{3}{16} \tag{3}$$

που είναι και το ζητούμενο.

2. **Αναπτύξτε σε Σειρά Fourier το περιοδικό, με περίοδο $\mathbf{T_0}$, σήμα:**

$$\mathbf{x(t)} = \begin{cases} 1, & 0 \le t < \frac{T_0}{2} \\ 2 - 2\frac{t}{T_0}, & \frac{T_0}{2} \le t < T_0 \end{cases}$$

Σας δίνεται ότι:

$$\int \mathbf{t e^{\alpha t} dt} = \frac{\mathbf{e^{\alpha t}}}{\alpha}(\mathbf{t} - \frac{\mathbf{1}}{\alpha})$$

Λύση:

Θα αναπτύξουμε το σήμα κατά την εκθετική σειρά Fourier. Γνωρίζουμε ότι:

$$X_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)dt \text{ και } X_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

Είναι χρήσιμο να θυμόμαστε ότι $f_0 T_0 = 1$, $e^{\pm j2\pi k} = 1$, και $e^{-j\pi k} = -1$. Θα είναι λοιπόν:

$$\begin{aligned}
X_0 &= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)dt = \frac{1}{T_0}\Big(\int_0^{\frac{T_0}{2}} 1dt + \int_{\frac{T_0}{2}}^{T_0}\Big(2 - \frac{2}{T_0}t\Big)dt\Big) \\
&= \frac{1}{T_0}t\Big|_0^{\frac{T_0}{2}} + \frac{1}{T_0}2t\Big|_{\frac{T_0}{2}}^{T_0} - \frac{1}{T_0}\int_{\frac{T_0}{2}}^{T_0} \frac{2}{T_0}tdt \\
&= \frac{1}{T_0}\Big(\frac{T_0}{2} - 0\Big) + \frac{2}{T_0}\Big(T_0 - \frac{T_0}{2}\Big) - \frac{1}{T_0}\int_{\frac{T_0}{2}}^{T_0} \frac{2}{T_0}tdt \\
&= \frac{1}{2} + 1 - \frac{2}{T_0^2}\Big(\frac{t^2}{2}\Big)\Big|_{\frac{T_0}{2}}^{T_0} \\
&= \frac{3}{2} - \frac{2}{T_0^2}\Big(\frac{T_0^2}{2} - \frac{T_0^2}{8}\Big) \\
&= \frac{3}{2} - 2\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\Big) = \frac{3}{2} - 2\frac{3}{8} \\
&= \frac{3}{2} - \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \Longleftrightarrow X_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)dt = \frac{3}{4}
\end{aligned} \tag{4}$$

Επίσης,

$$\begin{aligned}
X_k &= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\Big(\int_0^{T_0} 1e^{-jk\omega_0 t}dt + \int_0^{T_0}(2-\frac{2}{T_0}t)e^{-jk\omega_0 t}dt\Big) \\
&= \frac{1}{T_0}\frac{e^{-jk\omega_0 t}}{-jk\omega_0}\Big|_0^{\frac{T_0}{2}} + \frac{1}{T_0}\int_{\frac{T_0}{2}}^{T_0} 2e^{-jk\omega_0 t}dt - \frac{2}{T_0^2}\int_{\frac{T_0}{2}}^{T_0} te^{-jk\omega_0 t}dt \\
&= \frac{1}{-j2\pi k}(e^{-j\pi k}-1) + \frac{2}{T_0}\frac{e^{-jk\omega_0 t}}{-jk\omega_0}\Big|_{\frac{T_0}{2}}^{T_0} - \frac{2}{T_0^2}\Big(\frac{e^{-jk\omega_0 t}}{-jk\omega_0}\Big(t-\frac{1}{-jk\omega_0}\Big)\Big|_{\frac{T_0}{2}}^{T_0}\Big) \\
&= \frac{1}{-j2\pi k}(e^{-j\pi k}-1) + \frac{2}{T_0}\Big(\frac{e^{-j2\pi k}}{-jk\omega_0} - \frac{e^{-j\pi k}}{-jk\omega_0}\Big) - \frac{2}{T_0^2}\Big(\frac{e^{-j2\pi k}}{-jk\omega_0}\Big(T_0 - \frac{1}{-jk\omega_0}\Big) - \\
&- \frac{e^{-j\pi k}}{-jk\omega_0}\Big(\frac{T_0}{2} - \frac{1}{-jk\omega_0}\Big)\Big) \\
&= \frac{1}{-j2\pi k}(e^{-j\pi k}-1) + \frac{2}{-j2\pi k} - \frac{2e^{-j\pi k}}{-j2\pi k} - \frac{2}{-j2\pi k} - \frac{2}{T_0^2(-jk\omega_0)(jk\omega_0)} + \frac{e^{-j\pi k}}{-j2\pi k} + \\
&+ \frac{2e^{-j\pi k}}{T_0^2(-jk\omega_0)(jk\omega_0)} \\
&= \frac{1}{-j2\pi k}(e^{-j\pi k}-1) + \frac{2}{-j2\pi k} - \frac{2e^{-j\pi k}}{-j2\pi k} - \frac{2}{-j2\pi k} - \frac{1}{2\pi^2 k^2} + \frac{e^{-j\pi k}}{-j2\pi k} + \frac{e^{-j\pi k}}{2\pi^2 k^2} \\
&= -\frac{e^{-j\pi k}}{j2\pi k} + \frac{1}{j2\pi k} + 2\frac{e^{-j\pi k}}{j2\pi k} - \frac{1}{2\pi^2 k^2} - \frac{e^{-j\pi k}}{j2\pi k} + \frac{e^{-j\pi k}}{2\pi^2 k^2} \\
&= \frac{1}{j2\pi k} - \frac{1}{2\pi^2 k^2}(1-e^{-j\pi k}) \\
&= \frac{1}{2\pi k}e^{-j\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2\pi^2 k^2}(1-e^{-j\pi k}). \qquad (5)
\end{aligned}$$

Οπότε τελικά οι συντελεστές Fourier είναι οι:

$$X_0 = \frac{3}{4} \text{ και } X_k = \frac{1}{2\pi k}e^{-j\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2\pi^2 k^2}(1-e^{-j\pi k}).$$

Μπορούμε να γράψουμε τώρα ότι:

$$\begin{aligned}
x(t) &= X_0 + \sum_{k=-\infty,k\neq 0}^{+\infty} X_k e^{jk\omega_0 t} = \frac{3}{4} + \sum_{k=-\infty,k\neq 0}^{+\infty}\Big(\frac{1}{2\pi k}e^{-j\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2\pi^2 k^2}(1-e^{-j\pi k})\Big)e^{jk\omega_0 t} \\
&= \frac{3}{4} + \sum_{k=-\infty,k\neq 0}^{+\infty}\frac{1}{2\pi k}e^{-j\frac{\pi}{2}}e^{jk\omega_0 t} - \sum_{k=-\infty,k\neq 0}^{+\infty}\frac{1}{2\pi^2 k^2}(1-e^{-j\pi k})e^{jk\omega_0 t} \\
&= \frac{3}{4} + \sum_{k=-\infty,k\neq 0}^{+\infty}\frac{1}{2\pi k}e^{j(k\omega_0 t - \frac{\pi}{2})} - \sum_{k=-\infty,k\neq 0}^{+\infty}\frac{1}{2\pi^2 k^2}(1-e^{-j\pi k})e^{jk\omega_0 t}. \qquad (6)
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $(1-e^{-j\pi k}) = 1-(-1)^k$, άρα:

$$(1-e^{-j\pi k}) = \begin{cases} 2, & \text{k odd} \\ 0, & \text{k even} \end{cases}$$

Άρα θα είναι:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{3}{4} + \sum_{k=-\infty,k\neq 0}^{+\infty}\frac{1}{2\pi k}e^{j(k\omega_0 t - \frac{\pi}{2})} - \sum_{\text{k odd}}^{+\infty}\frac{1}{2\pi^2 k^2}2e^{jk\omega_0 t} \\
&= \frac{3}{4} + \sum_{k=-\infty,k\neq 0}^{+\infty}\frac{1}{2\pi k}e^{j(k\omega_0 t - \frac{\pi}{2})} - \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{2}{2\pi^2(2k-1)^2}e^{j(2k-1)\omega_0 t} \qquad (7)
\end{aligned}$$

Αν θέλουμε να προχωρήσουμε ακόμα λίγο και να αναπτύξουμε το σήμα μας σε μονόπλευρη σειρά Fourier, και με αντικατάσταση του $\omega_0 = 2\pi f_0$, τότε θα έχουμε:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{3}{4} + \sum_{k=-\infty, k\neq 0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi k} e^{j(k2\pi f_0 t - \frac{\pi}{2})} - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2}{2\pi^2(2k-1)^2} e^{j(2k-1)2\pi f_0 t} \\ &= \frac{3}{4} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{2\pi k} \cos(k2\pi f_0 t - \frac{\pi}{2}) - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{2\pi^2(2k-1)^2} \cos((2k-1)2\pi f_0 t) \\ &= \frac{3}{4} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\pi k} \sin(k2\pi f_0 t) - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi^2(2k-1)^2} \cos((2k-1)2\pi f_0 t) \end{aligned} \tag{8}$$

γιατί ξέρουμε ότι για τους συντελεστές του μονόπλευρου αναπτύγματος σε σειρά Fourier ισχύει ότι:

$$A_k = 2|X_k|$$

3. **Έστω ένα πραγματικό, περιττό και περιοδικό σήμα $\mathbf{x(t)}$, που αναπτύσσεται σε σειρά Fourier με συντελεστές $\mathbf{X_k}$. Δείξτε ότι**

$$\mathbf{X_k = -X_{-k}}$$

Λύση:
Το σήμα μας είναι περιττό, άρα θα ισχύει $x(t) = -x(-t)$. Είναι:

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} -x(-t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Θέτω $u = -t \Rightarrow du = -dt$. Επίσης, $u_1 = 0, u_2 = -T_0$.

Άρα θα είναι

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{-T_0} x(u) e^{jk\omega_0 u} du = -\frac{1}{T_0} \int_{-T_0}^{0} x(u) e^{-j2\pi(-k)f_0 u} du = -X_{-k} \tag{9}$$

που είναι και το ζητούμενο.

4. **Δίδονται τρια πραγματικά, περιοδικά σήματα με μικρό αριθμό αρμονικών. Οι μη μηδενικοί συντελεστές για $\mathbf{k > 0}$ δίδονται ακολούθως:**
α) $\mathbf{x_1(t) : T_0 = 1, X_1 = 5, X_3 = 2}$.
β) $\mathbf{x_2(t) : T_0 = 2, X_1 = j, X_2 = -j\frac{1}{2}, X_3 = j\frac{1}{4}, X_4 = -j\frac{1}{8}}$.
Βρείτε τα $\mathbf{x_i(t)}$.

Λύση:
Αφού τα σήματα είναι πραγματικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν συντελεστές X_k και για $k < 0$, και για αυτούς θα ισχύει ότι $X_{-k} = X_k^*$.
α) Είναι

$$\begin{aligned} x_1(t) &= X_{-3} e^{j2\pi(-3)\frac{1}{T_0}t} + X_{-1} e^{j2\pi(-1)\frac{1}{T_0}t} + X_1 e^{j2\pi(+1)\frac{1}{T_0}t} + X_3 e^{j2\pi(+3)\frac{1}{T_0}t} \\ &= X_3^* e^{-j2\pi 3\frac{1}{T_0}t} + X_1^* e^{-j2\pi\frac{1}{T_0}t} + X_1 e^{j2\pi\frac{1}{T_0}t} + X_3 e^{j2\pi 3\frac{1}{T_0}t} \\ &= 2e^{-j2\pi 3\frac{1}{T_0}t} + 5e^{-j2\pi\frac{1}{T_0}t} + 5e^{j2\pi\frac{1}{T_0}t} + 2e^{j2\pi 3\frac{1}{T_0}t} \\ &= 2e^{-j6\pi t} + 5e^{-j2\pi t} + 5e^{j2\pi t} + 2e^{j6\pi t} \\ &= 2(e^{-j6\pi t} + e^{j6\pi t}) + 5(e^{-j2\pi t} + e^{j2\pi t}) \\ &= 4\cos(6\pi t) + 10\cos(2\pi t). \end{aligned} \tag{10}$$

β) Είναι

$$\begin{aligned}
x_2(t) &= X_{-4}e^{j2\pi(-4)\frac{1}{T_0}t} + X_{-3}e^{j2\pi(-3)\frac{1}{T_0}t} + \cdots + X_3 e^{j2\pi(+3)\frac{1}{T_0}t} + X_4 e^{j2\pi(+4)\frac{1}{T_0}t} \\
&= X_4^* e^{-j2\pi 4\frac{1}{T_0}t} + X_3^* e^{-j2\pi 3\frac{1}{T_0}t} + \cdots + X_3 e^{j2\pi 3\frac{1}{T_0}t} + X_4 e^{j2\pi 4\frac{1}{T_0}t} \\
&= j\frac{1}{8}e^{-j2\pi 4\frac{1}{2}t} - j\frac{1}{4}e^{-j2\pi 3\frac{1}{2}t} + j\frac{1}{2}e^{-j2\pi 2\frac{1}{2}t} + \cdots - j\frac{1}{2}e^{j2\pi 2\frac{1}{2}t} + j\frac{1}{4}e^{j2\pi 3\frac{1}{2}t} - j\frac{1}{8}e^{j2\pi 4\frac{1}{2}t} \\
&= j\frac{1}{8}e^{-j4\pi t} - j\frac{1}{4}e^{-j3\pi t} + j\frac{1}{2}e^{-j2\pi t} - je^{-j\pi t} + je^{j\pi t} - j\frac{1}{2}e^{j2\pi t} + j\frac{1}{4}e^{j3\pi t} - j\frac{1}{8}e^{j4\pi t} \\
&= j\frac{1}{8}(e^{-j4\pi t} - e^{j4\pi t}) - j\frac{1}{4}(e^{-j3\pi t} - e^{j3\pi t}) + j\frac{1}{2}(e^{-j2\pi t} - e^{j2\pi t}) - j(e^{-j\pi t} - je^{j\pi t}) \\
&= -j\frac{1}{8}2j\sin(4\pi t) + j\frac{1}{4}2j\sin(3\pi t) - j\frac{1}{2}2j\sin(2\pi t) + j2j\sin(\pi t) \\
&= \frac{1}{4}\sin(4\pi t) - \frac{1}{2}\sin(3\pi t) + \sin(2\pi t) - 2\sin(\pi t) \qquad (11)
\end{aligned}$$

που είναι και τα ζητούμενα.

5. **Αναπτύξτε σε Σειρά Fourier το περιοδικό, με περίοδο $\mathbf{T_0}$, σήμα:**

$$\mathbf{x(t)} = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & 0 \le t < \frac{T_0}{2} \\ 0, & \frac{T_0}{2} \le t < T_0 \end{cases}$$

<u>Λύση:</u>
Θα αναπτύξουμε το σήμα κατά την εκθετική σειρά Fourier. Γνωρίζουμε ότι:

$$X_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)dt \text{ και}$$
$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

Θα είναι λοιπόν:

$$\begin{aligned}
X_0 &= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} e^{-\alpha t}dt \\
&= \frac{1}{T_0}\frac{1}{-\alpha}e^{-\alpha t}\Big|_0^{\frac{T_0}{2}} \\
&= \frac{1}{T_0}\frac{1}{-\alpha}(e^{-\alpha\frac{T_0}{2}} - 1) \\
\iff & X_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)dt = \frac{1}{\alpha T_0}(1 - e^{-\alpha\frac{T_0}{2}}) \qquad (12)
\end{aligned}$$

Επίσης,

$$\begin{aligned}
X_k &= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} e^{-\alpha t}e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} e^{-\alpha t - jk\omega_0 t}dt \\
&= \frac{1}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} e^{-(\alpha+jk\omega_0)t}dt = \frac{1}{T_0}\frac{1}{-(\alpha+jk\omega_0)}e^{-(\alpha+jk\omega_0)t}\Big|_0^{\frac{T_0}{2}} \\
&= \frac{1}{T_0}\frac{1}{-(\alpha+jk\omega_0)}\left(e^{-(\alpha+jk\omega_0)\frac{T_0}{2}} - 1\right) \\
&= -\frac{1}{T_0}\frac{1}{(\alpha+jk\omega_0)}\left(e^{-(\alpha\frac{T_0}{2}+j\pi k)} - 1\right) \\
&= -\frac{1}{T_0}\frac{1}{(\alpha+jk\omega_0)}(e^{-\alpha\frac{T_0}{2}}e^{-j\pi k} - 1) = \frac{1}{(\alpha T_0 + j2\pi k)}(1 - e^{-\alpha\frac{T_0}{2}}e^{-j\pi k}) \qquad (13)
\end{aligned}$$

Όμως ξέρουμε ότι: $e^{-j\pi k} = \cos \pi k - j \sin \pi k = (-1)^k$, γιατί για κάθε k ακέραιο, το $\cos \pi k$ είναι είτε 1 για άρτια k, είτε -1 για περιττά k, ενώ το $\sin \pi k$ είναι μηδέν για κάθε k.

Άρα μπορούμε να γράψουμε τελικά ότι:

$$X_k = \frac{1}{(\alpha T_0 + j2\pi k)}\Big(1 - (-1)^k e^{-\alpha \frac{T_0}{2}}\Big)$$

Οπότε τελικά οι συντελεστές Fourier είναι οι:

$$X_0 = \frac{1}{\alpha T_0}\Big(1 - e^{-\alpha \frac{T_0}{2}}\Big) \text{ και} \tag{14}$$

$$X_k = \frac{1}{(\alpha T_0 + j2\pi k)}\Big(1 - (-1)^k e^{-\alpha \frac{T_0}{2}}\Big) \tag{15}$$

Άρα το σήμα μας θα γράφεται ως:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\alpha T_0 + j2\pi k)}\Big(1 - (-1)^k e^{-\alpha \frac{T_0}{2}}\Big) e^{jk\omega_0 t} \tag{16}$$

που είναι και το ζητούμενο.

6. **Βρείτε την περίοδο του σήματος:**

$$\mathbf{x(t) = \sin^2(5\pi t + \phi_1) + \sin^2(2\pi t + \phi_2)}$$

Λύση:

Θα χρειαστεί να γράψουμε το σήμα μας ως άθροισμα απλών ημιτόνων ή/και συνημιτόνων, ώστε να μπορούμε να αποφανθούμε για την περιοδικότητά του. Είναι:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \sin^2(5\pi t + \phi_1) + \sin^2(2\pi t + \phi_2) \\
&= \Big(\frac{1}{2j}e^{j5\pi t}e^{j\phi_1} - \frac{1}{2j}e^{-j5\pi t}e^{-j\phi_1}\Big)^2 + \Big(\frac{1}{2j}e^{j2\pi t}e^{j\phi_2} - \frac{1}{2j}e^{-j2\pi t}e^{-j\phi_2}\Big)^2 \\
&= -\frac{1}{4}e^{j10\pi t}e^{j2\phi_1} - 2\frac{1}{2j}\frac{1}{2j} - \frac{1}{4}e^{-j10\pi t}e^{-j2\phi_1} - \frac{1}{4}e^{j4\pi t}e^{j2\phi_2} - 2\frac{1}{2j}\frac{1}{2j} - \frac{1}{4}e^{-j4\pi t}e^{-j2\phi_2} \\
&= -\frac{1}{4}(e^{j10\pi t}e^{j2\phi_1} + e^{-j10\pi t}e^{-j2\phi_1}) - \frac{1}{4}(e^{j4\pi t}e^{j2\phi_2} + e^{-j4\pi t}e^{-j2\phi_2}) + 1 \\
&= 1 - \frac{1}{4}2\cos(10\pi t + 2\phi_1) - \frac{1}{4}2\cos(4\pi t + 2\phi_2) \\
&= 1 - \frac{1}{2}\cos(10\pi t + 2\phi_1) - \frac{1}{2}\cos(4\pi t + 2\phi_2) \\
&= 1 - \frac{1}{2}\cos(2\pi 5t + 2\phi_1) - \frac{1}{2}\cos(2\pi 2t + 2\phi_2)
\end{aligned} \tag{17}$$

Άρα η θεμελιώδης συχνότητα του σήματος θα είναι $f_0 = \text{ΜΚΔ}\{5, 2\} = 1$. Άρα $T_0 = \frac{1}{f_0} = 1$ sec. Αλλιώς, θα μπορούσαμε να πούμε ότι $T_0 = \text{ΕΚΠ}\{\frac{1}{5}, \frac{1}{2}\}$ =ΕΚΠ$\{0.2, 0.5\} = 1$ sec.

Σημείωση:

(α') Αν μας ζητούσε να *δείξουμε* ότι το σήμα είναι περιοδικό, και μετά να υπολογίσουμε την περίοδό του, τότε θα έπρεπε (για να είμαστε απόλυτα σωστοί) να πούμε ότι:
$\frac{T1}{T2} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}$, που είναι λόγος ακεραίων αριθμών, άρα το σήμα είναι περιοδικό. Έπειτα, θα υπολογίζαμε την περίοδο με όποιον τρόπο θέλαμε.
Ένα καλό αντιπαράδειγμα σχετικά με αυτή τη σημείωση, θα ήταν το

$$x(t) = 2 + \cos(10\pi t + \phi_1) - \frac{1}{2}\cos(4t - \phi_2)$$

Τότε, θα ήταν $\frac{T1}{T2} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{\pi}} = \frac{\pi}{10}$, το οποίο προφανώς ΔΕΝ είναι λόγος ακεραίων αριθμών, άρα το σήμα ΔΕΝ είναι περιοδικό.

(β') Εννοείται πως με τη διαδικασία που ακολουθήσαμε για να λύσουμε την άσκηση, μπορούμε αμέσως (έστω, με ελάχιστες πράξεις ακόμα :)) να απαντήσουμε σε ερωτήματα σχεδίασης φάσματος πλάτους και φάσης, όπως και ερωτήματα σχετικά με θεώρ. Parseval, κατανομής ενέργειας κλπ. Ό,τι χρειαζόμαστε για να απαντήσουμε σε αυτά υπάρχει έτοιμο στη λύση παραπάνω!

7. **Ένα περιοδικό σήμα $\mathbf{x(t) = A\cos(\omega_0 t)}$ με περίοδο 5 sec θέλουμε να καθυστερήσει κατά 0.05 sec. Πόση θα είναι η φάση μετατόπισής του;**

Λύση:
Έστω $t_0 = 0.05sec$. Το καθυστερημένο κατά t_0 σήμα εκφράζεται ως:

$$x(t-t_0) = A\cos(\omega_0(t-t_0)) = A\cos(\omega_0 t - \omega_0 t_0) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$$

Άρα

$$\phi = -\omega_0 t_0 = -2\pi \frac{1}{T_0} t_0 = -2\pi \frac{1}{5} 0.05 = -0.02\pi \tag{18}$$

Προφανώς, αν θέλαμε να προηγείται κατά $t_0 = 0.05sec$, θα είχαμε $\phi = 0.02\pi$, με παρόμοιο συλλογισμό με παραπάνω (θα ζητούσαμε τότε το $x(t+t_0)$).

8. **Έστω το σήμα**

$$\mathbf{x(t) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k \cos(2(k+1)\pi t + \phi_k)}$$

Βρείτε την περίοδό του.

Λύση:
Βλέπουμε ότι για $k = 1, k = 2, k = 3 \cdots$, παίρνουμε αντίστοιχα συχνότητες $f_1 = 2, f_2 = 3, f_3 = 4 \cdots$. Προφανώς, όλες αυτές οι συχνότητες είναι πολλαπλάσια μιας θεμελιώδους, της $f_0 = 1$. Άρα η περίοδος είναι $T_0 = \frac{1}{f_0} = 1$. Προσέξτε, το γεγονός ότι δεν υπάρχει συνημίτονο με τέτοια συχνότητα στην παραπάνω αναπαράσταση, δε σημαίνει κάτι για την περίοδο του σήματος.

9. **Αναπτύξτε σε σειρά Fourier το περιοδικό σήμα**

$$\mathbf{x(t) = \sin(\pi f_0 t)} \tag{19}$$

το οποίο έχει περίοδο $\mathbf{T_0}$.

Λύση:
Είναι

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \sin\left(\frac{\pi}{T_0}\right)dt \\ &= -\frac{1}{T_0}\frac{T_0}{\pi}\int_0^{T_0}\left(\cos\left(\frac{\pi t}{T_0}\right)\right)' dt = -\frac{1}{\pi}\cos\left(\frac{\pi t}{T_0}\right)\Big|_0^{T_0} \\ &= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} = \frac{2}{\pi}. \end{aligned} \tag{20}$$

Επίσης

$$
\begin{aligned}
X_k &= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}\sin\left(\frac{\pi t}{T_0}\right)e^{-jk\omega_0 t}dt \\
&= -\frac{1}{T_0}\frac{T_0}{\pi}\int_0^{T_0}\left(\cos\left(\frac{\pi t}{T_0}\right)\right)' e^{-j2\pi k f_0 t}dt \\
&= -\frac{1}{\pi}\cos\left(\frac{\pi t}{T_0}\right)e^{-jk\omega_0 t}\Big|_0^{T_0} + \frac{1}{\pi}\int_0^{T_0}\cos\left(\frac{\pi t}{T_0}\right)\left(e^{-jk\omega_0 t}\right)' dt \\
&= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi}(-jk\omega_0)\int_0^{T_0}\cos\left(\frac{\pi t}{T_0}\right)e^{-jk\omega_0 t}dt \\
&= \frac{2}{\pi} - \frac{2jk}{T_0}\int_0^{T_0}\cos\left(\frac{\pi t}{T_0}\right)e^{-jk\omega_0 t}dt \\
&= \frac{2}{\pi} - \frac{2jk}{T_0}\int_0^{T_0}\frac{T_0}{\pi}\left(\sin\left(\frac{\pi t}{T_0}\right)\right)' e^{-kk\omega_0 t}dt \\
&= \frac{2}{\pi} - \frac{2jk}{\pi}\sin\left(\frac{\pi t}{T_0}\right)e^{-jk\omega_0 t}\Big|_0^{T_0} + \frac{2jk}{T_0}\frac{T_0}{\pi}\left(-\frac{2j\pi k}{T_0}\right)\int_0^{T_0}\sin\left(\frac{\pi t}{T_0}\right)e^{-jk\omega_0 t}dt \\
&= \frac{2}{\pi} + \frac{4k^2}{T_0}\int_0^{T_0}\sin\left(\frac{\pi t}{T_0}\right)e^{-jk\omega_0 t}dt \\
&= \frac{2}{\pi} + 4k^2\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}\sin\left(\frac{\pi t}{T_0}\right)e^{-jk\omega_0 t}dt \\
&= \frac{2}{\pi} + 4k^2 X_k \Longleftrightarrow \\
X_k - 4k^2 X_k &= \frac{2}{\pi} \\
X_k(1-4k^2) &= \frac{2}{\pi} \\
X_k &= \frac{2}{\pi(1-4k^2)} \qquad (21)
\end{aligned}
$$

Άρα θα είναι, γράφοντας την κυκλική συχνότητα $\omega_0 = 2\pi f_0$,

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \frac{2}{\pi} + \sum_{k=\infty, k\neq 0}^{\infty}\frac{2}{\pi(1-4k^2)}e^{jk2\pi f_0 t} \\
&= \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(1-4k^2)}\cos(2\pi k f_0 t) \\
&= \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(1-4k^2)}\cos(2\pi k f_0 t) \qquad (22)
\end{aligned}
$$

10. **Δείξτε ότι για πραγματικά σήματα ισχύει:**

- **Άρτιο σήμα Χ Άρτιο σήμα = Άρτιο σήμα**
- **Περιττό σήμα Χ Περιττό σήμα = Άρτιο σήμα**
- **Άρτιο σήμα Χ Περιττό σήμα = Περιττό σήμα**

<u>Λύση:</u>

- $$\left.\begin{array}{r} \text{Αν } x(t) \text{ άρτιο } \Leftrightarrow x(t)=x(-t) \\ \text{Αν } y(t) \text{ άρτιο } \Leftrightarrow y(t)=y(-t) \end{array}\right\} \Longrightarrow x(t)y(t)=x(-t)y(-t) \Longrightarrow z(t)=z(-t) \tag{23}$$

  που δηλώνει ότι το $z(t)$ είναι άρτιο.

- $$\left.\begin{array}{r} \text{Αν } x(t) \text{ περιττό } \Leftrightarrow x(t)=-x(-t) \\ \text{Αν } y(t) \text{ περιττό } \Leftrightarrow y(t)=-y(-t) \end{array}\right\} \Longrightarrow x(t)y(t)=x(-t)y(-t) \Longrightarrow z(t)=z(-t) \tag{24}$$

  που δηλώνει ότι το $z(t)$ είναι άρτιο.

- $$\left.\begin{array}{r} \text{Αν } x(t) \text{ άρτιο } \Leftrightarrow x(t)=x(-t) \\ \text{Αν } y(t) \text{ περιττό } \Leftrightarrow y(t)=-y(-t) \end{array}\right\} \Longrightarrow x(t)y(t)=-x(-t)y(-t) \Longrightarrow z(t)=-z(-t) \tag{25}$$

  που δηλώνει ότι το $z(t)$ είναι περιττό.

11. **Υπολογίστε το ολοκλήρωμα**

$$\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{2}\pi} \sin^{\mathbf{10}}(\mathbf{t})\mathbf{dt}$$

χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Parseval.

Λύση:
Το θεώρημα του Parseval συνοψίζεται στην εξίσωση

$$\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x^2(t)dt = X_0^2 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X_k|^2$$

η οποία περιλαμβάνει και τη μονόπλευρη και τη δίπλευρη (εκθετική) αναπαράσταση της σειράς Fourier. Αναλύουμε το σήμα σε σειρά Fourier:

$$x(t) = \sin^5(t) = \left(\frac{e^{jt}-e^{-jt}}{2j}\right)^5 = \frac{(e^{jt}-e^{-jt})^5}{32j} \tag{26}$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Newton,

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \cdots + nab^{n-1} + b^n \tag{27}$$

η σχέση (26) γράφεται:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{32j}(e^{j5t} - 5e^{j4t}e^{-jt} + 10e^{j3t}e^{-j2t} - 10e^{j2t}e^{-j3t} + 5e^{jt}e^{-j4t} - e^{-j5t}) \\ &= \frac{1}{32j}(e^{j5t} - e^{-j5t} - 5e^{j3t} + 5e^{-j3t} + 10e^{jt} - 10e^{-jt}) \end{aligned}$$

Οπότε σύμφωνα με τα παραπάνω

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sin^5(t)\right)^2 dt = \frac{126}{512} \Rightarrow \int_0^{2\pi}\left(\sin^5(t)\right)^2 dt = 2\pi\frac{126}{512} \tag{28}$$

που είναι και το ζητούμενο.

12. **Η εκθετική σειρά Fourier ενός περιοδικού σήματος δίδεται ως:**

$$\mathbf{x(t) = (2+j2)e^{-j3t} + j2e^{-jt} + 3 - j2e^{jt} + (2-j2)e^{j3t}}.$$

Να βρεθεί:

(α΄) **Αν το σήμα είναι πραγματικό, φανταστικό, ή μιγαδικό.**

(β΄) **Το φάσμα πλάτους και φάσης του σήματος.**

(γ΄) **Το μονόπλευρο ή τριγωνομετρικό ανάπτυγμα σε σειρά Fourier.**

(δ΄) **Το ολοκλήρωμα** $\int_0^{\mathbf{T_0}} \mathbf{x^2(t)dt}$.

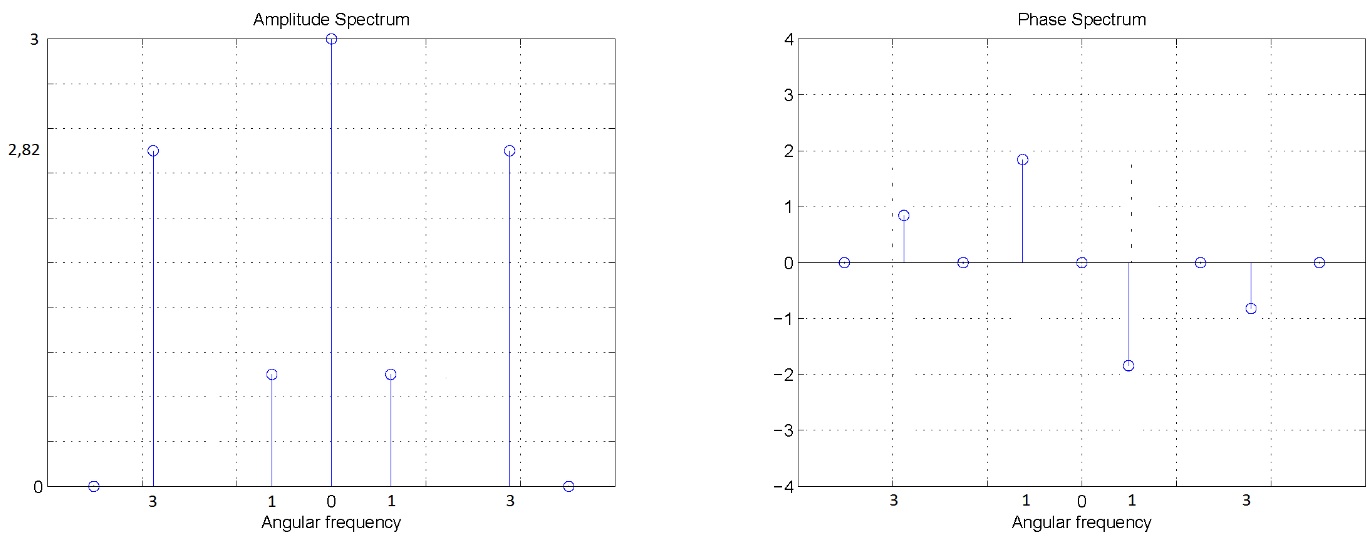
Λύση:

(α΄) Παρατηρούμε ότι οι αντίστοιχοι συντελεστές των εκθετικών είναι συζυγείς μεταξύ τους, δηλ. ισχύει $X_k = X^*_{-k}$. Αυτή η ιδιότητα ισχύει μόνο για πραγματικά σήματα, άρα το σήμα μας είναι πραγματικό.

(β΄) Για να βρούμε εύκολα το φάσμα πλάτους και φάσης, αρκεί να μετατρέψουμε τους συντελεστές X_k σε μορφή μέτρο-φάση, δηλ. $X_k = |X_k|e^{j\phi_k}$. Είναι

$$\begin{aligned}
2+j2 &= \sqrt{2^2+2^2}e^{j\tan^{-1}\frac{2}{2}} = \sqrt{8}e^{j\tan^{-1}(1)} = \sqrt{8}e^{j\frac{\pi}{4}} \\
j2 &= 2e^{j\frac{\pi}{2}} \\
2-j2 &= (\sqrt{8}e^{j\frac{\pi}{4}})^* = \sqrt{8}e^{-j\frac{\pi}{4}} \\
-j2 &= 2e^{-j\frac{\pi}{2}}
\end{aligned}$$

Το φάσμα πλάτους φαίνεται στο σχήμα 1α΄ και το φάσμα φάσης στο σχήμα 1β΄, συναρτήσει της γωνιακής συχνότητας $\omega = 2\pi f$. Σχεδιάστε εσείς τα αντίστοιχα για τη συχνότητα f σε Hz!



(α΄) Φάσμα πλάτους

(β΄) Φάσμα φάσης

Σχήμα 1: Φάσμα πλάτους και φάσης Άσκησης 14

(γ΄) Το μονόπλευρο (ή τριγωνομετρικό) ανάπτυγμα δίνεται εύκολα ως

$$\begin{aligned}
x(t) &= (2+j2)e^{-j3t} + j2e^{-jt} + 3 - j2e^{jt} + (2-j2)e^{j3t} \\
&= \sqrt{8}e^{j\frac{\pi}{4}}e^{-j3t} + 2e^{j\frac{\pi}{2}}e^{-jt} + 3 + 2e^{-j\frac{\pi}{2}}e^{jt} + \sqrt{8}e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{j3t} \\
&= 3 + 2\sqrt{8}\cos\left(3t - \frac{\pi}{4}\right) + 4\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

(δ΄) Το ολοκλήρωμα θα υπολογιστεί από τη σχέση του Parseval:

$$\begin{aligned}
\int_0^{T_0} x^2(t)dt &= T_0 \sum_{k=-3}^{3} |X_k|^2 = 2\pi\Big(3^2 + (\sqrt{8})^2 + (\sqrt{8})^2 + 2^2 + 2^2\Big) \\
&= 2\pi 33 = 66\pi
\end{aligned}$$

13. **Δίνεται το παρακάτω περιοδικό σήμα** $\mathbf{x(t)}$:

$$\mathbf{x(t) = 2\cos\left(2\pi 200t + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(2\pi 500t - \frac{\pi}{8}\right) - \sin\left(2\pi 600t + \frac{2\pi}{5}\right)}$$

(α΄) **Βρείτε την περίοδο,** $\mathbf{T_0}$, **του σήματος και σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και φάσης.**

(β΄) **Υπολογίστε το** $\mathbf{y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau}$

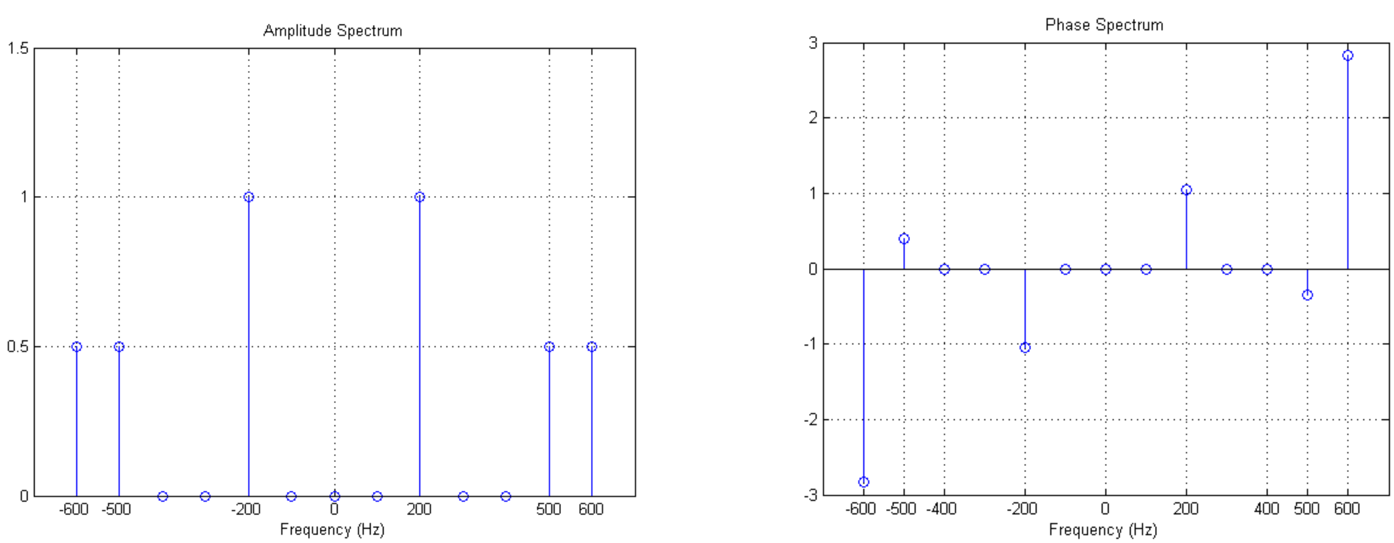
(γ΄) **Υπολογίστε την ισχύ του σήματος** $\mathbf{y(t)}$

Λύση:

(α΄) Το σήμα έχει συχνότητες $200, 500, 600 Hz$, άρα θεμελιώδη συχνότητα $f_0 = \text{ΜΚΔ}\{200, 500, 600\} = 100Hz$. Οπότε η περίοδος θα είναι $T_0 = 1/100 = 0.01$ sec. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις του Euler, το σήμα γράφεται ως:

$$\begin{aligned}
x(t) &= e^{j2\pi 200t}e^{j\pi/3} + e^{-j2\pi 200t}e^{-j\pi/3} + \frac{1}{2}e^{j2\pi 500t}e^{-j\pi/8} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi 500t}e^{j\pi/8} - \\
&- \frac{1}{2j}e^{j2\pi 600t}e^{j2\pi/5} + \frac{1}{2j}e^{-j2\pi 600t}e^{-j2\pi/5} \\
&= e^{j2\pi 200t}e^{j\pi/3} + e^{-j2\pi 200t}e^{-j\pi/3} + \frac{1}{2}e^{j2\pi 500t}e^{-j\pi/8} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi 500t}e^{j\pi/8} + \\
&+ \frac{1}{2}e^{j\pi/2}e^{j2\pi 600t}e^{j2\pi/5} + \frac{1}{2}e^{-j\pi/2}e^{-j2\pi 600t}e^{-j2\pi/5} \\
&= e^{j2\pi 200t}e^{j\pi/3} + e^{-j2\pi 200t}e^{-j\pi/3} + \frac{1}{2}e^{j2\pi 500t}e^{-j\pi/8} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi 500t}e^{j\pi/8} + \\
&+ \frac{1}{2}e^{j2\pi 600t}e^{j9\pi/10} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi 600t}e^{-j9\pi/10}
\end{aligned}$$

Το φάσμα πλάτους και φάσης φαίνεται στο σχήμα 2.



(α΄) Φάσμα πλάτους

(β΄) Φάσμα φάσης

Σχήμα 2: Φάσμα πλάτους και φάσης Άσκησης 13

(β΄) Γνωρίζουμε ότι

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \leftrightarrow Y_k = \frac{X_k}{j2\pi k f_0}$$

και άρα θα έχουμε

$$\begin{aligned}
y(t) &= \frac{1}{j2\pi 200}e^{j2\pi 200t}e^{j\pi/3} + \frac{1}{(-j2\pi 200)}e^{-j2\pi 200t}e^{-j\pi/3} + \frac{1}{2}\frac{1}{j2\pi 500}e^{j2\pi 500t}e^{-j\pi/8} \\
&+ \frac{1}{2}\frac{1}{(-j2\pi 500)}e^{-j2\pi 500t}e^{j\pi/8} + \frac{1}{2}\frac{1}{j2\pi 600}e^{j2\pi 600t}e^{j9\pi/10} + \frac{1}{2}\frac{1}{(-j2\pi 600)}e^{-j2\pi 600t}e^{-j9\pi/10} \\
&= \frac{1}{2\pi 200}e^{j2\pi 200t}e^{j\pi/3}e^{j\pi/2} + \frac{1}{2\pi 200}e^{-j2\pi 200t}e^{-j\pi/3}e^{-j\pi/2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi 500}e^{j2\pi 500t}e^{-j\pi/8}e^{j\pi/2} \\
&+ \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi 500}e^{-j2\pi 500t}e^{j\pi/8}e^{-j\pi/2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi 600}e^{j2\pi 600t}e^{j9\pi/10}e^{-j\pi/2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi 600}e^{-j2\pi 600t}e^{-j9\pi/10}e^{j\pi/2} \\
&= \frac{1}{2\pi 200}e^{j2\pi 200t}e^{j5\pi/6} + \frac{1}{2\pi 200}e^{-j2\pi 200t}e^{-j5\pi/6} + \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi 500}e^{j2\pi 500t}e^{j3\pi/8} \\
&+ \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi 500}e^{-j2\pi 500t}e^{-j3\pi/8} + \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi 600}e^{j2\pi 600t}e^{j4\pi/10} + \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi 600}e^{-j2\pi 600t}e^{-j4\pi/10} \\
&= \frac{1}{200\pi}\cos(2\pi 200t + 5\pi/6) + \frac{1}{2\pi 500}\cos(2\pi 500t + 3\pi/8) + \frac{1}{2\pi 600}\cos(2\pi 600t + 4\pi/10)
\end{aligned}$$

(γ΄) Η συνολική ισχύς είναι το άθροισμα των επιμέρους ισχύων των ημιτόνων, αφού αυτά έχουν διαφορετικές μεταξύ τους συχνότητες, άρα

$$P_y = \sum_{k=1}^{3}\frac{P_k^2}{2} = \frac{(\frac{1}{200\pi})^2 + (\frac{1}{1000\pi})^2 + (\frac{1}{1200\pi})^2}{2}$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα θα καταλήγαμε αν αθροίζαμε τα τετράγωνα των μέτρων των εκθετικών συντελεστών Fourier, $\sum |Y_k|^2$, όπως υποδεικνύει το θεώρημα του Parseval για την εκθετική σειρά Fourier.

14. **Έστω το περιοδικό σήμα $\mathrm{x(t)}$ που ορίζεται σε μια περίοδο $-\mathbf{T_0/2 \leq t \leq T_0/2}$ ως:**

$$\mathbf{x(t)} = \begin{cases} 1, & |t| \leq t_c \\ 0, & t_c < |t| \leq T_0/2 \end{cases}$$

με $\mathrm{tc} < \mathbf{T_0/2}$. Αναπτύξτε το σε σειρά Fourier, για $\mathbf{t_c = T_0/4}$ και $\mathbf{t_c = T_0/10}$.

Λύση:
Θα αναπτύξουμε το περιοδικό σήμα σε σειρά Fourier χωρίς αντικατάσταση της t_c, η οποία θα γίνει στο τέλος. Είναι:

$$X_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)dt = \frac{1}{T_0}\int_{-t_c}^{t_c} 1dt = \frac{1}{T_0}t\Big|_{-t_c}^{t_c} = \frac{1}{T_0}(t_c + t_c) = \frac{2t_c}{T_0}$$

και

$$\begin{aligned}
X_k &= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt \\
&= \frac{1}{T_0}\int_{-t_c}^{t_c} e^{-j2\pi k f_0 t}dt \\
&= \frac{1}{T_0}\frac{1}{-j2\pi k f_0}e^{-j2\pi k f_0 t}\Big|_{-t_c}^{t_c} \\
&= -\frac{1}{j2\pi k}\left(e^{-j2\pi k f_0 t_c} - e^{j2\pi k f_0 t_c}\right) \\
&= \frac{1}{j2\pi k}2j\sin(2\pi k f_0 t_c) \\
&= \frac{\sin(2\pi k f_0 t_c)}{\pi k}
\end{aligned}$$

- Για $t_c = \frac{T_0}{4}$, έχουμε

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{2T_0/4}{T_0} = \frac{1}{2} \\ X_k &= \frac{\sin(2\pi k f_0 T_0/4)}{\pi k} = \frac{\sin(\pi k/2)}{\pi k} \end{aligned}$$

- Για $t_c = \frac{T_0}{10}$, έχουμε

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{2T_0/10}{T_0} = \frac{1}{5} \\ X_k &= \frac{\sin(2\pi k f_0 T_0/10)}{\pi k} = \frac{\sin(\pi k/5)}{\pi k} \end{aligned}$$