

# Σειρές Fourier

## 1 Εισαγωγικά

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα γνωρίσουμε μια άλλη θεώρηση ενός σήματος, που έχει περισσότερη σχέση με εφαρμογές (ω ναι, όλα αυτά τα μαθηματικά δουλεύουν στην πράξη, στο MP3 σας, στο κινητό σας, στην τηλεόραση σας, στα video games σας, κλπ. - θα βαρεθείτε να το ακούτε αυτό :-) ). Αυτή η οπτική λέγεται ανάλυση Fourier. Στα πλαίσια του μαθήματος, θα ασχοληθούμε αρκετά με αυτή. Ας ξεκινήσουμε πρώτα με τη μελέτη των λεγόμενων Σειρών Fourier.

### 1.1 Γιατί Σειρές Fourier;

Σίγουρα ως τώρα έχετε καταλάβει ότι εμπλεκόμαστε πολύ με μαθηματικά. Ένα ερώτημα όμως που ΔΕΝ απαντήσαμε είναι ΓΙΑΤΙ χρησιμοποιούμε “βαριά” (λέμε τώρα :-P ) μαθηματικά για να φτάσουμε σε όλες αυτές τις εφαρμογές. Αφ’ ενός, γιατί δεν έχουμε βρει κανένα πιο εύκολο τρόπο (δεν έχουμε καμιά εμμονή να ασχολούμαστε με μαθηματικά σώνει και καλά :-) ), αφ’ ετέρου γιατί η χρήση τους παρέχει ένα πανίσχυρο πλαίσιο ανάλυσης και “τυποποίησης” των μεθόδων που χρησιμοποιούνται. Δεν πειστήκατε; Θα σας δώσουμε ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα. :-)

Μόλις λίγες σελίδες μετά, θα διαβάσετε για την *ανάληψη σε Σειρές Fourier*, που - αν δεν το έχετε ακουστά - είναι απλά μια μέθοδος αλλαγής οπτικής γωνίας :-) . Ναι, τόσο απλά! Η μέθοδος αυτή μας επιτρέπει να δούμε ένα σήμα, μια κυματομορφή, σε έναν διαφορετικό χώρο, το χώρο των *συχνοτήτων*. Το πώς, θα το διαβάσετε παρακάτω. Το ΓΙΑΤΙ όμως είναι το ερώτημα, όπως προείπαμε, και το παρακάτω παράδειγμα - αν και δεν άπτεται ακριβώς των σειρών Fourier - πιστεύω θα σας πείσει για την αναγκαιότητα του να βλέπουμε κυματομορφές και σε άλλους χώρους πλην αυτού του χρόνου.

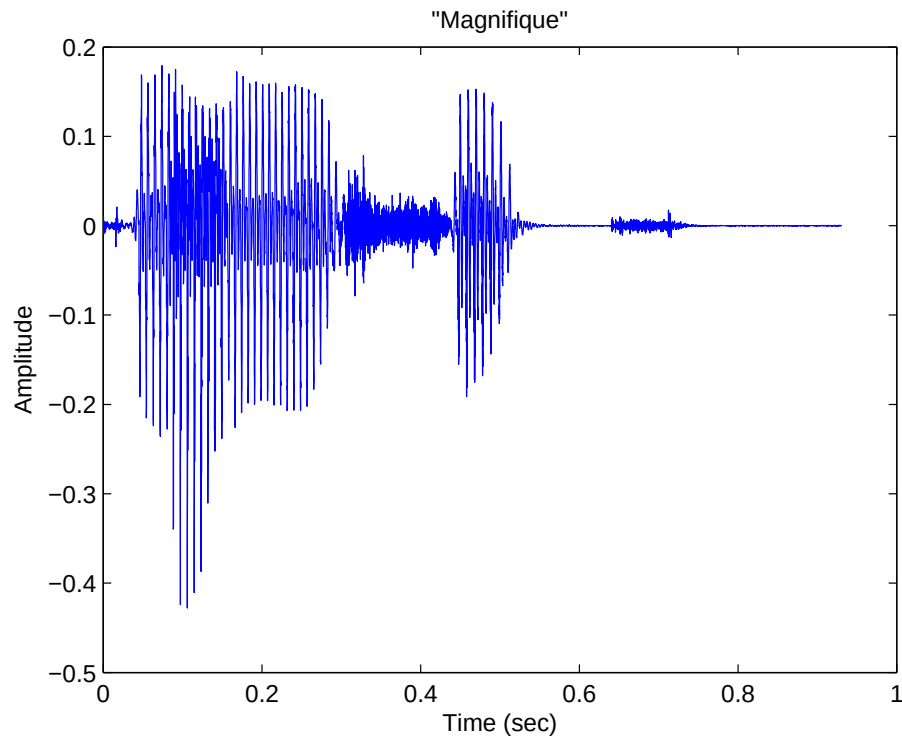
#### 1.1.1 Μια μικρή εφαρμογή - κίνητρο

Έστω ότι έχουμε ένα σήμα φωνής όπως αυτό του Σχήματος 1. Πρόκειται για τη Γαλλική λέξη “magnifique”<sup>1</sup>. :-) Ας υποθέσουμε ότι για κάποιο λόγο, ένα ισχυρό ημίτονο πλάτους 0.5, των 500 Hz (θυμηθείτε, 500 Hz σημαίνει ότι σε ένα δευτερόλεπτο, το ημίτονο έχει επαναλάβει τη βασική του περίοδο 500 φορές) προστίθεται στο σήμα φωνής, και το οποίο ημίτονο θεωρείται ως ανεπιθύμητο, δηλαδή ως “θόρυβος”<sup>2</sup>. Το αποτέλεσμα στο χώρο του χρόνου φαίνεται στο σχήμα 2. Το αποτέλεσμα στο χώρο του χρόνου φαίνεται στο Σχήμα 2. Θα θέλαμε να ανακτήσουμε πίσω το αρχικό σήμα χωρίς το θόρυβο.

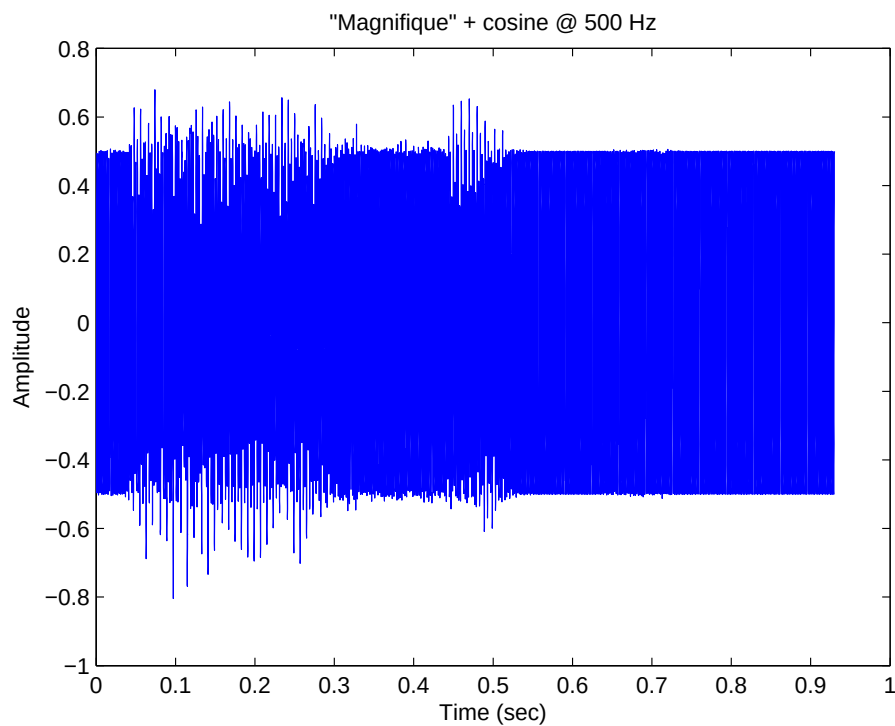
Όπως μπορείτε να δείτε, είναι τρομερά δύσκολο στην πράξη να ξεχωρίσουμε/ανακτήσουμε το σήμα μας στο πεδίο του χρόνου, μια και φαίνεται να έχει θαφτεί μέσα στο “θόρυβο” του συνημιτόνου. Αν θέλαμε να το δουλέψουμε στο πεδίο του χρόνου, θα πρέπει να γνωρίζουμε την πλήρη περιγραφή του “θορύβου”, δηλ. το πλάτος, τη συχνότητα, και τη φάση του ημιτόνου. Στην πράξη, σπάνια μπορούμε να γνωρίζουμε αυτά τα χαρακτηριστικά. ΟΜΩΣ, αν χρησιμοποιήσουμε τα εργαλεία που θα μάθετε στο μάθημα, δηλαδή την οπτική του πεδίου της συχνότητας, τότε για το καθαρό σήμα, θα έχετε το διάγραμμα του Σχήματος 3, ενώ για το “αλλοιωμένο” σήμα, θα έχετε το διάγραμμα του σχήματος 4. Παρατηρήστε δυο πράγματα :

<sup>1</sup> Προφέρεται “μανιφίκ”.

<sup>2</sup> Το παράδειγμα αυτό δεν απέχει απ’ την πραγματικότητα - στα αεροπλάνα, όταν βγαίνει μια ανακοίνωση από τα μικρόφωνα του πιλοτηρίου, ακούγεται πάνω στη φωνή του πιλότου ένα ημίτονο στα 400 Hz, λόγω του ότι η ηλεκτρική ισχύς είναι στα 400 Hz, εν αντιθέσει με τα σπίτια μας, που είναι 50 – 60 Hz... αφ’ ενός, φαντάζομαι ότι μέχρι σήμερα βέβαια θα το έχουν φτιάξει, αφ’ ετέρου το δικό μας παράδειγμα είναι εσκεμμένα πιο... τραβηγμένο/δύσκολο :-P

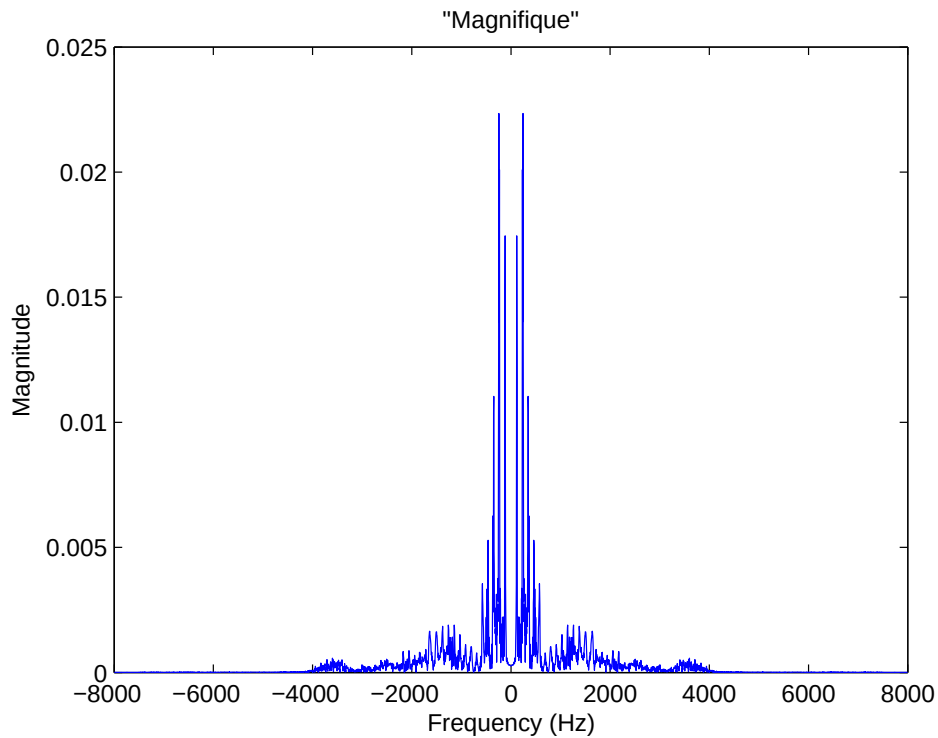


Σχήμα 1: Σήμα Φωνής στο πεδίο του χρόνου

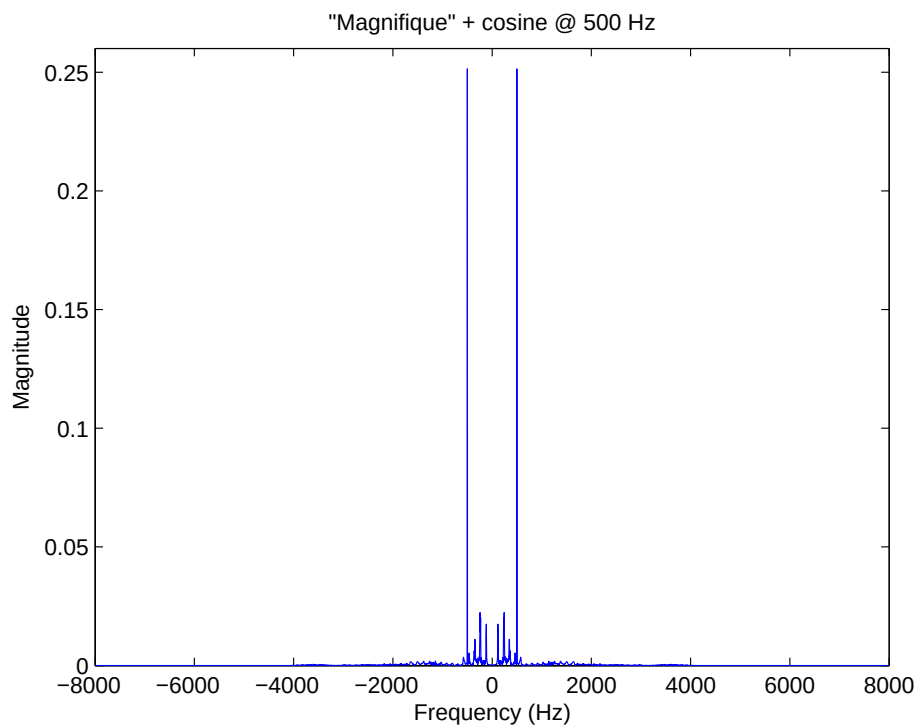


Σχήμα 2: Σήμα Φωνής στο πεδίο του χρόνου με προστιθέμενο ημίτονο στα 500 Hz

1. Ο οριζόντιος άξονας είναι πλέον η συχνότητα στα Σχήματα 3, 4, και όχι πια ο χρόνος. Πρόκειται για ΑΚΡΙΒΩΣ τα ίδια σήματα των Σχημάτων 1, 2, μόνο που τα βλέπουμε σε έναν άλλο χώρο, αυτόν των συχνοτήτων. Το γιατί οι γραφικές παραστάσεις έχουν αυτό το σχήμα, όπως επίσης και γιατί έχουμε αυτές τις “έξωτικές ” αρνητικές συχνότητες :-), θα το μάθετε στην πορεία.
2. Προσέξτε επίσης την αλλαγή της κλίμακας στα διαγράμματα αυτά. Στο διάγραμμα 4 παρατηρούμε ότι γύρω στα



Σχήμα 3: Σήμα Φωνής στο πεδίο των συχνοτήτων



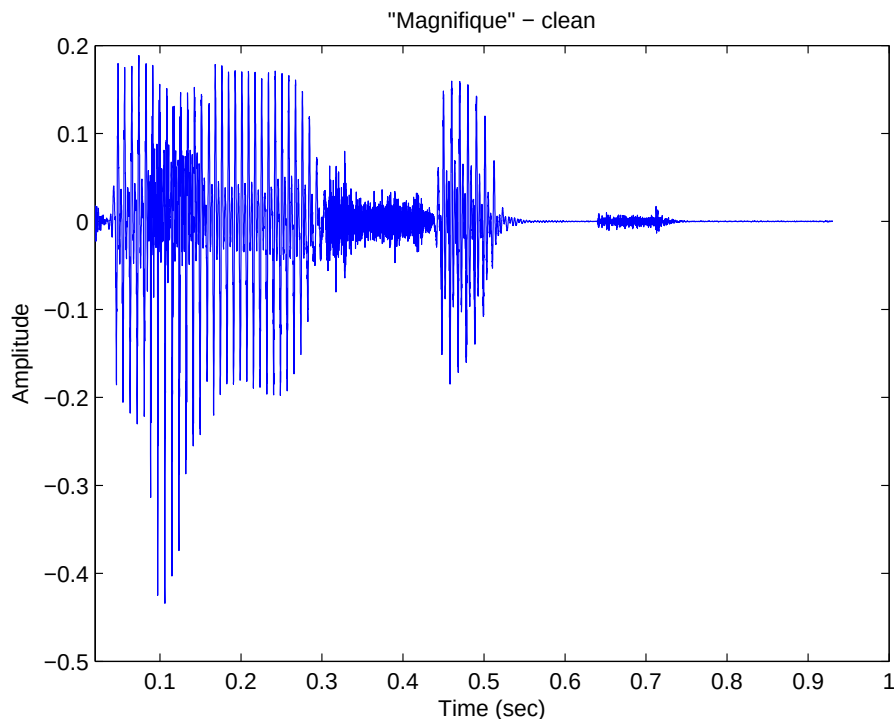
Σχήμα 4: Αλληλοιωμένο σήμα Φωνής στο πεδίο των συχνοτήτων

$\pm 500$  Hz υπάρχει μια ισχυρή συνιστώσα, η οποία μοιάζει εκτός της ομαλότητας που παρατηρούμε στο σχήμα 3. Σίγουρα λοιπόν αυτή η μεγάλη κατακόρυφη “γραμμή” οφείλεται στο ημίτονο που προσεθηκε μετά. ;-) Το υπόλοιπο σήμα είναι το ίδιο ανάμεσα στα δυο γραφήματα, απλά έχει αλλάξει η κλίμακα για να “χωρέσουν” στο σχήμα οι συνιστώσες των 500 Hz.

3. Στη βιβλιογραφία, συχνά χρησιμοποιείται η λεγόμενη *κυκλική* ή *γωνιακή* συχνότητα  $\omega = 2\pi f$ , που μετριέται σε

rad/sec, αντί της συχνότητας  $f$  σε Hz, που αναφέρεται παραπάνω. Στα παραπάνω σχήματα δεν θα άλλαζε τίποτα, απλά ο οριζόντιος άξονας της συχνότητας πολλαπλασιάζεται με  $2\pi$ .

Βλέπουμε λοιπόν τώρα ότι αυτός ο νέος χώρος, ο χώρος των συχνοτήτων, είναι πολύ πιο βοηθητικός στην προσπάθειά μας να ανακτήσουμε το σήμα μας. Το μόνο που έχουμε να κάνουμε είναι να μηδενίσουμε την τιμή 0.25 που φαίνεται στα  $\pm 500$  Hz. Έτσι, θα μπορέσουμε να εξαφανίσουμε το ενοχλητικό σήμα, μια και γνωρίζουμε ότι αντιστοιχεί στον ενοχλητικό “θόρυβο”, και να κρατήσουμε μόνο το “χρήσιμο” σήμα. Πράγματι, αν μηδενίσουμε αυτή τη συχνότητα, και αντιστρέψουμε τη διαδικασία πίσω στο χρόνο, θα πάρουμε το Σχήμα 5!



Σχήμα 5: Καθαρισμένο Σήμα Φωνής

Ποιός ήταν ο σκοπός όλου αυτού του – υπεραπλουστευμένου, είναι η αλήθεια – παραδείγματος; Ο σκοπός συνοψίζεται στην εξής παρατήρηση: *Αν μπορούσαμε να έχουμε ένα μαθηματικό εργαλείο που μας μετατρέπει ένα οποιοδήποτε σήμα στο χώρο του χρόνου σε ένα αντίστοιχο στο χώρο των συχνοτήτων, δηλ. θα μπορούσε να μας γράψει το όποιο σήμα  $x(t)$  ως συνάρτηση ημιτόνων κάποιων συγκεκριμένων συχνοτήτων (η οποία μπορεί να παρασταθεί γραφικά όπως στο Σχήμα 3 ή στο Σχήμα 4), τότε πολύ εύκολα θα μπορούσαμε να κάνουμε πράγματα που στο πεδίο του χρόνου θα ήταν αδύνατα!*

Το παραπάνω παράδειγμα, όπου απλά μηδενίζουμε μια συχνότητα (δηλ. μηδενίζουμε το πλάτος του αντίστοιχου ημιτόνου – η συχνότητα, ως τιμή, δεν μπορεί να “μηδενιστεί”) η οποία είναι ανεπιθύμητη, είναι ΕΝΑ μόνο από τα χιλιάδες, όπου η αλλαγή χώρου μας λύνει τα χέρια. Αυτό το μαθηματικό εργαλείο μας είναι ήδη γνωστό εδώ και πολλά χρόνια και δεν είναι άλλο από την **Ανάλυση Fourier**...<sup>3</sup>

## 1.2 Ένα απλό παράδειγμα

Πώς λοιπόν θα μπορούσαμε να έχουμε μια γραφική παρασταση ενός σήματος στο χώρο των συχνοτήτων; Αυτό το ερώτημα είπαμε ότι ισοδυναμεί με το πώς θα μπορούσαμε να έχουμε μια μαθηματική έκφραση στο χώρο των συχνοτήτων ενός σήματος που μας δίδεται στο χρόνο. Η πιο απλή τέτοια αναπαράσταση φυσικά δεν είναι άλλη από του απλού μιγαδικού εκθετικού συχνοτήτας  $f_0$ :

$$x(t) = Ae^{j2\pi f_0 t}, \quad A > 0 \quad (1)$$

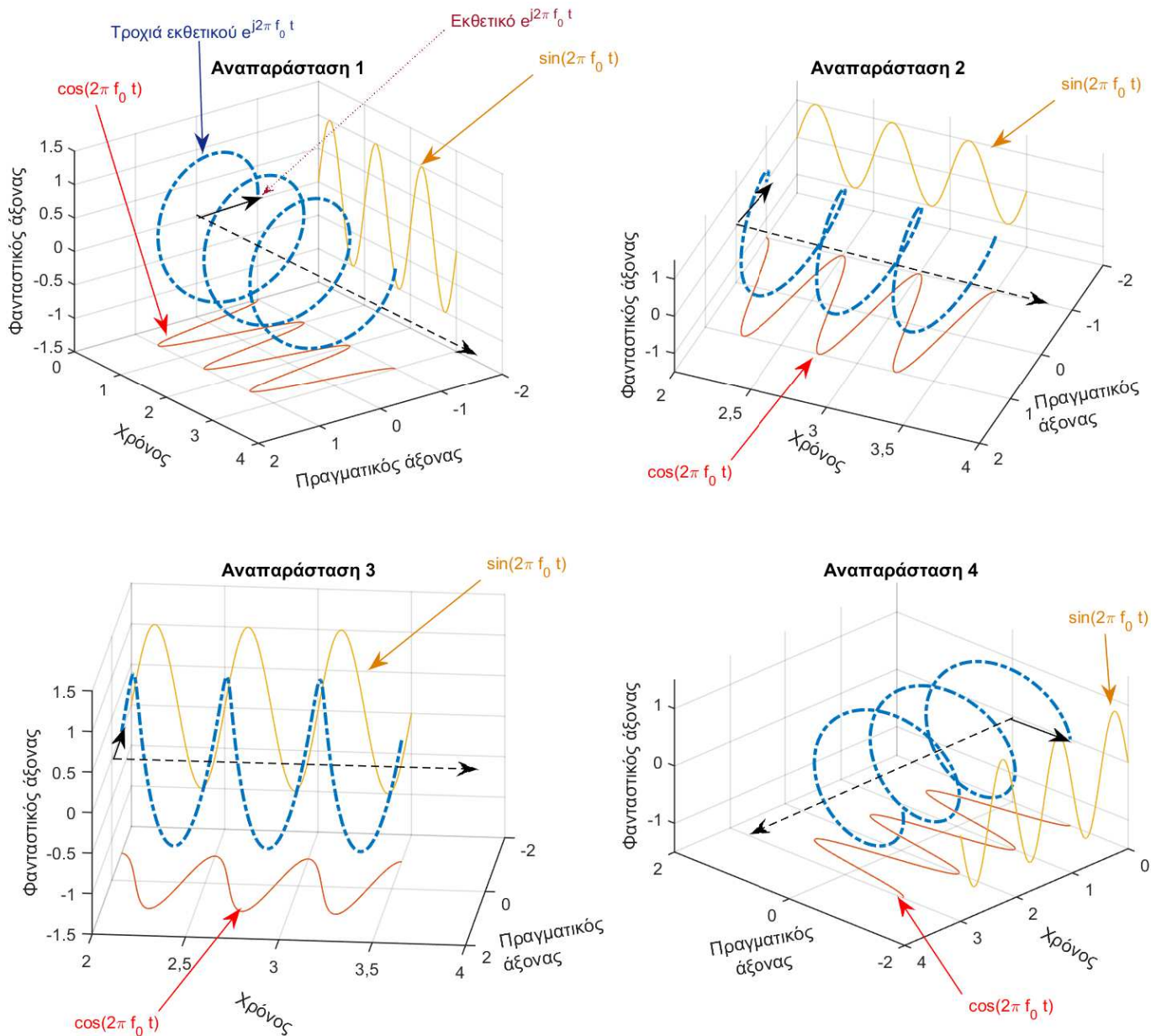
<sup>3</sup>Επειδή ίσως το σκεφτήκατε... αν το ωφέλιμο σήμα  $x(t)$  έχει από μόνο του πληροφορία στη συχνότητα  $\pm 500$  Hz πριν την πρόσθεση του ημιτόνου, τότε προφανώς αυτή η πληροφορία θα χαθεί με την παραπάνω διαδικασία, και άρα το σήμα που θα πάρουμε δε θα είναι ακριβώς ίδιο με το αρχικό.

Είναι ένα σήμα που ορίζεται στο χρόνο, με πλάτος  $A$ , και με συχνότητα  $f_0$ , η οποία είναι σταθερή. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι ο *συντελεστής* του εκθετικού  $e^{j2\pi f_0 t}$  είναι η ποσότητα  $A$ , πραγματικός θετικός αριθμός. Γνωρίζετε από τις διαλέξεις ότι το σήμα αυτό αποτελεί ένα περιστρεφόμενο διάνυσμα στο μιγαδικό επίπεδο, του οποίου το πραγματικό και το φανταστικό μέρος ισούνται με

$$\Re\{Ae^{j2\pi f_0 t}\} = A \cos(2\pi f_0 t) \quad (2)$$

$$\Im\{Ae^{j2\pi f_0 t}\} = A \sin(2\pi f_0 t) \quad (3)$$

και σχηματικά αναπαρίσταται όπως στο Σχήμα 6. Οπότε, γι' αυτό το σήμα, μια διδιάστατη απεικόνιση φαίνεται στο

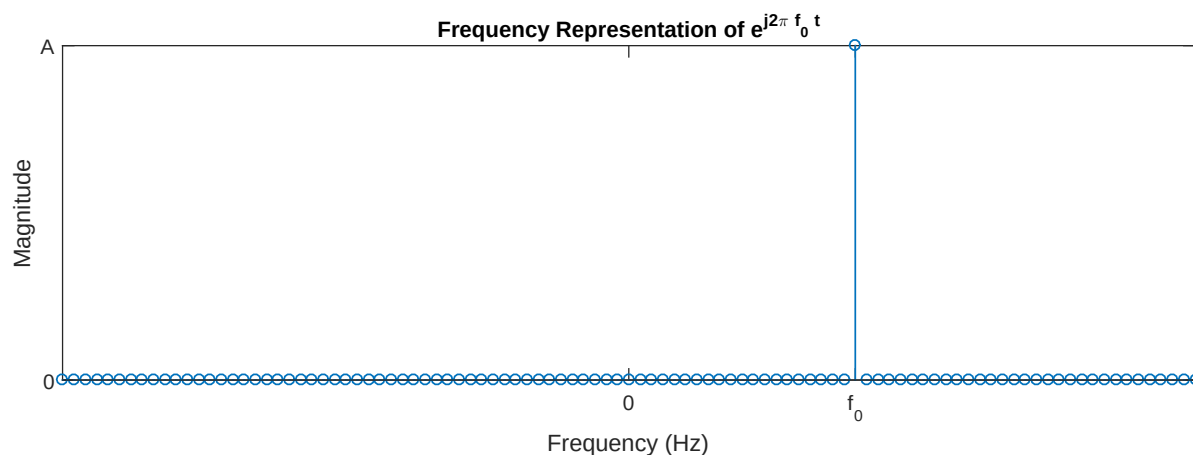


Σχήμα 6: Μιγαδικό εκθετικό  $Ae^{j2\pi f_0 t}$ .

διάγραμμα στο χώρο της συχνότητας στο Σχήμα 7. Δυο άξονες, με οριζόντιο τον άξονα των συχνοτήτων και κατακόρυφο τον άξονα του πλάτους, με μια κατακόρυφη γραμμή στη συχνότητα  $f_0$ , ύψους  $A$ . Αυτή είναι η αναπαράσταση που ζητάμε! :-)

Φυσικά το σήμα που επιλέξαμε μπορεί να είναι το απλούστερο που μπορούσαμε να σκεφτούμε, αλλά δεν παύει να είναι ένα μιγαδικό σήμα! Αν είχαμε ένα πραγματικό σήμα όπως το

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t), \quad A > 0 \quad (4)$$

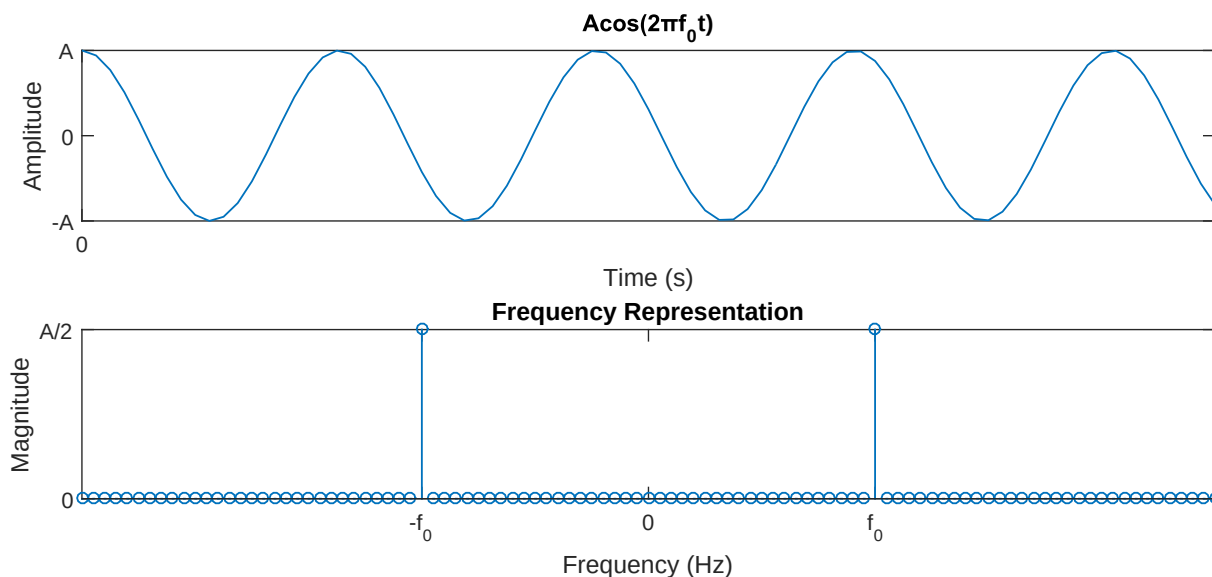


Σχήμα 7: Απλό παράδειγμα συχνοτικής ανάλυσης.

τότε πώς θα σχεδιάζαμε αυτή τη γραφική αναπαράσταση; Πολύ απλά, γνωρίζουμε ότι

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t) = \frac{A}{2} e^{j2\pi f_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j2\pi f_0 t} \quad (5)$$

σύμφωνα με τους τύπους του Euler. Οι συντελεστές των εκθετικών με συχνότητες  $\pm f_0$  είναι τώρα  $A/2$  και στα δυο εκθετικά, και είναι θετικοί και πραγματικοί συντελεστές. Να λοιπόν που τώρα έχουμε ένα άθροισμα από δυο εκθετικά συχνοτήτων  $\pm f_0$ , οπότε θα έχουμε ένα διάγραμμα με δυο κατακόρυφες γραμμές. Μια στη συχνότητα  $-f_0$  και μια στη συχνότητα  $f_0$  Hz, με πλάτη  $A/2$ . Ας δούμε αυτά τα σχήματα μαζί, τόσο στο χρόνο όσο και στη συχνότητα, στο Σχήμα 8. Θα θέλαμε φυσικά η πληροφορία που μας δίνεται από τη συχνοτική αναπαράσταση του σήματος να είναι ισοδύναμη



Σχήμα 8: Απλό παράδειγμα ανάλυσης σήματος στους δυο χώρους

με αυτή του χρόνου. Δηλ. να μπορούμε, βλέποντας αυτή τη γραφική παράσταση, να καταλαβαίνουμε αμέσως για ποιά μαθηματική μορφή σήματος πρόκειται. Στο παράδειγμά μας, είναι έτσι τα πράγματα; Αρκεί η συχνότητα και το πλάτος που αναγράφονται στη συχνοτική αναπαράσταση για να περιγράψει πλήρως ένα *οποιοδήποτε* ημίτονο; Η

απάντηση είναι όχι! Διότι ένα ημίτονο στη γενική του μορφή γράφεται ως

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi), \quad A > 0, \quad \phi \in [-\pi, \pi) \quad (6)$$

$$= \frac{A}{2} e^{j2\pi f_0 t} e^{j\phi} + \frac{A}{2} e^{-j2\pi f_0 t} e^{-j\phi} \quad (7)$$

$$= \left(\frac{A}{2} e^{j\phi}\right) e^{j2\pi f_0 t} + \left(\frac{A}{2} e^{-j\phi}\right) e^{-j2\pi f_0 t} \quad (8)$$

$$= Z_0 e^{j2\pi f_0 t} + Z_0^* e^{-j2\pi f_0 t} \quad (9)$$

Παρατηρήστε τώρα ότι εδώ πλέον οι συντελεστές των εκθετικών,  $Z_0, Z_0^*$ , είναι *μιγαδικοί*, και συγκεκριμένα συζυγείς! Άρα στη γενικότερη μορφή ενός ημιτόνου, δε μας αρκεί μια γραφική παράσταση που να δείχνει το συντελεστή του εκθετικού, γιατί πολύ συχνά ο συντελεστής είναι μιγαδικός (δυο μεταβλητές,  $A, \phi$ )! Χρειάζεται με κάποιο τρόπο να αναπαριστούμε και τη *φάση*  $\phi$  του μιγαδικού ως συνάρτηση της συχνότητας.

Όμως πριν απ' όλα χρειάζεται να συμφωνήσουμε σε κάτι: οι συντελεστές  $Z_i, Z_i^*$  των εκθετικών  $e^{\pm j2\pi f_0 t}$  που θα έχουμε πρέπει να είναι γραμμένοι σε μορφή *μέτρου-φάσης*, δηλ.

$$Z_i = A_i e^{j\phi_i}, \quad \text{με } A_i > 0, \quad \phi_i \in [-\pi, \pi) \quad (10)$$

Οπότε τελικά, η πλήρης περιγραφή ενός ημιτόνου στο χώρο της συχνότητας περιλαμβάνει δυο διαγράμματα: ένα που αφορά το πλάτος  $A_i$  του μιγαδικού συντελεστή  $Z_i$  ως συνάρτηση της συχνότητας (αυτό που έχουμε δει ως τώρα) ΚΑΙ ένα που αφορά τη φάση  $\phi_i$  του μιγαδικού συντελεστή  $Z_i$  ως συνάρτηση της συχνότητας. Αυτές οι δυο αναπαραστάσεις λέγονται **φάσμα πλάτους** και **φάσμα φάσης**, αντίστοιχα. Ας δούμε μερικά παραδείγματα.

### 1.3 Περισσότερα παραδείγματα

Παράδειγμα 1:

Έστω το σήμα

$$x(t) = 2 \cos(2\pi 200t + \pi/3) + \cos(2\pi 500t - \pi/6) \quad (11)$$

Λύση:

Προτού σχεδιάσουμε τα αντίστοιχα φάσματα, ας δούμε πως αναλύεται αυτό το σήμα. Είναι

$$x(t) = 2 \cos(2\pi 200t + \pi/3) + \cos(2\pi 500t - \pi/6) \quad (12)$$

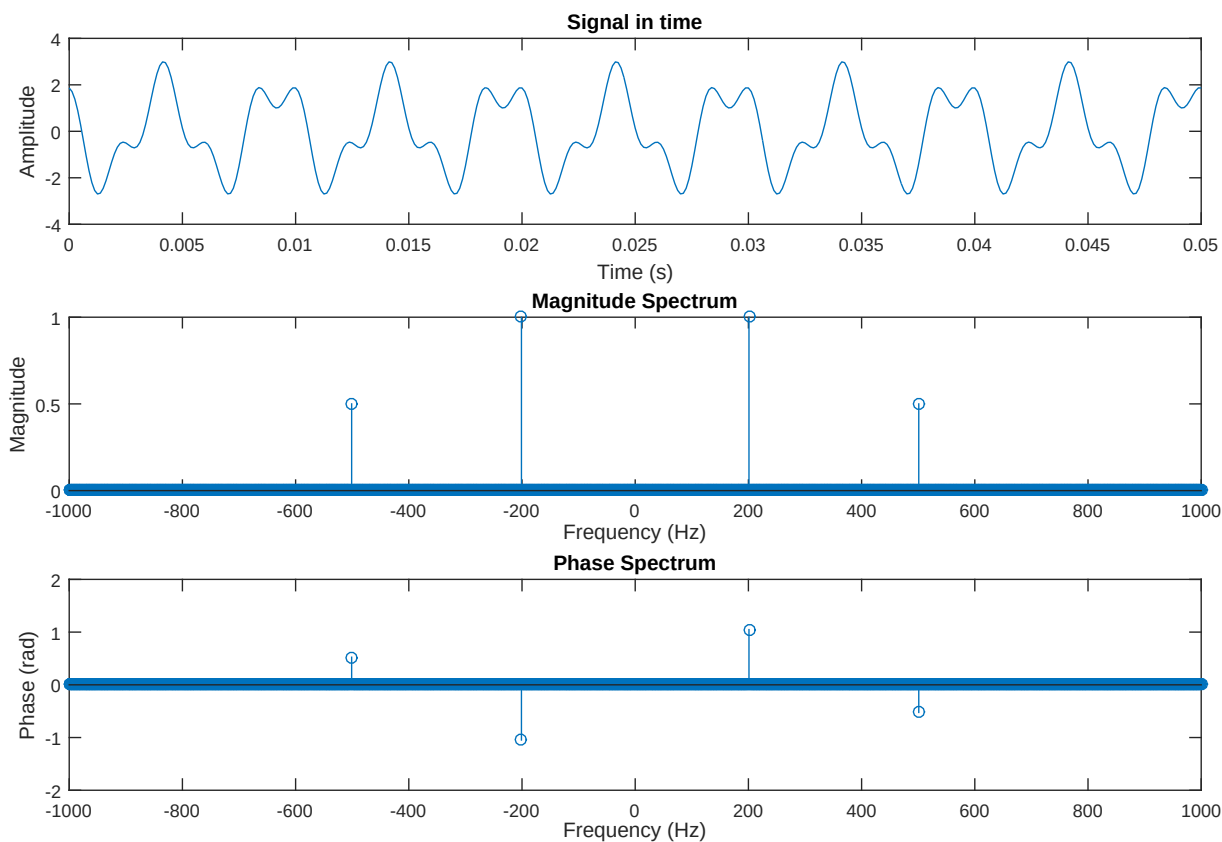
$$= e^{j2\pi 200t} e^{j\pi/3} + e^{-j2\pi 200t} e^{-j\pi/3} + \frac{1}{2} e^{j2\pi 500t} e^{-j\pi/6} + \frac{1}{2} e^{-j2\pi 500t} e^{j\pi/6} \quad (13)$$

$$= \left(e^{j\pi/3}\right) e^{j2\pi 200t} + \left(e^{-j\pi/3}\right) e^{-j2\pi 200t} + \left(\frac{1}{2} e^{-j\pi/6}\right) e^{j2\pi 500t} + \left(\frac{1}{2} e^{j\pi/6}\right) e^{-j2\pi 500t} \quad (14)$$

με τις παρενθέσεις να περικλείουν τους συντελεστές των μιγαδικών εκθετικών συχνότητας  $\pm 200, \pm 500$  Hz. Όπως βλέπετε εδώ, τώρα οι συντελεστές των εκθετικών είναι μιγαδικοί,  $1e^{\pm j\pi/3}, \frac{1}{2}e^{\pm j\pi/6}$ . Οι συντελεστές αυτοί είναι ήδη στην επιθυμητή μορφή,  $A_i e^{j\phi_i}$ , με  $A > 0$  και  $\phi \in [-\pi, \pi)$ .

Από αυτήν την αναπαράσταση, μας είναι ξεκάθαρο πώς να σχεδιάσουμε το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης, καθώς τα  $A_i$  θα σχεδιαστούν στο φάσμα πλάτους και τα  $\phi_i$  στο φάσμα φάσης, στις αντίστοιχες συχνότητες φυσικά. Δείτε το Σχήμα 9. ■

Προφανώς μπορούμε να σχεδιάσουμε τα φάσματα πλάτους και φάσης οποιωνδήποτε ημιτόνων ή συνδυασμού τους με απλή εφαρμογή των σχέσεων του Euler. Προσέξτε όμως την περίπτωση που οι συντελεστές δεν καταλήγουν τόσο εύκολα σε μορφή μέτρου-φάσης. Δείτε το παρακάτω, πιο γενικό παράδειγμα.



Σχήμα 9: Παράδειγμα 1: ανάληψη σήματος.

Παράδειγμα 2:

Έστω το σήμα

$$x(t) = 2 \cos(2\pi 200t + \pi/3) + \sin(2\pi 500t - \pi/6) \quad (15)$$

Σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης του.

Λύση:

Οι σχέσεις του Euler μας δίνουν

$$x(t) = 2 \cos(2\pi 200t + \pi/3) + \sin(2\pi 500t - \pi/6) \quad (16)$$

$$= e^{j2\pi 200t} e^{j\pi/3} + e^{-j2\pi 200t} e^{-j\pi/3} + \frac{1}{2j} e^{j2\pi 500t} e^{-j\pi/6} - \frac{1}{2j} e^{-j2\pi 500t} e^{j\pi/6} \quad (17)$$

$$= \left(e^{j\pi/3}\right) e^{j2\pi 200t} + \left(e^{-j\pi/3}\right) e^{-j2\pi 200t} + \left(\frac{1}{2j} e^{-j\pi/6}\right) e^{j2\pi 500t} + \left(-\frac{1}{2j} e^{j\pi/6}\right) e^{-j2\pi 500t} \quad (18)$$

Εδώ, οι συντελεστές των εκθετικών είναι  $1e^{\pm j\pi/3}$  και  $\pm \frac{1}{2j} e^{\pm j\pi/6}$ . Ενώ με τους συντελεστές  $1e^{\pm j\pi/3}$  των δυο πρώτων στη σειρά εκθετικών είμαστε ευχαριστημένοι (είναι ήδη σε μορφή μέτρου-φάσης), δεν ισχύει το ίδιο για τους δυο επόμενους, τους  $\pm \frac{1}{2j} e^{\pm j\pi/6}$ . Ο λόγος; Αυτά τα  $\pm \frac{1}{2j}$  είναι μιγαδικοί αριθμοί, και όχι πραγματικοί, όπως απαιτείται.

Μπορούμε όπως να τα μετατρέψουμε σε φάση, γιατί από τις σχέσεις του Euler ξέρουμε ότι

$$-\frac{1}{j} = j = \cos(\pi/2) + j \sin(\pi/2) = e^{j\pi/2} \quad (19)$$

$$\frac{1}{j} = -j = \cos(-\pi/2) + j \sin(-\pi/2) = e^{-j\pi/2} \quad (20)$$

Οπότε θα έχουμε

$$x(t) = 2 \cos(2\pi 200t + \pi/3) + \sin(2\pi 500t - \pi/6) \quad (21)$$

$$= \left(e^{j\pi/3}\right)e^{j2\pi 200t} + \left(e^{-j\pi/3}\right)e^{-j2\pi 200t} + \left(\frac{1}{2j}e^{-j\pi/6}\right)e^{j2\pi 500t} + \left(-\frac{1}{2j}e^{j\pi/6}\right)e^{-j2\pi 500t} \quad (22)$$

$$= \left(e^{j\pi/3}\right)e^{j2\pi 200t} + \left(e^{-j\pi/3}\right)e^{-j2\pi 200t} + \left(\frac{1}{2}e^{-j\pi/2}e^{-j\pi/6}\right)e^{j2\pi 500t} + \left(\frac{1}{2}e^{j\pi/2}e^{j\pi/6}\right)e^{-j2\pi 500t} \quad (23)$$

$$= \left(e^{j\pi/3}\right)e^{j2\pi 200t} + \left(e^{-j\pi/3}\right)e^{-j2\pi 200t} + \left(\frac{1}{2}e^{j\pi/3}\right)e^{j2\pi 500t} + \left(\frac{1}{2}e^{-j\pi/3}\right)e^{-j2\pi 500t} \quad (24)$$

Προσέξτε ότι όλοι οι μιγαδικοί συντελεστές ( $e^{\pm j\pi/3}$ ,  $\frac{1}{2}e^{\pm j\pi/3}$ ) των εκθετικών  $e^{\pm j2\pi 200t}$ ,  $e^{\pm j2\pi 500t}$  είναι σε μορφή μέτρου-φάσης, δηλ. στη μορφή  $A_i e^{j\phi_i}$ , με  $A > 0$  και  $\phi \in [-\pi, \pi)$ . Αυτός ήταν άλλωστε και ο σκοπός μας. Τώρα μπορούμε να σχεδιάσουμε φάσμα πλάτους και φάσμα φάσης! Κάντε το! :-)

Ας δούμε ένα ακόμα πλήρες παράδειγμα.

### Παράδειγμα 3:

Έστω το περιοδικό σήμα

$$x(t) = 3 - 2 \cos(2\pi 10t + \pi/9) + \sin(2\pi 15t - \pi/7) \quad (25)$$

Ζητείται η περίοδός του, το φάσμα πλάτους, και το φάσμα φάσης του.

### Λύση:

Για την περίοδο, γνωρίζουμε ήδη ότι

$$f_0 = \text{M.K.}\Delta\{10, 15\} = 5 \text{ Hz} \quad (26)$$

και άρα  $T_0 = \frac{1}{f_0} = 0.2$  δευτερόλεπτα. Ας αναλύσουμε τώρα το σήμα μας σε εκθετικά, ώστε να σχεδιάσουμε τα φάσματα. Θα είναι

$$x(t) = 3 - 2 \cos(2\pi 10t + \pi/9) + \sin(2\pi 15t - \pi/7) \quad (27)$$

$$= 3 - (e^{j\pi/9})e^{j2\pi 10t} - (e^{-j\pi/9})e^{-j2\pi 10t} + \left(\frac{1}{2j}e^{-j\pi/7}\right)e^{j2\pi 15t} + \left(-\frac{1}{2j}e^{j\pi/7}\right)e^{-j2\pi 15t} \quad (28)$$

Εδώ πρέπει λοιπόν, αφ' ενός να χειριστούμε τα  $\pm 1/j$  όπως κάναμε και πριν, αφ' ετέρου να δούμε πως θα χειριστούμε τους συντελεστές των δυο πρώτων εκθετικών συχνότητας  $\pm 10$  Hz. Τι πρόβλημα έχουν αυτά; Έχουν αρνητικό πρόσημο! Και σαν να μην έφταναν όλα αυτά, έχουμε κι εκείνο το σταθερό όρο 3, που δεν ξέρουμε τι να τον κάνουμε! :-)

Ας τα δούμε ένα-ένα λοιπόν... Κατ' αρχάς, ας μετατρέψουμε τα  $\pm 1/j$  κατάλληλα, στους δυο τελευταίους όρους, αφήνοντας ήσυχους προς το παρόν τους πρώτους. Έχουμε:

$$x(t) = 3 - (e^{j\pi/9})e^{j2\pi 10t} - (e^{-j\pi/9})e^{-j2\pi 10t} + \left(\frac{1}{2j}e^{-j\pi/7}\right)e^{j2\pi 15t} + \left(-\frac{1}{2j}e^{j\pi/7}\right)e^{-j2\pi 15t} \quad (29)$$

$$= 3 - (e^{j\pi/9})e^{j2\pi 10t} - (e^{-j\pi/9})e^{-j2\pi 10t} + \left(\frac{1}{2}e^{-j\pi/2}e^{-j\pi/7}\right)e^{j2\pi 15t} + \left(\frac{1}{2}e^{j\pi/2}e^{j\pi/7}\right)e^{-j2\pi 15t} \quad (30)$$

$$= 3 - (e^{j\pi/9})e^{j2\pi 10t} - (e^{-j\pi/9})e^{-j2\pi 10t} + \left(\frac{1}{2}e^{-j9\pi/14}\right)e^{j2\pi 15t} + \left(\frac{1}{2}e^{j9\pi/14}\right)e^{-j2\pi 15t} \quad (31)$$

Πλέον τα δυο τελευταία εκθετικά συχνότητας  $\pm 15$  Hz έχουν μιγαδικούς συντελεστές γραμμένους σε μορφή μέτρου-φάσης, και κατάλληλα φτιαγμένη τη φάση τους ώστε να ανήκει στο  $[-\pi, \pi)$ . Ας πάμε να δούμε τώρα τα δυο πρώτα εκθετικά, συχνότητας  $\pm 10$  Hz, που το πρόβλημά τους είναι το αρνητικό πρόσημο.

Γνωρίζουμε από τις σχέσεις του Euler ότι

$$e^{j\pi} = -1 \quad (32)$$

$$e^{-j\pi} = -1 \quad (33)$$

Ποιόν από τους δυο όρους θα διαλέξουμε;;; Η απάντηση είναι “και τους δυο!” :-) Πώς; Απλά θα προσέξουμε η επιλογή που θα κάνουμε να μας δίνει συνολική φάση που θα ανήκει στο  $[-\pi, \pi)$ ! Αν δεν ανήκει εκεί, αλλάζουμε τις

επιλογές μας! :-) Ας το δούμε. Επιλέγουμε να αντικαταστήσουμε το  $-1$  του εκθετικού συχνότητας  $10\text{ Hz}$  με το  $e^{-j\pi}$ , και το  $-1$  του εκθετικού συχνότητας  $-10\text{ Hz}$  με το  $e^{j\pi}$ . Άρα θα έχουμε:

$$x(t) = 3 - (e^{j\pi/9})e^{j2\pi 10t} - (e^{-j\pi/9})e^{-j2\pi 10t} + \left(\frac{1}{2}e^{-j9\pi/14}\right)e^{j2\pi 15t} + \left(\frac{1}{2}e^{j9\pi/14}\right)e^{-j2\pi 15t} \quad (34)$$

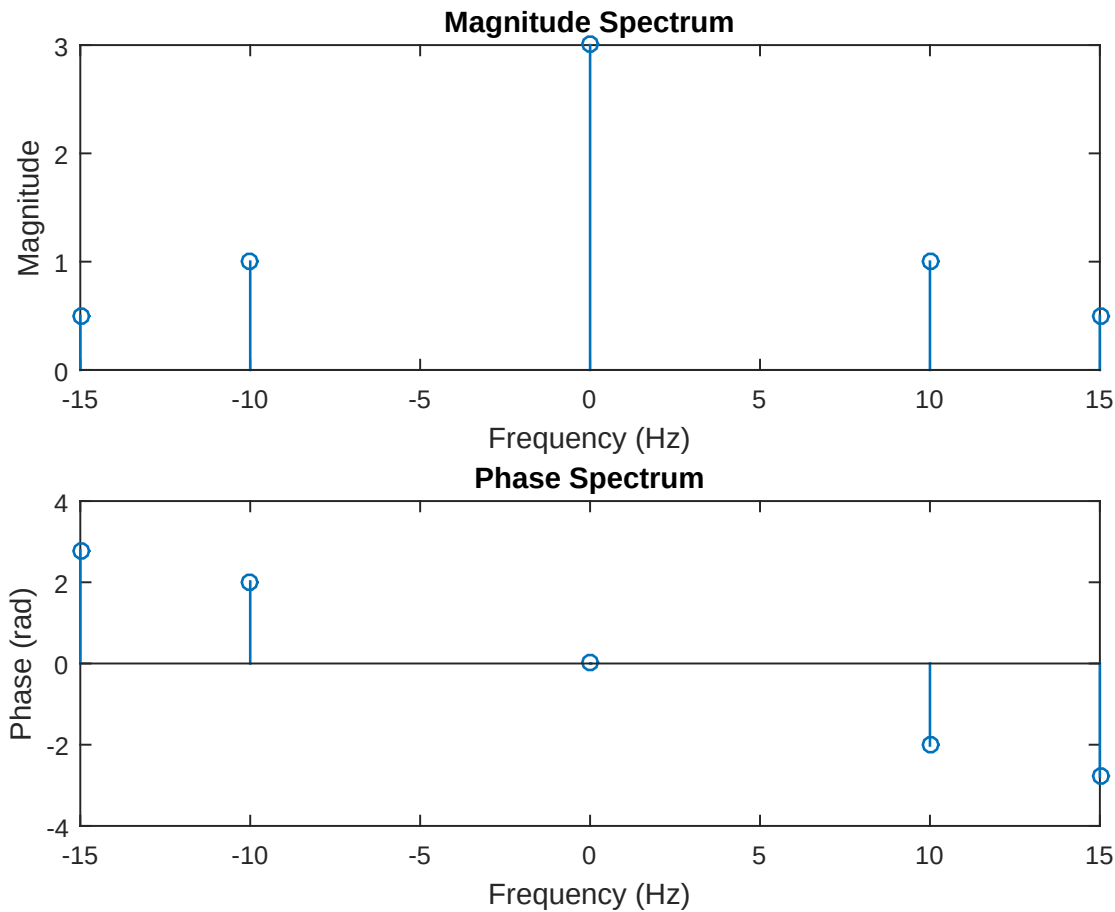
$$= 3 + (e^{j\pi/9}e^{-j\pi})e^{j2\pi 10t} + (e^{-j\pi/9}e^{-j\pi})e^{-j2\pi 10t} + \left(\frac{1}{2}e^{-j9\pi/14}\right)e^{j2\pi 15t} + \left(\frac{1}{2}e^{j9\pi/14}\right)e^{-j2\pi 15t} \quad (35)$$

$$= 3 + (e^{-j8\pi/9})e^{j2\pi 10t} + (e^{j8\pi/9})e^{-j2\pi 10t} + \left(\frac{1}{2}e^{-j9\pi/14}\right)e^{j2\pi 15t} + \left(\frac{1}{2}e^{j9\pi/14}\right)e^{-j2\pi 15t} \quad (36)$$

Βλέπετε ότι με αυτήν την αντιστοίχιση, οι φάσεις που προέκυψαν στους μιγαδικούς συντελεστές των δυο πρώτων εκθετικών συχνότητας  $\pm 10\text{ Hz}$  είναι  $\pm 8\pi/9$ , που φυσικά ανήκουν στο  $[-\pi, \pi)$ , ενώ τα μέτρα τους είναι μοναδιαία (πραγματικά και θετικά). Αν κάναμε ανάποδα τις αντιστοιχίες των  $-1$  με τις σχέσεις του Euler, τότε θα προέκυπταν φάσεις με τιμές  $\pm 10\pi/9$ , που ασφαλώς  $\notin [-\pi, \pi)$ . Κάντε το, για εξάσκηση. :-)

Και τελικά εκείνο το 3 που περίσσεψε, τι θα το κάνουμε; Είναι ένας απλός πραγματικός αριθμός, άρα που θα τον συμπεριλάβουμε; Προφανώς στο φάσμα πλάτους. Πού όμως; Σε ποιά συχνότητα; Δεν έχει κάποιο μιγαδικό εκθετικό να μας καθοδηγήσει! Η απάντηση είναι τελικά απλή, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι το 3 γράφεται ως  $3e^{j0t}$ . Άρα το 3 είναι το πλάτος της μηδενικής συχνότητας,  $f = 0$ . Άρα θα το βάλουμε στο φάσμα πλάτους, στη συμβολή των αξόνων, δηλ. στη θέση  $f = 0$ !<sup>4</sup>

Πλέον όλα τα εκθετικά έχουν μιγαδικούς συντελεστές που είναι γραμμένοι σε μορφή μέτρο-φάση. Εύκολα ξεχωρίζουμε τα πλάτη από τις φάσεις, οπότε μπορούμε να σχεδιάσουμε τα αντίστοιχα φάσματα. Δείτε το Σχήμα 10. Πριν



Σχήμα 10: Φάσμα πλάτους και φάσης Παραδείγματος 3.

κλείσουμε αυτό το παράδειγμα, παρατηρήστε το εξής: το φάσμα πλάτους έχει *άρτια* συμμετρία, ενώ το φάσμα φάσης

<sup>4</sup>Τι θα συνέβαινε αν αντί για 3 ήταν  $-3$  ο σταθερός όρος; Τότε θα τον γράφαμε ως  $-3 = 3e^{j\pi}e^{j0t}$ , και το πλάτος 3 θα πήγαινε στο φάσμα πλάτους, ενώ η φάση  $\pi$  θα πήγαινε στο φάσμα φάσης, στην ίδια θέση,  $f = 0$ !

έχει *περιπτή* συμμετρία! Αυτό ισχύει, όπως θα δούμε και παρακάτω, για ΚΑΘΕ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟ σήμα  $x(t)$  που αναλύουμε. Είναι ένας καλός τρόπος να ελέγχετε τα αποτελέσματά σας.■

Συνοψίζοντας, για το σχεδιασμό φάσματος πλάτους και φάσης σε ένα άθροισμα εκθετικών (ή ημιτόνων που τα μετατρέπουμε σε εκθετικά), φροντίζουμε να μετατρέψουμε όλους τους συντελεστές των εκθετικών σε μορφή μέτρου-φάσης, δηλ. με θετικούς πραγματικούς αριθμούς ως μέτρο, και προσέχοντας η φάση που προκύπτει να ανήκει στο  $[-\pi, \pi)$ . Αυτό γίνεται μετατρέποντας τα αρνητικά πρόσημα συντελεστών σε φάση με τη σχέση  $e^{\pm j\pi} = -1$ , καθώς και τα  $\pm 1/j = \mp j$  σε  $e^{\pm h\pi/2} = \pm j$ .

Δεν καταλήγουν, προφανώς, όμως όλοι οι συνδυασμοί ημιτόνων σε περιοδικό σήμα. Για παράδειγμα, το παραπάνω σήμα  $x(t)$  είναι περιοδικό με θεμελιώδη συχνότητα  $f_0 = \text{Μ.Κ.Δ}\{200, 500\} = 100 \text{ Hz}$ , και άρα περίοδο  $T_0 = \frac{1}{f_0} = 0.01$  δευτερόλεπτα. Όμως, το σήμα  $y(t) = \cos(2\pi 50t) - \sin(5t - \pi/4)$  ΔΕΝ είναι περιοδικό, γιατί δεν υπάρχει ο Μ.Κ.Δ των δυο συχνοτήτων. Εμείς όμως ενδιαφερομαστε ιδιαίτερα για τα περιοδικά σήματα, σε πρώτη φάση. Όταν το σήμα που μας δίνεται είναι σε μορφή αθροίσματος/γινομένου ημιτόνων, τότε μπορούμε με χρήση τριγωνομετρικών ταυτοτήτων και τύπων του Euler, να το γράψουμε σε μορφή αθροίσματος ημιτόνων ή εκθετικών και να σχεδιάσουμε φάσματα πλάτους και φάσης σημάτων, όπως παραπάνω, άσχετα αν είναι το σήμα περιοδικό ή όχι.

#### 1.4 Μόνο ημίτονα;

Όμως τα περιοδικά σήματα, όπως αυτό της Σχέσης (11), έχουν μια χαρακτηριστική ιδιότητα όταν τα αναπτύσουμε σε άθροισμα μιγαδικών εκθετικών. Αυτά τα εκθετικά *έχουν συχνότητες που είναι ακέραιες πολλαπλάσιες της θεμελιώδους συχνότητας του σήματος!* Είδατε ότι η θεμελιώδης συχνότητα του σήματος της Σχέσης (11) είναι 100 Hz. Οι συχνότητες του σήματος είναι ακέραιες πολλαπλάσιες του 100, δηλ.  $\pm 200, \pm 500$ . Αυτό ακριβώς αντικατοπτρίζεται και στο φάσμα πλάτους και φάσης.

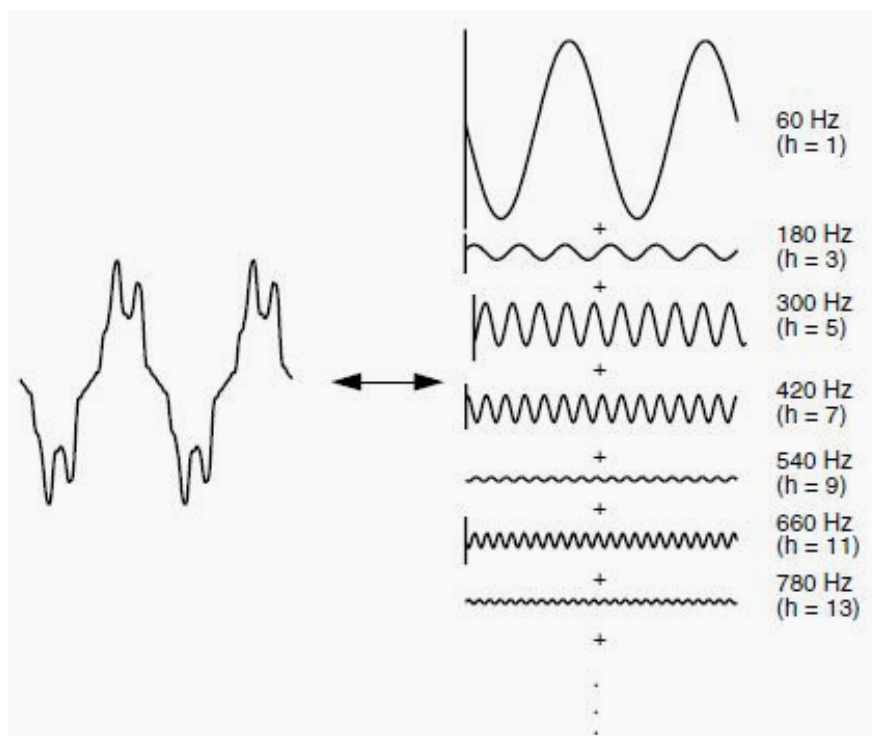
Τι γίνεται όμως αν το περιοδικό σήμα που μας δίνεται ΔΕΝ είναι σε μορφή αθροίσματος/γινομένου/πηλίκου ημιτόνων; Αν είναι ένας *περιοδικός* τριγωνικός ή τετραγωνικός παλμός, πώς θα ενεργήσουμε; Πώς θα το αναλύσουμε σε εκθετικά σήματα, ώστε να δούμε το συχνοτικό τους περιεχόμενο; Εδώ έρχεται η θεωρία της *Ανάλυσης σε σειρές Fourier!*

## 2 Ανάλυση σε Σειρές Fourier

Η Ανάλυση Fourier είναι ίσως το βασικότερο εργαλείο ανάλυσης σημάτων, η οποία μας δίνει πληροφορίες για το *συχνοτικό τους περιεχόμενο*, δηλ. για το ΠΟΙΕΣ συχνότητες υπάρχουν στο σήμα. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι μας πληροφορεί για το ΠΟΣΑ και ΠΟΙΑ ημίτονα (δηλ. με ποιά πλάτος, συχνότητα, και φάση) πρέπει να προσθέσουμε μεταξύ τους για να πάρουμε το συνολικό σήμα που αναλύουμε. Ένα οπτικό παράδειγμα φαίνεται στο Σχήμα 11. Χάριν ευκολίας, ξεκινάμε τη μελέτη μας από σήματα τα οποία λέγονται περιοδικά. Ασφαλώς γνωρίζετε τι είναι ένα περιοδικό σήμα και επίσης γνωρίζετε ότι περιοδικά σήματα, με την αυστηρή έννοια, στην πραγματικότητα ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΟΥΝ. Πουθενά στη φύση. :-) Οπότε γιατί ασχολούμαστε; Αφ' ενός για λόγους γενικότερης μελέτης, αφ' ετέρου γιατί κάποια κομμάτια απ' τη μελέτη τέτοιων σημάτων, καθώς και ο τρόπος σκέψης αυτής της μελέτης, μας είναι χρήσιμα στην πράξη.

Τι είναι λοιπόν η ανάλυση σε Σειρές Fourier; Όπως είπαμε, δεν είναι τίποτα παραπάνω από ένα μαθηματικό εργαλείο που μας επιτρέπει να γράφουμε ένα οποιοδήποτε (ή μάλλον, σχεδόν οποιοδήποτε :-)) περιοδικό, *πραγματικό* σήμα ως ένα άθροισμα ημιτόνων. Ας πάμε λίγο στα μαθηματικά, για να αρχίσουμε να ξεδιαλύνουμε κάποια πράγματα... ένα περιοδικό σήμα  $x(t)$ , με περίοδο  $T_0$ , αναλύεται σε σειρά Fourier με χρήση των σχέσεων

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad (37)$$



Σχήμα 11: Ανάλυση σήματος σε άθροισμα ημιτόνων

όπου

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt, \quad k \neq 0 \quad (38)$$

$$X_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) dt \quad (39)$$

με

$$f_0 = \frac{1}{T_0} \quad (40)$$

όπου  $X_k$  είναι οι περίφημοι συντελεστές Fourier, και την  $f_0$  τη λέμε *θεμελιώδη συχνότητα*, γιατί όλα τα εκθετικά στην εξίσωση (37) έχουν συχνότητες που είναι *ακέραιες πολλαπλασιαστές* αυτής. Είδαμε λοιπόν εδώ πως γράφουμε ένα οποιοδήποτε σήμα ως άθροισμα ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ μιγαδικών σημάτων, όπως κάναμε στην προηγούμενη παράγραφο για τα απλά αθροίσματα ημιτόνων. Η σειρά Fourier αυτής της μορφής λέγεται **εκθετική ή δίπλευρη σειρά Fourier**.

Μα ένα λεπτό... Πριν είπαμε ότι η ανάλυση Fourier μας αναλύει το σήμα σε ημίτονα. Που είναι αυτά στις παραπάνω σχέσεις; Μα φυσικά, απ' τις γνωστές σχέσεις του Euler, μπορούμε να μετατρέψουμε κάθε εκθετική αναπράσταση, που έχει προκύψει από ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟ σήμα, σε ημιτονοειδή αναπαράσταση. Θυμηθείτε:

$$\cos \theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} \quad (41)$$

Άρα ουσιαστικά τα μιγαδικά εκθετικά είναι κι αυτά ημίτονα (όταν βρίσκονται σε συζυγή ζεύγη). :-) Ας δούμε πως γίνεται

αυτή η μετατροπή.

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad (42)$$

$$= X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=-\infty}^{-1} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad (43)$$

$$= X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{\infty} X_{-k} e^{-j2\pi k f_0 t} \quad (44)$$

Όπως όμως είπαμε, μπορεί να αποδειχθεί ότι αν το σήμα είναι πραγματικό, τότε οι συντελεστές  $X_k$  έρχονται σε συζυγή ζεύγη, δηλ.  $X_k^* = X_{-k}$ . Άρα

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{\infty} X_{-k} e^{-j2\pi k f_0 t} \quad (45)$$

$$= X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{\infty} X_k^* e^{-j2\pi k f_0 t} \quad (46)$$

Όμως

$$X_k^* = (|X_k| e^{j\phi_k})^* \quad (47)$$

$$= |X_k|^* (e^{j\phi_k})^* \quad (48)$$

$$= |X_k| e^{-j\phi_k} \quad (49)$$

Άρα

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{\infty} X_k^* e^{-j2\pi k f_0 t} \quad (50)$$

$$= X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} |X_k| e^{j\phi_k} e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{\infty} |X_k| e^{-j\phi_k} e^{-j2\pi k f_0 t} \quad (51)$$

$$= X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} |X_k| e^{j(2\pi k f_0 t + \phi_k)} + \sum_{k=1}^{\infty} |X_k| e^{-j(2\pi k f_0 t + \phi_k)} \quad (52)$$

$$= X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} |X_k| \left( e^{j(2\pi k f_0 t + \phi_k)} + e^{-j(2\pi k f_0 t + \phi_k)} \right) \quad (53)$$

$$= \boxed{X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2|X_k| \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k)} \quad (54)$$

Άρα δείξαμε ότι κάθε πραγματικό, περιοδικό σήμα  $x(t)$  μπορεί να γραφεί και ως άθροισμα ημιτόνων με πλάτος  $2|X_k|$ , συχνότητες  $k f_0$ , και φάσεις  $\phi_k$ . Το παραπάνω ανάπτυγμα λέγεται **τριγωνομετρική ή μονόπλευρη σειρά Fourier**, και δείχνει ξεκάθαρα πώς αναλύεται ένα οποιοδήποτε περιοδικό, πραγματικό σήμα σε ένα άθροισμα από ημίτονα! ■

## 2.1 Απόδειξη Σειράς Fourier

Γιατί όμως αυτά τα  $X_k$  δίνουν τους συντελεστές των μιγαδικών εκθετικών συχνότητας  $k f_0$ ; Πώς προέκυψαν αυτά τα ολοκληρώματα; Ας το δούμε.

Έστω ένα περιοδικό σήμα  $x(t)$  με περίοδο  $T_0$ , το οποίο θέλουμε να το γράψουμε ως

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad (55)$$

δηλ. ως ένα άθροισμα μιας μέσης τιμής  $X_0$  και μιγαδικών εκθετικών συχνότητας  $k f_0$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Ποιά είναι τα  $X_0, X_k$  που ικανοποιούν αυτήν την απαίτηση; Η γενικότερη αντιμετώπιση τέτοιων προβλημάτων ανήκει στη θεωρία της *προβολής* συναρτήσεων επάνω σε χώρους. Χωρίς να επεκταθούμε<sup>5</sup>, ας πολλαπλασιάσουμε και τα δυο μέλη της παραπάνω σχέσης με  $e^{-j2\pi l f_0 t}$ , με  $l \in \mathbb{Z} - \{0\}$ , και έπειτα ας ολοκληρώσουμε σε μια περίοδο  $T_0$ :

$$\int_0^{T_0} x(t) e^{-j2\pi l f_0 t} dt = X_0 \int_0^{T_0} e^{-j2\pi l f_0 t} dt + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \int_0^{T_0} e^{-j2\pi l f_0 t} e^{j2\pi k f_0 t} dt \quad (56)$$

$$= X_0 \int_0^{T_0} e^{-j2\pi l f_0 t} dt + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \int_0^{T_0} e^{j2\pi(k-l)f_0 t} dt \quad (57)$$

Εδώ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε - χωρίς απόδειξη - τη σχέση της ορθογωνιότητας:

$$\int_0^{T_0} e^{j2\pi(k-l)f_0 t} dt = \begin{cases} T_0, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases} \quad (58)$$

Άρα τα ολοκληρώματα στη Σχέση (57) θα γίνουν:

$$\int_0^{T_0} e^{-j2\pi l f_0 t} dt = 0 \quad (59)$$

$$\int_0^{T_0} e^{j2\pi(k-l)f_0 t} dt = \begin{cases} T_0, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases} \quad (60)$$

Οπότε

$$\int_0^{T_0} x(t) e^{-j2\pi l f_0 t} dt = X_0 \int_0^{T_0} e^{-j2\pi l f_0 t} dt + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \int_0^{T_0} e^{j2\pi(k-l)f_0 t} dt \quad (61)$$

$$= X_0 \times 0 + X_k T_0 \quad (62)$$

$$\int_0^{T_0} x(t) e^{-j2\pi l f_0 t} dt \Big|_{l=k} = X_k T_0 \quad (63)$$

και άρα τελικά

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad (64)$$

Αντίστοιχα, για τον υπολογισμό του  $X_0$ , απλά ολοκληρώνουμε σε διάστημα μιας περιόδου, όμοια με παραπάνω. Δείξτε εσείς τη ζητούμενη Σχέση (39) ως εξάσκηση! :-)

Πριν πάμε σε παραδείγματα, ας ξεκινήσουμε πρώτα μερικές παρατηρήσεις σχετικά με την ανάλυση σε σειρές Fourier.

#### Παρατηρήσεις:

1. Ας ξεκινήσουμε απ'το πιο σημαντικό: ΟΛΕΣ οι συχνότητες της Σχέσης (37) είναι ΑΚΕΡΑΙΕΣ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΕΣ μιας συγκεκριμένης, της θεμελιώδους συχνότητας, που ορίζεται ως το αντίστροφο της περιόδου του σήματος. Αυτό σημαίνει ότι τα φάσματα πλάτους και φάσης που - θα δούμε πως - προκύπτουν θα πρέπει να έχουν γραμμές μόνο στις συχνότητες  $k f_0$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , και πουθενά αλλού!

<sup>5</sup>Παρά μόνο διαισθητικά, σε παρατήρηση επόμενης σελίδας... για περισσότερες λεπτομέρειες, δείτε τις διαλέξεις του διδάσκοντα.

2. Το ολοκλήρωμα στη Σχέση (38) λέει ότι για να βρούμε τους συντελεστές  $X_k$  κάθε εκθετικού πρέπει να πολλαπλασιάσουμε το  $x(t)$  με τις περιφνημες *συναρτήσεις βάσης*  $e^{-j2\pi k f_0 t}$  και να ολοκληρώσουμε το αποτέλεσμα σε μια περίοδο. Προσοχή! Σε μια οποιαδήποτε περίοδο του σήματος! Όχι απαραίτητα από 0 ως  $T_0$ ! Όποιο διάστημα θέλετε μπορείτε να βάλετε στα άκρα του ολοκληρώματος, όποιο σας βολεύει, ΑΡΚΕΙ να αποτελεί μια περίοδο του σήματος! Περισσότερα για τους συντελεστές Fourier σε επόμενη παρατήρηση...
3. Ίσως παρατηρήσατε ότι, για πραγματικά σήματα, το  $X_0$  εξ' ορισμού δεν είναι τίποτα άλλο παρά το (αλγεβρικό) εμβαδό μιας περιόδου του σήματος. Άρα το  $X_0$  είναι απλά η μέση τιμή του σήματος. Πραγματικός αριθμός ΠΑΝΤΑ, για πραγματικά σήματα!
4. Αντίθετα, οι συντελεστές  $X_k$ ,  $k \neq 0$  δεν είναι απαραίτητα πραγματικοί αριθμοί, συνήθως μάλιστα είναι μιγαδικοί. Το είδαμε άλλωστε νωρίτερα, στα σήματα που μελετήσαμε. Για το λόγο αυτό, οι συντελεστές  $X_k$  μπορούν - και συνήθως πρέπει, γιατί μας βοηθά στη σχεδίαση των φασμάτων - να γραφούν σε πολική μορφή (μέτρο-φάση):

$$X_k = |X_k|e^{j\angle X_k} = |X_k|e^{j\phi_k} \quad (65)$$

Το  $|X_k|$  - επανάληψη μήτηρ μαθήσεως - το λέμε **μέτρο** (είναι ΠΑΝΤΑ θετικό) και το  $\angle X_k = \phi_k$  το λέμε **φάση** του συντελεστή  $X_k$ . Η φάση ΠΑΝΤΑ εκφράζεται στο διάστημα  $[-\pi, \pi)$ . Υπάρχουν πολλές ιδιότητες σχετικά με τους συντελεστές  $X_k$  ανάλογα με το είδος του σήματος  $x(t)$ . Για παράδειγμα, αν το σήμα είναι πραγματικό, τότε ισχύει ότι  $X_k^* = X_{-k}$ , δηλ. οι συντελεστές για αρνητικά  $k$  είναι απλά οι συζυγείς συντελεστές των θετικών  $k$ . Προσοχή! Αυτό ισχύει μόνο για ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΑ, περιοδικά σήματα  $x(t)$ !

## 2.2 Ύπαρξη Σειράς Fourier

Είπαμε πιο πριν ότι μπορούμε να γράψουμε ΣΧΕΔΟΝ οποιοδήποτε περιοδικό σήμα ως ανάπτυγμα σε Σειρά Fourier. Ποιές είναι αυτές οι συνθήκες που καθορίζουν πότε μπορούμε να γράψουμε ένα περιοδικό σήμα ως σειρά Fourier και πότε όχι; Προφανώς τα σήματα που δεν μπορούν να αναπτυχθούν κατά Fourier πρέπει να έχουν ένα βαθμό “ανωμαλίας” :-). Αν και από τη σκοπιά του μηχανικού δε μας ενδιαφέρουν τέτοια σήματα, μια και υπάρχουν μόνο στη θεωρία, ενδιαφέρον είναι να δούμε ποιές είναι οι συνθήκες που καθορίζουν την ύπαρξη ή όχι του αναπτύγματος Fourier.

Υπάρχουν ΔΥΟ βασικές συνθήκες για την ύπαρξη της σειράς Fourier.

1. Οι συντελεστές  $X_k$  πρέπει να έχουν πεπερασμένο μέτρο, δηλ.  $|X_k| < \infty$ . Αυτό αποδεικνύεται ότι συμβαίνει μόνον όταν

$$\int_{T_0} |x(t)| dt < \infty \quad (66)$$

Η Σχέση 66 ονομάζεται *ασθενής συνθήκη του Dirichlet*. Αν μια συνάρτηση  $x(t)$  ικανοποιεί την ασθενή συνθήκη του Dirichlet, η ύπαρξη της σειράς Fourier είναι εγγυημένη, αλλά μπορεί η σειρά να μη συγκλίνει σε κάθε σημείο. Για παράδειγμα, αν ένα σήμα  $x(t)$  απειρίζεται σε κάποιο σημείο, τότε προφανώς κανένα άθροισμα ημιτόνων δεν μπορεί να αναπαραστήσει αυτήν την περιοχή, οπότε η σειρά που θα αναπαριστά το σήμα θα είναι “προβληματική” σε αυτήν την περιοχή, με άλλα λόγια, δε θα συγκλίνει. Παρόμοια, αν ένα σήμα έχει άπειρα σημεία μεγιστου-ελαχίστου σε μια περίοδό του<sup>6</sup>. Αυτό σημαίνει ότι οι συχνότητες που περιέχονται στο σήμα τείνουν στο άπειρο και ΔΕΝ έχουν συντελεστές  $X_k$  που φθίνουν κατά μέτρο, όσο  $f \rightarrow \infty$ . Έτσι, απαιτούμε μια ακόμα συνθήκη.

2. Το σήμα  $x(t)$  πρέπει να έχει πεπερασμένο αριθμό μεγίστων και ελαχίστων σε μια περίοδό του, και πεπερασμένο αριθμό πεπερασμένων ασυνεχειών σε μια περίοδό του. Αυτές οι δυο συνθήκες λέγονται *ισχυρές συνθήκες του Dirichlet*. Αξίζει να σημειωθεί ότι οποιοδήποτε σήμα μπορούμε να παράξουμε στο εργαστήριο ικανοποιεί τις ισχυρές συνθήκες του Dirichlet, και άρα έχει σειρά Fourier που συγκλίνει. Έτσι, στην πράξη, η φυσική ύπαρξη του σήματος είναι μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη της σειράς Fourier του. :-)

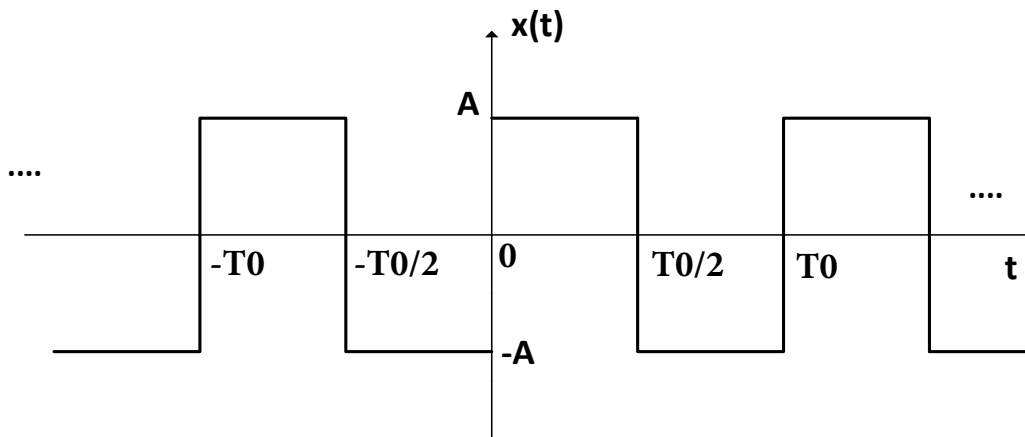
<sup>6</sup>Είπαμε, αυτά τα σήματα έχουν κάποιες “ανωμαλίες” :-)

## 2.3 Χαρακτηριστικά Παραδείγματα

Έχοντας τις παραπάνω παρατηρήσεις υπόψη μας, ας δούμε τρία χαρακτηριστικά παραδείγματα, πλήρως αναλυτικά.

### 2.3.1 Παράδειγμα 1:

Βρείτε το ανάπτυγμα σε Σειρά Fourier του περιοδικού σήματος  $x(t)$  που φαίνεται στο Σχήμα 12.



Σχήμα 12: Παράδειγμα 1 Ανάλυσης σε Σειρά Fourier.

Λύση:

Παρατηρούμε ότι η περίοδος του είναι ίση με  $T_0$  (περιλαμβάνονται σε αυτή δυο παλμοί, ένας πάνω κι ένας κάτω). Αυτό το σήμα λοιπόν γράφεται σε μια περίοδο ως

$$x_{T_0}(t) = \begin{cases} A, & 0 \leq t < T_0/2 \\ -A, & 0 \leq T_0/2 < t \leq T_0 \end{cases} \quad (67)$$

Θα έχουμε λοιπόν:

$$X_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0/2} A dt + \frac{1}{T_0} \int_{T_0/2}^{T_0} (-A) dt \quad (68)$$

$$= \frac{A}{T_0} \int_0^{T_0/2} dt - \frac{A}{T_0} \int_{T_0/2}^{T_0} dt \quad (69)$$

$$= \frac{A}{T_0} t \Big|_0^{T_0/2} - \frac{A}{T_0} t \Big|_{T_0/2}^{T_0} \quad (70)$$

$$= \frac{A}{T_0} \left( \frac{T_0}{2} - 0 \right) - \frac{A}{T_0} \left( T_0 - \frac{T_0}{2} \right) \quad (71)$$

$$= \frac{A}{2} - \frac{A}{2} = 0 \quad (72)$$

$$= \frac{A}{2} - A + \frac{A}{2} \quad (73)$$

$$= 0 \quad (74)$$

που ήταν αναμενόμενο, καθώς έχουμε σε μια περίοδο δύο παλμούς ίσου εμβαδού ( $AT_0/2$ ) που βρίσκονται εκατέρωθεν του οριζόντιου άξονα. Οπότε το συνολικό αλγεβρικό εμβαδό είναι μηδέν σε μια περίοδο.

Επίσης,

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0/2} A e^{-j2\pi k f_0 t} dt - \frac{1}{T_0} \int_{T_0/2}^{T_0} A e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad (75)$$

$$= \frac{A}{T_0} \int_0^{T_0/2} e^{-j2\pi k f_0 t} dt - \frac{A}{T_0} \int_{T_0/2}^{T_0} e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad (76)$$

$$= \frac{A}{T_0} \frac{1}{(-j2\pi k f_0)} e^{-j2\pi k f_0 t} \Big|_0^{T_0/2} - \frac{A}{T_0} \frac{1}{(-j2\pi k f_0)} e^{-j2\pi k f_0 t} \Big|_{T_0/2}^{T_0} \quad (77)$$

$$= \frac{A}{T_0} \frac{1}{(-j2\pi k f_0)} (e^{-j2\pi k f_0 \frac{T_0}{2}} - e^0) - \frac{A}{T_0} \frac{1}{(-j2\pi k f_0)} (e^{-j2\pi k f_0 T_0} - e^{-j2\pi k f_0 \frac{T_0}{2}}) \quad (78)$$

Ξέρουμε ότι  $f_0 T_0 = 1$ , και με αντικατάσταση έχουμε

$$X_k = \frac{A}{T_0} \frac{1}{(-j2\pi k f_0)} (e^{-j2\pi k f_0 \frac{T_0}{2}} - e^0) - \frac{A}{T_0} \frac{1}{(-j2\pi k f_0)} (e^{-j2\pi k f_0 T_0} - e^{-j2\pi k f_0 \frac{T_0}{2}}) \quad (79)$$

$$= -\frac{A}{j2k\pi} (e^{-jk\pi} - 1) + \frac{A}{j2k\pi} (e^{-j2k\pi} - e^{-jk\pi}) \quad (80)$$

$$= -\frac{A}{j2k\pi} (e^{-jk\pi} - 1) + \frac{A}{j2k\pi} (1 - e^{-jk\pi}) \quad (81)$$

$$= \frac{A}{j2k\pi} (1 - e^{-jk\pi}) + \frac{A}{j2k\pi} (1 - e^{-jk\pi}) \quad (82)$$

$$= \frac{2A}{j2k\pi} (1 - e^{-jk\pi}) \quad (83)$$

$$= \frac{A}{jk\pi} (1 - e^{-jk\pi}) \quad (84)$$

κι επειδή  $e^{-jk\pi} = (-1)^k$ , έχουμε

$$X_k = \frac{A}{jk\pi} (1 - (-1)^k) = \begin{cases} \frac{A}{jk\pi} (1 - (-1)), & k \text{ περιττά} \\ 0, & k \text{ άρτια} \end{cases} = \begin{cases} \frac{2A}{jk\pi}, & k \text{ περιττά} \\ 0, & k \text{ άρτια} \end{cases} \quad (85)$$

γιατί προφανώς το  $1 - (-1)^k$  είναι μηδέν για  $k$  άρτια, και 2 για  $k$  περιττά. Άρα τελικά, οι συντελεστές  $X_k$  είναι

$$X_k = \begin{cases} \frac{2A}{jk\pi}, & k \text{ περιττά} \\ 0, & k \text{ άρτια} \end{cases} = \begin{cases} \frac{2A}{k\pi} e^{-j\pi/2}, & k \text{ περιττά} \\ 0, & k \text{ άρτια} \end{cases} \quad (86)$$

Οπότε σε πρώτη φάση, η σειρά Fourier μπορεί να γραφεί ως

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0 \\ k \text{ περιττό}}}^{+\infty} \frac{2A}{k\pi} e^{-j\pi/2} e^{j2\pi k f_0 t} \quad (87)$$

ή αλλιώς, περιλαμβάνοντας μόνο τα περιττά  $k$ ,

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left( \frac{2A}{(2k-1)\pi} e^{-j\pi/2} \right) e^{j2\pi(2k-1)f_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2A}{(2k-1)\pi} e^{j(2\pi(2k-1)f_0 t - \pi/2)} \quad (88)$$

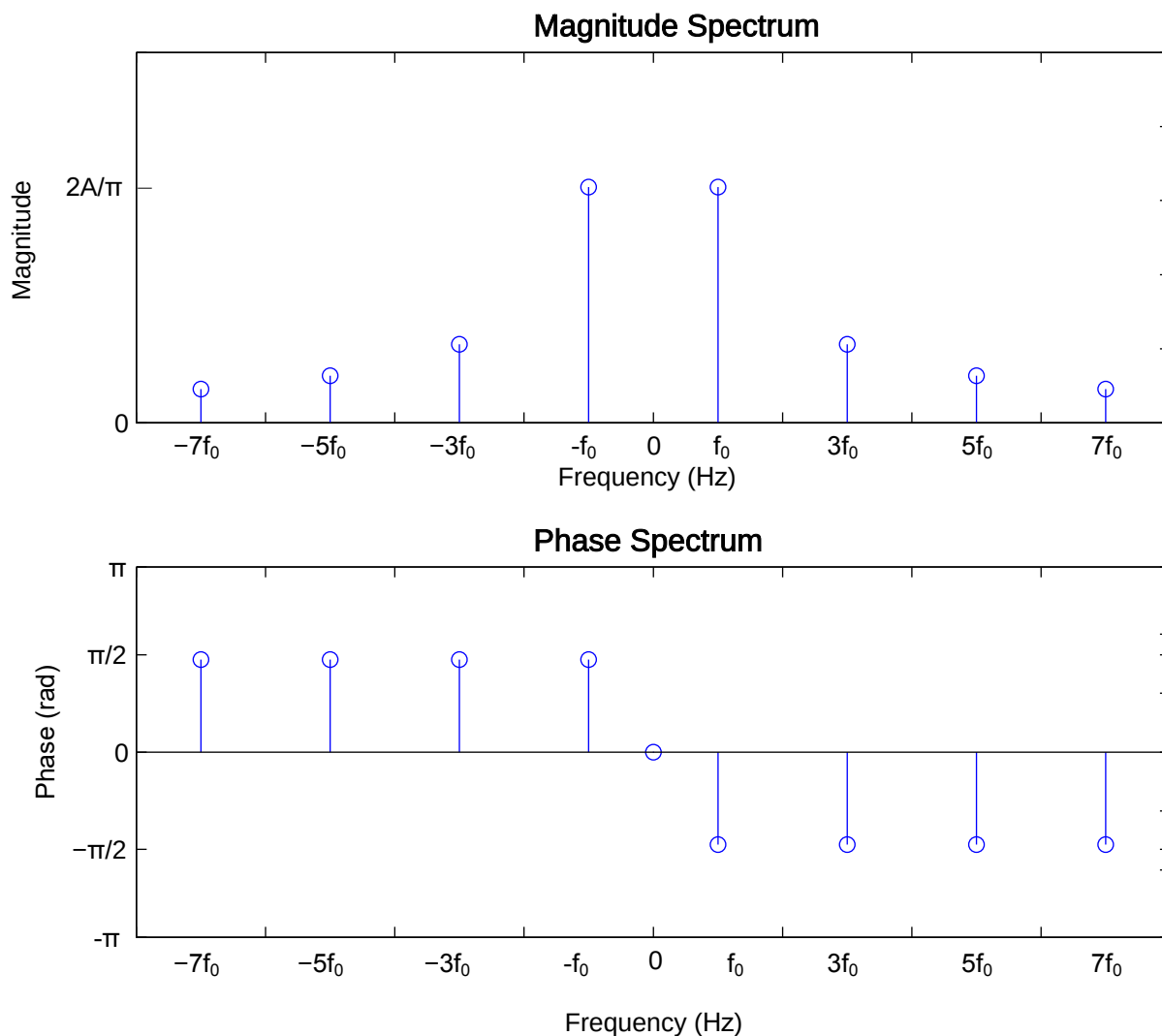
Αυτή λοιπόν είναι η εκθετική σειρά Fourier που αντιστοιχεί στο δεδομένο περιοδικό σήμα  $x(t)$ . Ας βρούμε και τη μονόπλευρη σειρά Fourier.

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2|X_k| \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k) \quad (89)$$

$$= \frac{A}{2} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ περιττά}}}^{+\infty} \frac{4A}{k\pi} \cos\left(2\pi k f_0 t - \frac{\pi}{2}\right) \quad (90)$$

$$= \frac{A}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4A}{(2k-1)\pi} \sin(2\pi(2k-1)f_0 t) \quad (91)$$

Ένα άλλο ερώτημα τώρα... μπορούμε να σχεδιάσουμε φάσμα πλάτους και φάσης από τους συντελεστές  $X_k$  που βρήκαμε; Κάποιος θα μπορούσε να πει “Βεβαίως, γιατί ξέρουμε ότι  $X_k = \frac{2A}{k\pi} e^{-j\pi/2}$ , άρα το  $\frac{2A}{k\pi}$  είναι το μέτρο, το  $-\pi/2$  είναι η φάση, άρα είναι σε μορφή μέτρο-φάση, οπότε είμαστε ΟΚ!”



Σχήμα 13: Φάσμα πλάτους και φάσης Παραδείγματος 1.

Αυτό όμως είναι λάθος, γιατί το  $k$  στον παρονομαστή του  $X_k$  μπορεί να πάρει και αρνητικές τιμές! Αυτό σημαίνει ότι για κάποια  $k$  (τα  $k < 0$ ), το  $\frac{2A}{k\pi}$  θα λάβει αρνητικό πρόσημο, οπότε δεν μπορεί να είναι πλέον μέτρο (δηλ. θετικό).

Αυτό που πρέπει να κάνουμε είναι να διαχωρίσουμε τις καταστάσεις σε περιπτώσεις  $k > 0$  και  $k < 0$ , στη σχέση του  $X_k$  που βρήκαμε. Η φιλοσοφία είναι η ίδια με αυτή όταν συζητούσαμε για αθροίσματα ημιτόνων και τους μιγαδικούς συντελεστές τους. Άρα θα πρέπει να δουλέψουμε ως εξής:

$$X_k = \frac{2A}{k\pi} e^{-j\pi/2} = \begin{cases} \frac{2A}{k\pi} e^{-j\pi/2}, & k > 0, \text{ περιττά} \\ \frac{2A}{(-|k|)\pi} e^{-j\pi/2}, & k < 0, \text{ περιττά} \end{cases} = \begin{cases} \frac{2A}{k\pi} e^{-j\pi/2}, & k > 0, \text{ περιττά} \\ -\frac{2A}{|k|\pi} e^{-j\pi/2}, & k < 0, \text{ περιττά} \end{cases} \quad (92)$$

$$= \begin{cases} \frac{2A}{k\pi} e^{-j\pi/2}, & k > 0, \text{ περιττά} \\ (-1) \frac{2A}{|k|\pi} e^{-j\pi/2}, & k < 0, \text{ περιττά} \end{cases} = \begin{cases} \frac{2A}{k\pi} e^{-j\pi/2}, & k > 0, \text{ περιττά} \\ \frac{2A}{|k|\pi} e^{j\pi} e^{-j\pi/2}, & k < 0, \text{ περιττά} \end{cases} \quad (93)$$

$$= \begin{cases} \frac{2A}{k\pi} e^{-j\pi/2}, & k > 0, \text{ περιττά} \\ \frac{2A}{|k|\pi} e^{j\pi/2}, & k < 0, \text{ περιττά} \end{cases} \quad (94)$$

Αυτό ήταν! :-) Τώρα έχουμε πλέον τη μορφή μέτρου-φάσης που θέλουμε! Το μέτρο είναι

$$|X_k| = \frac{2A}{|k|\pi}, \quad k \in \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7, \dots\} \quad (95)$$

$$X_0 = \frac{A}{2} \quad (96)$$

και η φάση είναι

$$\angle X_k = \phi_k = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & k > 0 \text{ και περιττά} \\ \frac{\pi}{2}, & k < 0 \text{ και περιττά} \end{cases} \quad (97)$$

$$\angle X_0 = 0 \quad (98)$$

Έτσι, ο σχεδιασμός του φάσματος πλάτους και φάσης είναι τετριμμένη υπόθεση, αρκεί να βάλουμε μερικές ενδεικτικές τιμές (λίγες) του  $k$ , στις παραπάνω σχέσεις και να λάβουμε τελικά φάσματα όπως αυτό του Σχήματος 13.

### 2.3.2 Παράδειγμα 2:

Αναπτύξτε σε σειρά Fourier το περιοδικό σήμα που περιγράφεται σε μια περίοδο του  $T_0$  ως

$$x_{T_0}(t) = \begin{cases} A, & 0 < t \leq \frac{T_0}{2} \\ 0, & \frac{T_0}{2} < t \leq T_0 \end{cases} \quad (99)$$

και φαίνεται στο Σχήμα 14.

Λύση:

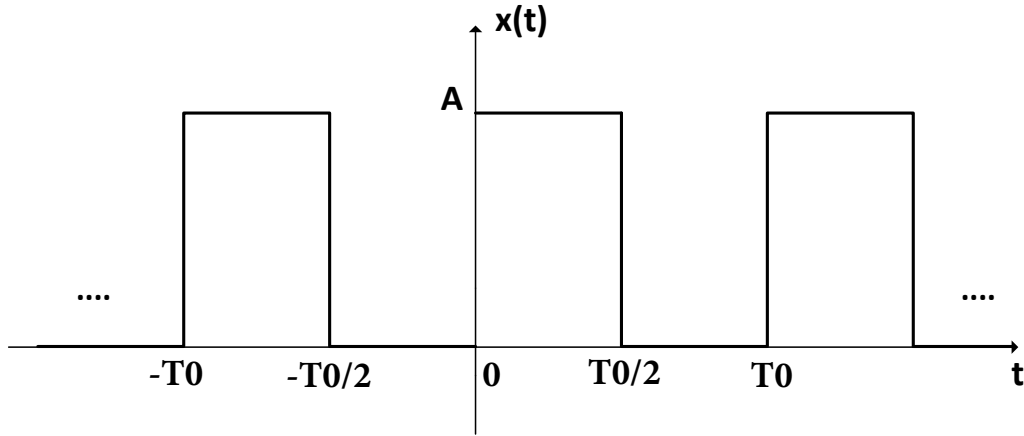
Εφαρμόζοντας τις σχέσεις μας, θα έχουμε

$$X_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} A dt \quad (100)$$

$$= \frac{A}{T_0} \int_0^{T_0/2} dt = \frac{A}{T_0} t \Big|_0^{T_0/2} \quad (101)$$

$$= \frac{A}{T_0} \left( \frac{T_0}{2} - 0 \right) = \frac{AT_0}{2T_0} \quad (102)$$

$$= \frac{A}{2} \quad (103)$$



Σχήμα 14: Περιοδικός Παλμός Παραδείγματος 2.

Εναλλακτικά, θέλουμε το εμβαδό ενός παλμού με ύψος  $A$  που ορίζεται στο  $[0, T_0/2]$  και να το πολλαπλασιάσουμε με  $1/T_0$ . Εμβαδό παραλληλογράμμου δηλαδή, βάση επί ύψος, άρα  $X_0 = A \times T_0/2 = AT_0/2$ , επί το συντελεστή  $1/T_0$ , μας δίνει τελικά  $X_0 = A/2$ , όπως βρήκαμε παραπάνω.. :-)

Επίσης,

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0/2} A e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad (104)$$

$$= \frac{A}{T_0} \int_0^{T_0/2} e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{A}{T_0} \frac{1}{(-j2\pi k f_0)} e^{-j2\pi k f_0 t} \Big|_0^{T_0/2} \quad (105)$$

$$= -\frac{A}{j2\pi k} \left( e^{-j2\pi k f_0 \frac{T_0}{2}} - e^0 \right) = -\frac{A}{j2\pi k} (e^{-j\pi k} - 1) \quad (106)$$

$$= \frac{A}{j2\pi k} (1 - e^{-j\pi k}) \quad (107)$$

Όμως,

$$e^{-j\pi k} = (e^{-j\pi})^k = (-1)^k \quad (108)$$

άρα

$$X_k = \frac{A}{j2\pi k} (1 - e^{-j\pi k}) = \frac{A}{j2\pi k} (1 - (-1)^k) \quad (109)$$

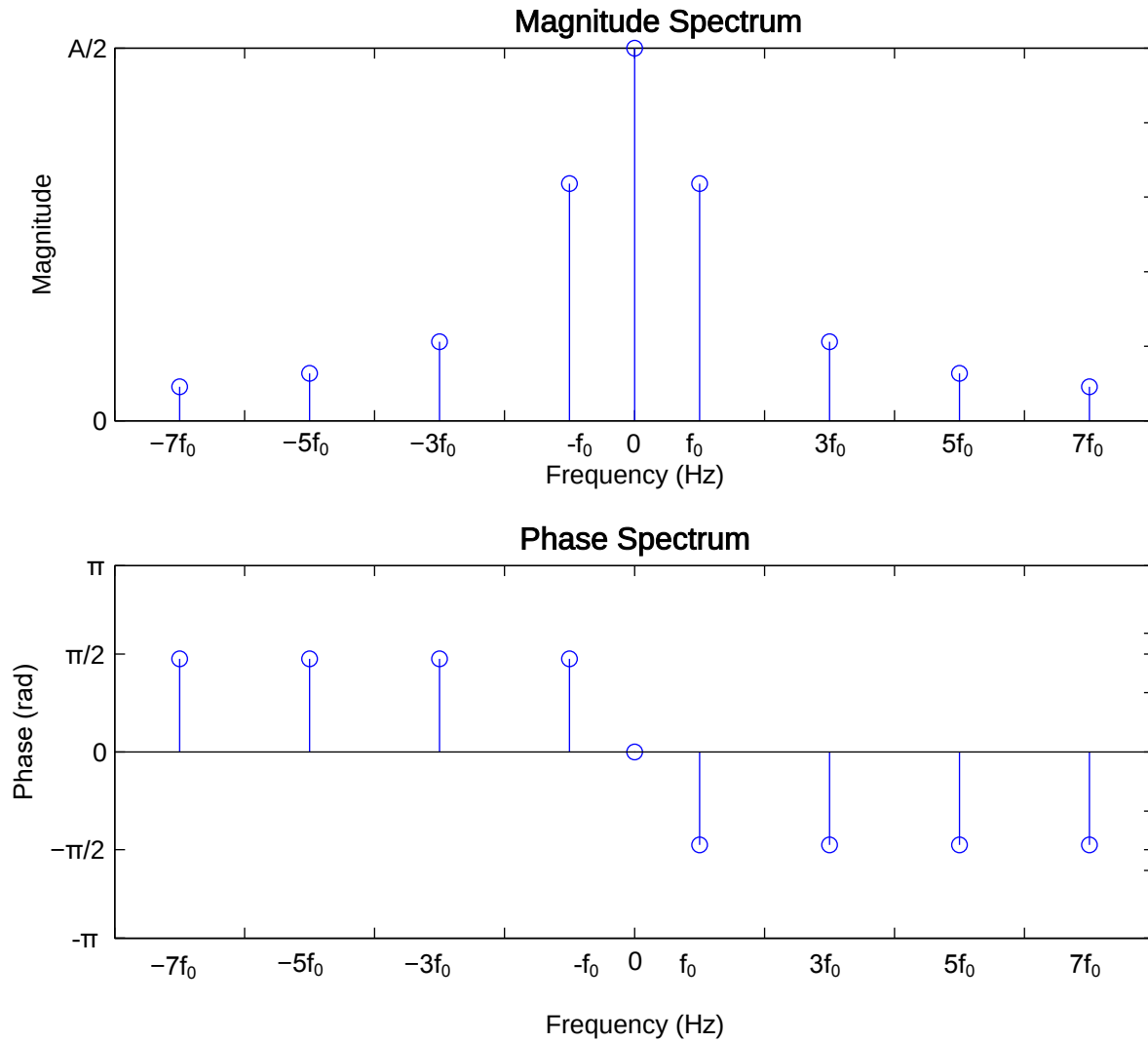
Προφανώς το  $1 - (-1)^k$  είναι μηδέν για  $k$  άρτια, και  $1 - (-1) = 2$  για  $k$  περιττά. Οπότε

$$X_k = \frac{A}{j2\pi k} (1 - (-1)^k) = \begin{cases} \frac{A}{j\pi k}, & k \text{ περιττά} \\ 0, & k \text{ άρτια} \end{cases} = \begin{cases} \frac{A}{\pi k} e^{-j\pi/2}, & k \text{ περιττά} \\ 0, & k \text{ άρτια} \end{cases} \quad (110)$$

Άρα καταλήγουμε ότι

$$x(t) = \frac{A}{2} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \text{ περιττό} \\ k \neq 0}}^{+\infty} \frac{A}{\pi k} e^{-j\pi/2} e^{j2\pi k f_0 t} = \frac{A}{2} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \text{ περιττό} \\ k \neq 0}}^{+\infty} \frac{A}{\pi k} e^{j(2\pi k f_0 t - \pi/2)} \quad (111)$$

Η αντίστοιχη μονόπλευρη σειρά Fourier θα είναι



Σχήμα 15: Φάσμα πλάτους και φάσης Παραδείγματος 2.

$$x(t) = \frac{A}{2} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \text{ περιττό} \\ k \neq 0}}^{+\infty} \frac{A}{\pi k} e^{j(2\pi k f_0 t - \pi/2)} \quad (112)$$

$$= \frac{A}{2} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ περιττό}}}^{+\infty} \frac{2A}{\pi k} \cos(2\pi k f_0 t - \pi/2) \quad (113)$$

$$= \frac{A}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2A}{\pi(2k-1)} \cos(2\pi(2k-1)f_0 t - \pi/2) \quad (114)$$

Μπορούμε τώρα να σχεδιάσουμε το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης. Υπενθυμίζουμε ότι

$$X_k = \frac{A}{\pi k} e^{-j\pi/2} \quad (115)$$

και ότι όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, το  $k$  μπορεί να πάρει και αρνητικές περιττές τιμές, οπότε πρέπει να το

λάβουμε υπόψη μας στη γραφή κατά μέτρο-φάση. Είναι:

$$X_k = \frac{A}{k\pi} e^{-j\pi/2} = \begin{cases} \frac{A}{k\pi} e^{-j\pi/2}, & k > 0, \text{ περιττά} \\ \frac{A}{(-|k|)\pi} e^{-j\pi/2}, & k < 0, \text{ περιττά} \end{cases} = \begin{cases} \frac{A}{k\pi} e^{-j\pi/2}, & k > 0, \text{ περιττά} \\ -\frac{A}{|k|\pi} e^{-j\pi/2}, & k < 0, \text{ περιττά} \end{cases} \quad (116)$$

$$= \begin{cases} \frac{A}{k\pi} e^{-j\pi/2}, & k > 0, \text{ περιττά} \\ (-1) \frac{A}{|k|\pi} e^{-j\pi/2}, & k < 0, \text{ περιττά} \end{cases} = \begin{cases} \frac{A}{k\pi} e^{-j\pi/2}, & k > 0, \text{ περιττά} \\ \frac{A}{|k|\pi} e^{j\pi} e^{-j\pi/2}, & k < 0, \text{ περιττά} \end{cases} \quad (117)$$

$$= \begin{cases} \frac{A}{k\pi} e^{-j\pi/2}, & k > 0, \text{ περιττά} \\ \frac{A}{|k|\pi} e^{j\pi/2}, & k < 0, \text{ περιττά} \end{cases} \quad (118)$$

Άρα τελικά το μέτρο είναι

$$|X_k| = \frac{A}{|k|\pi}, \quad k \in \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7, \dots\} \quad (119)$$

και η φάση είναι

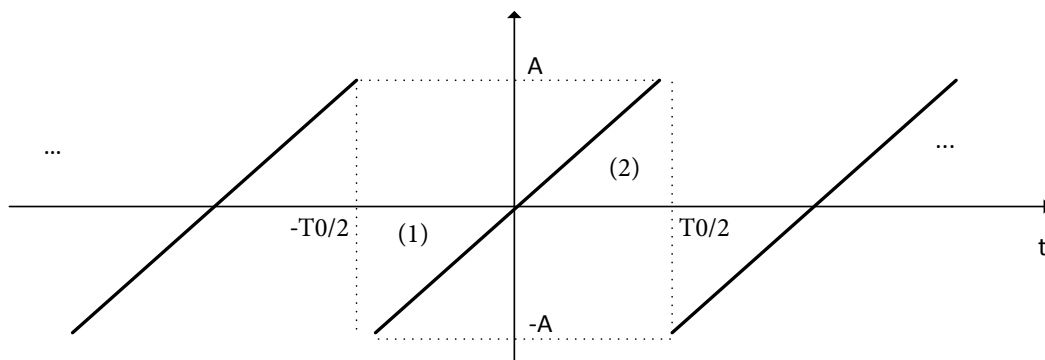
$$\angle X_k = \phi_k = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & k > 0 \text{ και περιττά} \\ \frac{\pi}{2}, & k < 0 \text{ και περιττά} \end{cases} \quad (120)$$

Έτσι, ο σχεδιασμός του φάσματος πλάτους και φάσης είναι τετριμμένη υπόθεση, αρκεί να βάλουμε μερικές ενδεικτικές τιμές (λίγες) του  $k$ , στις παραπάνω σχέσεις και να λάβουμε τελικά φάσματα όπως αυτό του Σχήματος 15.

Προσέξτε ότι τα φάσματα πλάτους και φάσης των Παραδειγμάτων 1 και 2 είναι ολόidia, πλην της τιμής  $X_0$ , που στο Παράδειγμα 1 είναι  $X_0 = 0$  ενώ στο Παράδειγμα 2 είναι  $X_0 = \frac{A}{2}$ . Αυτό το γεγονός, πώς μεταφράζεται στο πεδίο του χρόνου; Δηλ. η μέση τιμή  $X_0$  πώς επιδρά στα σήματα στο χρόνο; Είναι απλό: η μέση τιμή  $X_0$  “ανεβάζει” ή “κατεβάζει” το σήμα  $x(t)$ , ως προς τον άξονα  $y'y$ . Γι’ αυτό και αν προσθέσετε το  $\frac{A}{2}$  στο σήμα του Παραδείγματος 1, θα πάρετε το σήμα του Παραδείγματος 2! :-)

### 2.3.3 Παράδειγμα 3:

Αναπτύξτε σε σειρά Fourier το περιοδικό σήμα που φαίνεται στο Σχήμα 16. Σας δίνεται ότι:



Σχήμα 16: Περιοδικό Σήμα Παραδείγματος 3.

$$\int t e^{at} dt = \frac{e^{at}}{a} \left( t - \frac{1}{a} \right) \quad (121)$$

Λύση:

Επιλέγουμε ως περίοδο το διάστημα  $[-T_0/2, T_0/2]$ . Η πλάγια ευθεία που ορίζεται εκεί περνάει από τα σημεία  $(0, 0)$ ,  $(T_0/2, A)$ , άρα θα έχει τη μορφή

$$y - 0 = \frac{A - 0}{T_0/2 - 0} (t - 0) \iff y = \frac{2A}{T_0} t = x(t) \quad (122)$$

Έτσι θα έχουμε

$$X_0 = \int_0^{T_0} x(t) dt = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \frac{2A}{T_0} t dt = \frac{2A}{T_0} \frac{t^2}{2} \Big|_{-T_0/2}^{T_0/2} = 0 \quad (123)$$

Εναλλακτικά, θέλουμε το εμβαδό του σήματος σε μια περίοδο, επί  $1/T_0$ . Στο διάστημα  $[-T_0/2, T_0/2]$ , έχουμε δυο ορθογώνια τρίγωνα (σημειωμένα με (1), (2) στο Σχήμα), που έχουν εμβαδό  $T_0/2 \times A = \frac{AT_0}{2}$  το καθένα. Όμως το ένα είναι κάτω από τον άξονα ενώ το άλλο επάνω, άρα το αλγεβρικό άθροισμα είναι μηδέν.

Επίσης,

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \frac{2A}{T_0} t e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{2A}{T_0^2} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} t e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad (124)$$

Με χρήση του δοσμένου ολοκληρώματος, θα έχουμε

$$X_k = \frac{2A}{T_0^2} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} t e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{2A}{T_0^2} \left[ \frac{e^{-j2\pi k f_0 t}}{(-j2\pi k f_0)} \left( t - \frac{1}{(-j2\pi k f_0)} \right) \right]_{-T_0/2}^{T_0/2} \quad (125)$$

$$= \frac{2A}{T_0^2} \left( -\frac{e^{-j2\pi k f_0 T_0/2}}{j2\pi k f_0} \left( \frac{T_0}{2} + \frac{1}{j2\pi k f_0} \right) + \frac{e^{j2\pi k f_0 T_0/2}}{j2\pi k f_0} \left( -\frac{T_0}{2} + \frac{1}{j2\pi k f_0} \right) \right) \quad (126)$$

Κάνοντας πράξεις, γνωρίζοντας ότι  $f_0 T_0 = 1$ , και συμμαζεύοντας την κατάσταση :-), έχουμε

$$X_k = \frac{2A}{T_0^2} \frac{e^{-jk\pi}}{(-j2\pi k f_0)} \left( \frac{T_0}{2} + \frac{1}{j2\pi k f_0} \right) + \frac{2A}{T_0^2} \frac{e^{jk\pi}}{j2\pi k f_0} \left( \frac{1}{j2\pi k f_0} - \frac{T_0}{2} \right) \quad (127)$$

$$= \frac{2A T_0}{T_0} \frac{(-1)^k}{2 (-j2\pi k)} + \frac{2A}{T_0} \frac{1}{j2\pi k f_0} \frac{(-1)^k}{(-j2\pi k)} + \frac{2A}{T_0} \frac{1}{j2\pi k f_0} \frac{(-1)^k}{j2\pi k} - \frac{2A T_0}{T_0} \frac{(-1)^k}{2 j2\pi k} \quad (128)$$

$$= -\frac{(-1)^k}{j2\pi k} - 2A \frac{(-1)^k}{(j2\pi k)^2} + 2A \frac{(-1)^k}{(j2\pi k)^2} \quad (129)$$

$$= -A \frac{(-1)^k}{jk\pi} = \frac{A}{k\pi} (-1)^k e^{j\pi/2} \quad (130)$$

Ουφ! Τελικά η πλήρης μορφή της διπλευρης Σειράς Fourier ως

$$x(t) = X_0 + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad (131)$$

$$= \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} \frac{A}{k\pi} (-1)^k e^{j\pi/2} e^{j2\pi k f_0 t} \quad (132)$$

$$= \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} \frac{A}{k\pi} (-1)^k e^{j(2\pi k f_0 t + \pi/2)} \quad (133)$$

Για να σχεδιάσουμε, τέλος, φάσμα πλάτους και φάσμα φάσης πρέπει να γράψουμε τους συντελεστές  $X_k$  σε μορφή μέτρου-φάσης. Εδώ θέλει προσοχή, γιατί όχι μόνο το  $k$  στον παρονομαστή, αλλά και το  $(-1)^k$  του αριθμητή πρέπει να

ληφθεί υπόψη. Άρα

$$X_k = \begin{cases} \frac{A}{k\pi} e^{j\pi/2}, & k \text{ άρτια} \\ -\frac{A}{k\pi} e^{j\pi/2}, & k \text{ περιττά} \end{cases} = \begin{cases} \frac{A}{k\pi} e^{j\pi/2}, & k \text{ άρτια} \\ \frac{A}{k\pi} e^{-j\pi} e^{j\pi/2}, & k \text{ περιττά} \end{cases} = \begin{cases} \frac{A}{k\pi} e^{j\pi/2}, & k \text{ άρτια} \\ \frac{A}{k\pi} e^{-j\pi/2}, & k \text{ περιττά} \end{cases} \quad (134)$$

$$= \begin{cases} \frac{A}{k\pi} e^{j\pi/2}, & k \text{ άρτια, θετικά} \\ \frac{A}{k\pi} e^{-j\pi/2}, & k \text{ περιττά, θετικά} \\ -\frac{A}{|k|\pi} e^{j\pi/2}, & k \text{ άρτια, αρνητικά} \\ -\frac{A}{|k|\pi} e^{-j\pi/2}, & k \text{ περιττά, αρνητικά} \end{cases} = \begin{cases} \frac{A}{k\pi} e^{j\pi/2}, & k \text{ άρτια, θετικά} \\ \frac{A}{k\pi} e^{-j\pi/2}, & k \text{ περιττά, θετικά} \\ \frac{A}{|k|\pi} e^{-j\pi} e^{j\pi/2}, & k \text{ άρτια, αρνητικά} \\ \frac{A}{|k|\pi} e^{j\pi} e^{-j\pi/2}, & k \text{ περιττά, αρνητικά} \end{cases} \quad (135)$$

$$= \begin{cases} \frac{A}{k\pi} e^{j\pi/2}, & k \text{ άρτια, θετικά} \\ \frac{A}{k\pi} e^{-j\pi/2}, & k \text{ περιττά, θετικά} \\ \frac{A}{|k|\pi} e^{-j\pi} e^{j\pi/2}, & k \text{ άρτια, αρνητικά} \\ \frac{A}{|k|\pi} e^{j\pi} e^{-j\pi/2}, & k \text{ περιττά, αρνητικά} \end{cases} = \begin{cases} \frac{A}{k\pi} e^{j\pi/2}, & k \text{ άρτια, θετικά} \\ \frac{A}{k\pi} e^{-j\pi/2}, & k \text{ περιττά, θετικά} \\ \frac{A}{|k|\pi} e^{-j\pi/2}, & k \text{ άρτια, αρνητικά} \\ \frac{A}{|k|\pi} e^{j\pi/2}, & k \text{ περιττά, αρνητικά} \end{cases} \quad (136)$$

Τώρα πλέον είναι εμφανές ότι

$$|X_k| = \frac{A}{|k|\pi}, \quad k \in Z - \{0\} \quad (137)$$

και

$$\angle X_k = \phi_k = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & k > 0 \text{ και άρτια, } k < 0 \text{ και περιττά} \\ -\frac{\pi}{2}, & k > 0 \text{ και περιττά, } k < 0 \text{ και άρτια} \end{cases} \quad (138)$$

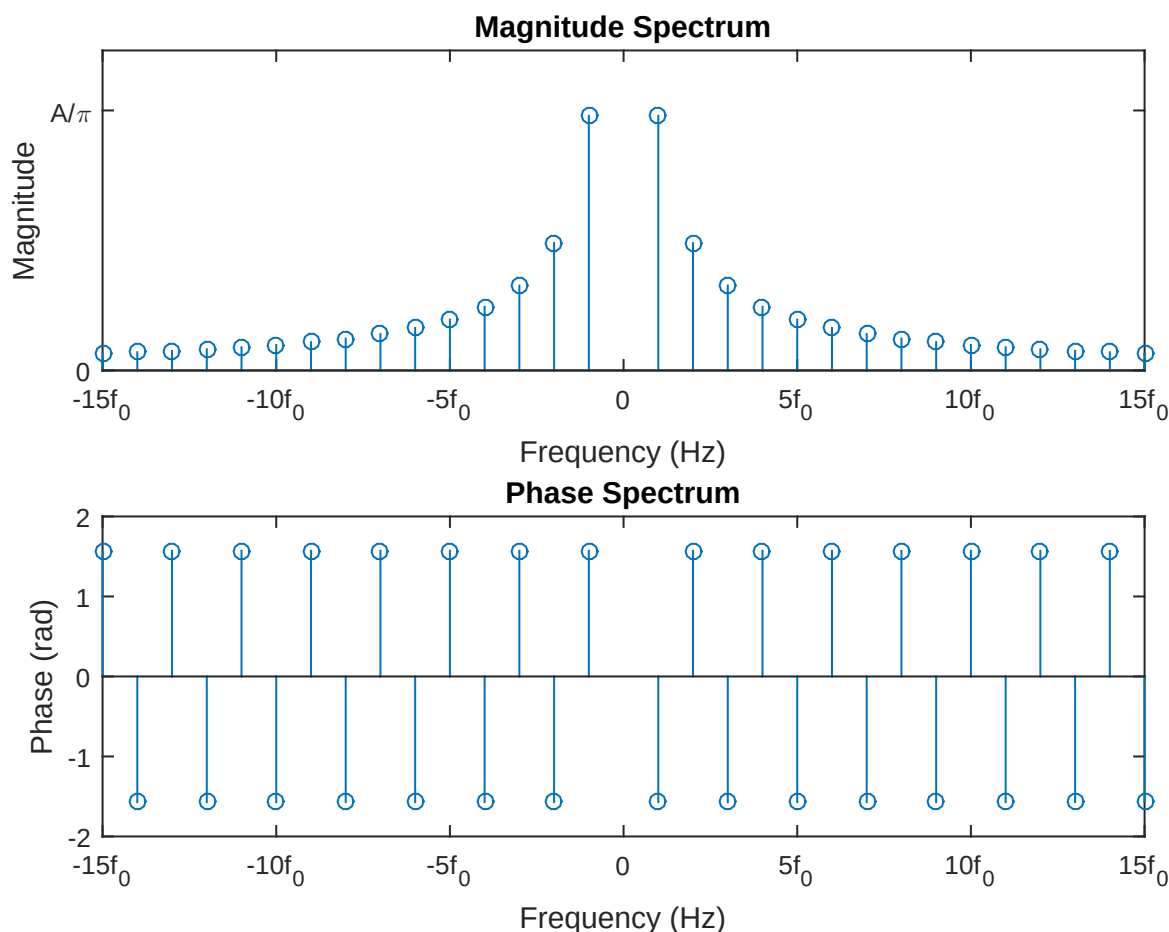
Οπότε το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης φαίνεται στο Σχήμα 17.

## 2.4 Μερικές ακόμα παρατηρήσεις

1. Τα μαθηματικά που περιγράφουν την ανάλυση Fourier πρέπει να σας είναι ξεκάθαρα, σαν απλά μαθηματικά. Το πρόβλημα είναι ότι δεν πρέπει να αρκείστε σε αυτό. Πρέπει να καταλάβετε πώς αυτά ερμηνεύονται απ'τη σκοπιά του μηχανικού. Δείξαμε ότι κάθε *πραγματικό, περιοδικό σήμα* μπορεί να γραφεί στη μορφή μονόπλευρου αναπτύγματος σε σειρά Fourier ως

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k) \quad (139)$$

όπου  $A_0 = X_0$ ,  $A_k = 2|X_k|$ , και  $\phi_k = \angle X_k$ . Είναι προφανές ότι η Σχέση (139) προκύπτει ΑΜΕΣΑ, αν έχουμε βρει όλους τους αγνώστους της Σχέσης (37). :-) Αυτή η σχέση είναι ΠΛΗΡΩΣ ισοδύναμη με την αντίστοιχη σχέση των εκθετικών. Μάλιστα υπάρχουν τύποι για τον υπολογισμό των  $A_k$  χωρίς τη χρήση του  $X_k$ .



Σχήμα 17: Φάσμα πλάτους και φάσης Παραδείγματος 3.

2. Πώς προέκυψαν αυτοί οι τύποι όμως; Ειδικά οι τύποι με τα ολοκληρώματα των  $X_k$  είναι αρκετά περίεργοι. Τι σημαίνουν; Γιατί εκείνα τα ολοκληρώματα δίνουν τους συντελεστές  $X_k$ ; Γιατί πολλαπλασιάζουμε το  $x(t)$  με  $e^{-j2\pi k f_0 t}$  και μετά ολοκληρώνουμε; Η απάντηση δίνεται από την έννοια της *προβολής σήματος σε έναν χώρο σημάτων*. Έχετε δει τη φιλοσοφία αυτής της προσέγγισης στις διαλέξεις.

Αν θέλαμε να περιγράψουμε διαισθητικά την ανάλυση Fourier (όχι μόνο τη Σειρά, αλλά και κάθε άλλη συχνοτική ανάλυση που θα δούμε), τότε μια ταιριαστή αναλογία είναι αυτή της συνταγής ενός ανάμεικτου χυμού φρούτων! :-) Το ολοκλήρωμα  $X_k$  παίρνει το χυμό ( $x(t)$ ) και μας βρίσκει τη “συνταγή”. Πώς; Περνά το χυμό ( $x(t)$ ) μέσα από μια σειρά από  $k$  φίλτρα ( $e^{-j2\pi k f_0 t}$ ), όπου το κάθε φίλτρο κρατά μόνο ένα συστατικό του χυμού και μας λέει μάλιστα και την ποσότητα ( $X_k$ ) που υπάρχει! Η διαδικασία όμως πρέπει να είναι αναστρέψιμη, δηλ. πρέπει να μπορούμε αναμειγνύοντας ξανά τα συστατικά ( $e^{j2\pi k f_0 t}$ ) στις σωστές ποσότητες ( $X_k$ ) να πάρουμε πίσω το χυμό ( $x(t)$ ): αυτό το αναλαμβάνει το άθροισμα της σειράς Fourier!

Για να μπορεί όμως να ισχύσει μια τέτοια διαδικασία πρέπει:

- (α) **Τα φίλτρα να είναι ανεξάρτητα:** το φίλτρο που “πιάνει” το χυμό μπανάνα πρέπει να πιάνει μόνο χυμό μπανάνας, και τίποτε άλλο. Αν περάσουμε από το φίλτρο αυτό μερικά πορτοκάλια, η ένδειξη θα πρέπει να δείχνει μηδέν. Αυτό, στην ορολογία των μαθηματικών εξασφαλίζεται από τη *γραμμική ανεξαρτησία* των συναρτήσεων  $e^{-j2\pi k f_0 t}$ . Γνωρίζετε από τη Γραμμική Άλγεβρα την έννοια της ανεξαρτησίας: σε ένα σύνολο διανυσμάτων, ένα οποιοδήποτε από αυτά δεν μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. Στα δικά μας ενδιαφέροντα, η έννοια αυτή σημαίνει ότι ένα μιγαδικό εκθετικό  $e^{-j2\pi k f_0 t}$  πρέπει να μην περιέχει πληροφορία για το μιγαδικό εκθετικό  $e^{-j2\pi (k+1) f_0 t}$ , που πράγματι συμβαίνει, γιατί τα μιγαδικά

εκθετικά είναι *ορθογώνια* μεταξύ τους<sup>7</sup>

(β) **Τα φίλτρα πρέπει να είναι πλήρη:** τα φίλτρα μας πρέπει να “πιάνουν” μέχρι και το τελευταίο συστατικό του χυμού. Δε θα μπορέσουμε ποτέ να φτιάξουμε τον αρχικό χυμό ( $x(t)$ ) αν π.χ. λείπει το φίλτρο για το χυμό ροδάκινο. :-) Αυτό εξασφαλίζεται από το ότι η προβολή του σήματος  $x(t)$  γίνεται επάνω σε κάθε συχνότητα πολλαπλάσια της θεμελιώδους.

(γ) **Τα συστατικά πρέπει να είναι “συνδυάσιμα”:** Τα συστατικά πρέπει να δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα ανεξαρτήτως της σειράς με την οποία συνδυάζονται.

3. Μετά από το παραπάνω πολύ διαισθητικό παράδειγμα, ας πάμε λίγο στην πραγματικότητα! :-) Έστω ότι αναλύουμε ένα περιοδικό σήμα  $x(t)$ , και ένας συντελεστής Fourier είναι  $X_3 = 2e^{j\pi/4}$ , τότε αυτό τι μας λέει; Δεδομένου ότι το περιοδικό σήμα συντίθεται από μιγαδικά εκθετικά ως

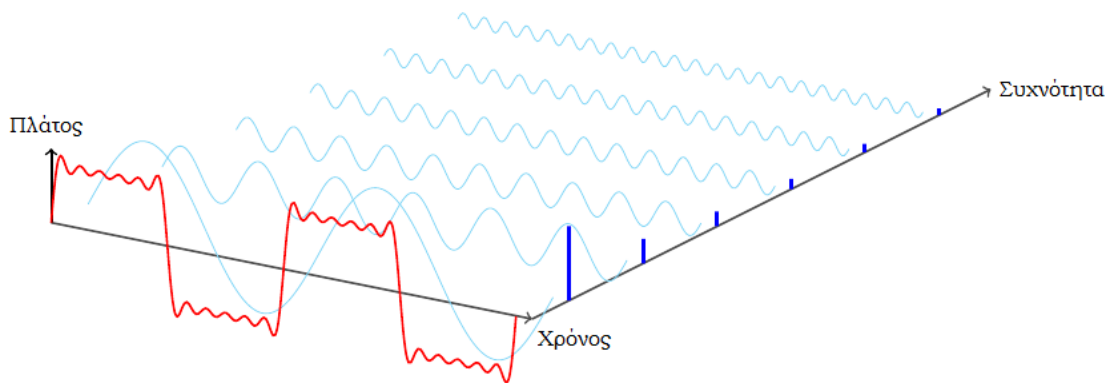
$$x(t) = X_0 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad (141)$$

ο προαναφερθέντας συντελεστής μας λέει ότι το εκθετικό  $e^{j2\pi 3 f_0 t}$  συνεισφέρει στη σύνθεση του σήματος με πλάτος 2 και φάση  $\pi/4$ . Αν αυτό σας φαντάζει κάπως δυσνόητο (αν και δε θα έπρεπε), τότε αφού το σήμα είναι πραγματικό, θα έχει και ένα συντελεστή  $X_3^* = 2e^{-j\pi/4}$ . Αν προσθέσουμε τα εκθετικά  $X_3 e^{j2\pi 3 f_0 t} + X_3^* e^{-j2\pi 3 f_0 t}$  θα έχουμε:

$$X_3 e^{j2\pi 3 f_0 t} + X_3^* e^{-j2\pi 3 f_0 t} = 2e^{j(2\pi 3 f_0 t + \pi/4)} + 2e^{-j(2\pi 3 f_0 t + \pi/4)} = 4 \cos(2\pi 3 f_0 t + \pi/4) \quad (142)$$

Αυτό ξεκάθαρα δηλώνει ότι το περιοδικό σήμα που αναλύουμε περιέχει τον όρο  $4 \cos(2\pi 3 f_0 t + \pi/4)$ , με άλλα λόγια, για να κατασκευάσουμε το σήμα που αναλύουμε είναι *αναγκαίο* να χρησιμοποιήσουμε ένα ημίτονο με συχνότητα  $f_3 = 3f_0$ , πλάτος  $A = 4$ , και φάση  $\phi = \pi/4$  (μεταξύ άλλων ημιτονών, πιθανότατα). Έτσι λοιπόν, τώρα σας είναι ξεκάθαρο τι ακριβώς σημαίνουν οι συντελεστές Fourier όσον αφορά τη σημασία τους στην ανάλυση και στη σύνθεση.

4. Φυσικά παρατηρείτε ότι η σειρά Fourier αποτελείται από άπειρα εκθετικά (ή ημίτονα). Στην πράξη, δεν μπορούμε να έχουμε άπειρα ημίτονα. Αναγκαστικά κρατάμε έναν αριθμό από αυτά. Δείτε παρακάτω τη σχετική παράγραφο *Σειρές Fourier στην πράξη*, για το πως η πρόσθεση όλων αυτών των ημιτόνων δίνει το αρχικό, περιοδικό σήμα. Το Σχήμα 18 δείχνει ένα πολύ γνωστό σας - πλέον :- ) - σήμα και το πώς αυτό προσεγγίζεται σιγά σιγά από το



Σχήμα 18: Ανάλυση πραγματικού σήματος σε ημίτονα

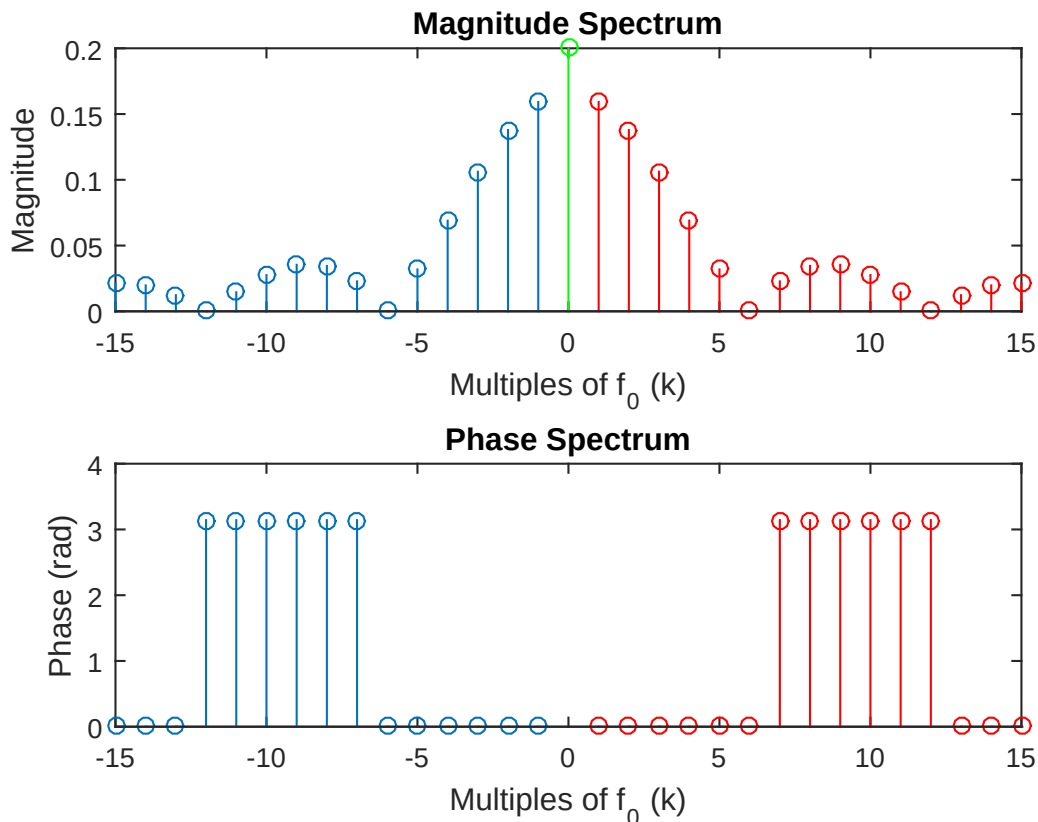
άθροισμα των ημιτόνων, τα οποία έχουν συχνότητες πολλαπλάσιες της  $f_0$ , η οποία σχετίζεται με την περίοδο του σήματος ως  $T_0 = 1/f_0$ . Παρατηρήστε ότι στα άκρα του παλμού υπάρχει μια ταλάντωση. Αυτή η ταλάντωση ονομάζεται *φαινόμενο Gibbs* και δεν εξαλείφεται στην πράξη, λόγω του ότι πάντα χρησιμοποιούμε πεπερασμένο

<sup>7</sup>Ορθογώνια λέγονται δυο σήματα για τα οποία ισχύει η σχέση

$$\int f(t)x(t)dt = 0 \quad (140)$$

αριθμό ημιτόνων για να προσεγγίσουμε το περιοδικό σήμα. Οφείλεται στο γεγονός ότι η ασυνέχεια του παλμού (αυτές οι ακαριαίες άνοδοι και κάθοδοι του περιοδικού σήματος) δεν μπορεί να προσεγγιστεί από πεπερασμένο αριθμό συνεχών συναρτήσεων (ημίτονα).

5. Η ανάλυση σε σειρές Fourier εφαρμόζεται σε περιοδικά σήματα, δηλ. σε σήματα άπειρης διάρκειας που έχουν το χαρακτήρα της περιοδικότητας. Αυτά τα σήματα λέγονται *σήματα ισχύος*, διότι έχουν πεπερασμένη ισχύ και άπειρη ενέργεια.
6. Τέλος, είδαμε ότι μια βολική αναπαράσταση της ανάλυσης σε σειρές Fourier είναι η σχεδίαση του *φάσματος πλάτους* και του *φάσματος φάσης*. Οι φασματικές αναπαραστάσεις (και οι δυο μαζί) μας δίνουν ΟΛΗ την απαραίτητη πληροφορία για το περιοδικό σήμα. Με άλλα λόγια, αν έχουμε τις φασματικές αναπαραστάσεις, μπορούμε να γράψουμε την σειρά Fourier που αυτές αντιπροσωπεύουν. Σημαντικό: Θυμίζεται ότι στο φάσμα πλάτους αναπαριστούμε το  $|X_k|$ , δηλ. το πως αλλάζει το πλάτος των συντελεστών ανά συχνότητα, ενώ στο φάσμα φάσης το  $\angle X_k$ , που δηλώνει το πως αλλάζει η φάση των συντελεστών ανά συχνότητα. Για παράδειγμα, στο Σχήμα 19, βλέπετε το φάσμα πλάτους και φάσμα φάσης ενός περιοδικού σήματος. Βλέπετε ότι οι μπλε τιμές του  $|X_k|$  αντιστοιχούν



Σχήμα 19: Φάσμα πλάτους (πάνω) και φάσμα φάσης (κάτω) ενός περιοδικού σήματος

στα αρνητικά  $k$ , ενώ οι κόκκινες τιμές του  $|X_k|$  αντιστοιχούν στα θετικά  $k$ . Η πράσινη τιμή είναι η μέση τιμή του σήματος, το  $X_0$ . Όμοια και για τις τιμές της φάσης,  $\angle X_k$ . Βλέπετε ότι για τις τιμές  $k = \pm k_0$ , οι τιμές του φάσματος  $|X_{k_0}|$  είναι ίδιες, και οι τιμές του φάσματος φάσης  $\angle X_{k_0}$  είναι αντίθετες. Άρα τα φάσματα αυτά αντιστοιχούν σε πραγματικό σήμα, γιατί ικανοποιούν την ιδιότητα  $X_k^* = X_{-k}$ . Θυμίζεται ότι ένα πραγματικό σήμα έχει *άρτιο* φάσμα πλάτους και *περιττό* φάσμα φάσης. ;-)

7. Προσέξτε ότι το μέτρο των συντελεστών Fourier,  $|X_k|$ , είναι σταθερό ή φθίνει και τείνει στο 0 όσο το  $k \rightarrow +\infty$ . Αυτό είναι ΚΑΝΟΝΑΣ στο φάσμα πλάτους, όταν έχουμε άπειρα  $X_k$ . Δε θα μπορούσαν τα  $|X_k|$  να αυξάνονται, γιατί ένα τέτοιο άθροισμα  $|X_k|$  θα έδινε συνολικά άπειρο πλάτος στο περιοδικό σήμα. Έχοντας αυτό στο μυαλό σας, και την προηγούμενη παρατήρηση, μπορείτε να ελέγχετε τις απαντήσεις σας στο φάσμα πλάτους σε θεωρητικές ασκήσεις. Τονίζεται ότι το παραπάνω ισχύει όταν αναλύουμε ένα περιοδικό σήμα σε ΑΠΕΙΡΑ ημίτονα. Όταν π.χ.

έχουμε ένα άθροισμα

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^N A_k \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k) \quad (143)$$

ή

$$x(t) = \sum_{k=-N}^N X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad (144)$$

τότε έχουμε πεπερασμένου πλήθους ημίτονα ( $N$  στην πρώτη περίπτωση, πόσα στη δεύτερη; - quiz - :-)), άρα τα  $A_k$  ή τα  $X_k$  μπορούν να έχουν όποια κατανομή θέλουν, όσο αυξάνει το  $k$ . Φυσικά αν αυτά τα  $N$  ημίτονα προέρχονται ως προσέγγιση άπειρου πλήθους ημιτόνων, προφανώς θα ακολουθούν την κατανομή που συζητήσαμε (σταθερό ή φθίνον πλάτος  $|X_k|$ ).

8. Σίγουρα ένα στοιχείο που θα σας ξενίζει αρκετά είναι αυτό των αρνητικών συχνοτήτων στα εκθετικά. Ξέρουμε ότι συχνότητα είναι ο αριθμός επαναλήψεων ενός σήματος στη μονάδα του χρόνου, και αναμφίβολα αυτός ο αριθμός είναι μια θετική ποσότητα. Δεν μπορούμε να έχουμε  $f_0 = -4$  επαναλήψεις ανά δευτερόλεπτο! :-) Πώς ερμηνεύεται μια αρνητική συχνότητα; Χρησιμοποιώντας μια γνωστή ταυτότητα, μπορούμε να εκφράσουμε ένα ημίτονο αρνητικής συχνότητας  $-f_0$  ως

$$\cos(-2\pi f_0 t + \theta) = \cos(-(2\pi f_0 t - \theta)) = \cos(2\pi f_0 t - \theta) \quad (145)$$

Αυτή η εξίσωση δείχνει καθαρά ότι η συχνότητα του ημιτόνου είναι  $|f_0|$ , και είναι θετική. Πώς τώρα όμως ερμηνεύουμε τις φασματικές γραμμές στις αρνητικές συχνότητες; Ένας ασφαλής τρόπος είναι να πούμε απλά ότι το φάσμα είναι μια γραφική αναπαράσταση των συντελεστών  $|X_k|$  συναρτήσει του  $f$ . Η παρουσία αρνητικών συχνοτήτων απλά σημαίνει ότι υπάρχει ένα εκθετικό μιας τέτοιας αρνητικής συχνότητας στη σειρά Fourier που αναλύουμε. Απλό, έτσι δεν είναι; :-D Επίσης, έχετε υπόψη σας ότι δυο εκθετικά στις συχνότητες  $2\pi k f_0$  και  $-2\pi k f_0$ , ιδίου μέτρου  $A$ , δίνουν ένα ημίτονο πλάτους  $2A$  στη συχνότητα  $2\pi k f_0$ .

9. Ας πούμε και δυο κουθέντες για το περίφημο θεώρημα του Parseval. Ας ξαναγράψουμε εδώ τις αναπαραστάσεις κατά Fourier που έχουμε δει:

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k) \quad (146)$$

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad (147)$$

Ας δούμε τη Σχέση (146) πρώτα. Κάθε όρος στο δεξιό μέρος είναι ένα περιοδικό σήμα, δηλ. ένα σήμα ισχύος. Αποδεικνύεται ότι η ισχύς του αθροίσματος συνημιτόνων ισούται με το άθροισμα των ισχύων των επιμέρους συνημιτόνων. Άρα η ισχύς του  $x(t)$  είναι ίση με το άθροισμα των επιμέρους ισχύων των συνημιτόνων που το αποτελούν. Αυτό σημαίνει ότι

$$P_x = A_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k^2}{2} \quad (148)$$

και αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως το θεώρημα του Parseval: δηλώνει ότι η ισχύς ενός περιοδικού σήματος είναι ίση με το άθροισμα των ισχύων των συντελεστών Fourier. Φυσικά μπορούμε να γράψουμε το ίδιο και για το εκθετικό ανάπτυγμα Fourier:

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \Rightarrow P_x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X_k|^2 \quad (149)$$

10. Τελευταία παρατήρηση, διασκεδαστικής και ιστορικής φύσεως.... τα “Στοιχεία” του Αλεξανδρινού μαθηματικού Ευκλείδη είναι ένα από τα σημαντικότερα μαθηματικά έργα στην ιστορία της ανθρωπότητας. Η μελέτη και εμπέδωση των 13 βιβλίων των “Στοιχείων” ήταν και παραμένει ζόρικη υπόθεση! :-) Κάποια στιγμή, ο βασιλιάς

της Αλεξάνδρειας, Πτολεμαίος ο Α', ζήτησε από τον Ευκλείδη έναν τρόπο να μάθει Γεωμετρία πιο εύκολο από τη μελέτη των "Στοιχείων". Η απάντηση του μεγάλου μαθηματικού ήταν λακωνική, σαφής, και έμεινε στην Ιστορία: "Δεν υπάρχει βασιλική οδός για τη Γεωμετρία!".

Αν λοιπόν ζούσε σήμερα ο J. B. Fourier, και τον ρωτούσατε ποιός είναι ο πιο εύκολος τρόπος να μάθετε Σειρές Fourier, θα σας απαντούσε όπως ο μεγάλος μαθηματικός της Αρχαιότητας: "Δεν υπάρχει εύκολος δρόμος για τις Σειρές Fourier!". Αυτό σημαίνει ότι για τις Σειρές Fourier απαιτείται αρκετή *εξάσκηση*!

### 3 Ιδιότητες Σειρών Fourier

Υπάρχουν πολλές χρήσιμες ιδιότητες των σειρών Fourier, που θα σας λύσουν τα χέρια σε πολλές εφαρμογές. Ο Πίνακας 1 απεικονίζει τις περισσότερες, χωρίς απόδειξη (οι περισσότερες, αν όχι όλες, αποδεικνύονται με χρήση του ορισμού).

| Ιδιότητες σειρών Fourier |                                        |                                                                                                                                                                |
|--------------------------|----------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Ιδιότητα                 | Περιοδικό σήμα                         | Συντελεστές Fourier                                                                                                                                            |
|                          | $x(t)$ περιοδικό με περίοδο $T_0$      | $X_k$                                                                                                                                                          |
|                          | $y(t)$ περιοδικό με περίοδο $T_0$      | $Y_k$                                                                                                                                                          |
| Γραμμικότητα             | $Ax(t) + By(t)$                        | $AX_k + BY_k$                                                                                                                                                  |
| Χρονική μετατόπιση       | $x(t - t_0)$                           | $X_k e^{-j2\pi k f_0 t_0}$                                                                                                                                     |
| Μετατόπιση στη συχνότητα | $e^{j2\pi k f_0 M t} x(t)$             | $X_{k-M}$                                                                                                                                                      |
| Συζυγές σήμα στο χρόνο   | $x^*(t)$                               | $X_{-k}^*$                                                                                                                                                     |
| Αντιστροφή στο χρόνο     | $x(-t)$                                | $X_{-k}$                                                                                                                                                       |
| Στάθμιση στο χρόνο       | $x(at), a > 0$                         | $X_k$ , με περίοδο $T_0/a$                                                                                                                                     |
| Περιοδική συνέλιξη       | $\int_{T_0} x(\tau)y(t - \tau)d\tau$   | $T_0 X_k Y_k$                                                                                                                                                  |
| Πολλαπλασιασμός          | $x(t)y(t)$                             | $\sum_{l=-\infty}^{\infty} X_l Y_{k-l}$                                                                                                                        |
| Παραγωγή                 | $\frac{dx(t)}{dt}$                     | $j2\pi k f_0 X_k$                                                                                                                                              |
| Ολοκλήρωση               | $\int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau$        | $\frac{X_k}{j2\pi k f_0}$                                                                                                                                      |
| Συζυγής συμμετρία        | $x(t)$ πραγματικό                      | $\begin{cases} X_k = X_{-k}^*, \\ \Re\{X_k\} = \Re\{X_{-k}\}, \\ \Im\{X_k\} = -\Im\{X_{-k}\}, \\  X_k  =  X_{-k} , \\ \angle X_k = -\angle X_{-k} \end{cases}$ |
| Άρτιο μέρος              | $x_e(t) = Ev\{x(t)\}, x(t)$ πραγματικό | $\Re\{X_k\}$                                                                                                                                                   |
| Περιττό μέρος            | $x_o(t) = Od\{x(t)\}, x(t)$ πραγματικό | $j\Im\{X_k\}$                                                                                                                                                  |
| Θεώρημα του Parseval     | $\frac{1}{T_0} \int_{T_0}  x(t) ^2 dt$ | $\sum_{k=-\infty}^{\infty}  X_k ^2$                                                                                                                            |

Πίνακας 1: Πίνακας Ιδιοτήτων των σειρών Fourier

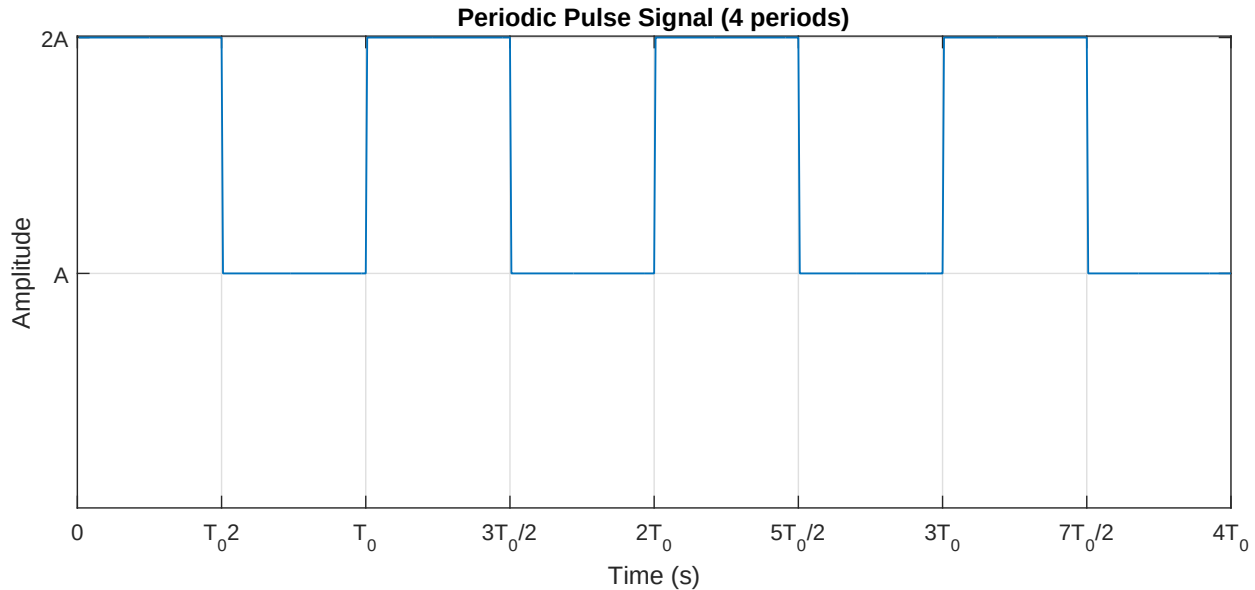
### 4 Οι σειρές Fourier στην πράξη

Η παράγραφος αυτή δεν έχει σκοπό τόσο να σας δείξει πώς αναπτύσσεται θεωρητικά ένα περιοδικό σήμα σε Σειρά Fourier, αλλά να δείξει πώς **σχηματίζεται** ένα περιοδικό σήμα από τα ημίτονα της Σειράς Fourier, καθώς και τι εννοούμε όταν λέμε ότι ένα σήμα **περιέχει** κάποιες συχνότητες.

Έστω λοιπόν το περιοδικό σήμα  $x(t)$  που περιγράφεται σε μια περίοδο του  $T_0$  ως:

$$x(t) = \begin{cases} 2A, & 0 \leq t < \frac{T_0}{2} \\ A, & \frac{T_0}{2} \leq t < T_0 \end{cases}$$

το οποίο θέλουμε να το αναπτύξουμε σε σειρά Fourier. Τέσσερις περίοδοι του σχήματος αυτού φαίνονται παρακάτω, στο Σχήμα 20. Αποδείξτε μόνοι σας - εξάσκηση! :- ) - ότι:



Σχήμα 20: Τέσσερις περίοδοι ενός περιοδικού σήματος

$$X_0 = \frac{3A}{2}, X_k = \frac{A}{2\pi k} e^{-j\frac{\pi}{2}} (1 - (-1)^k) = \begin{cases} \frac{A}{\pi k} e^{-j\frac{\pi}{2}}, & k \text{ περιττός} \\ 0, & k \text{ άρτιος} \end{cases} \quad (150)$$

Έστω λοιπόν ότι αποδείξατε τα παραπάνω. :- ) Έτσι, το περιοδικό σήμα που συζητάμε αναπτύσσεται σε σειρά Fourier ως εξής:

$$x(t) = \frac{3A}{2} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \text{ περιττός}}}^{+\infty} \frac{A}{\pi k} e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{j2\pi k f_0 t} = \frac{3A}{2} + \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{2A}{\pi(2l-1)} \cos\left(2\pi(2l-1)f_0 t - \frac{\pi}{2}\right) \quad (151)$$

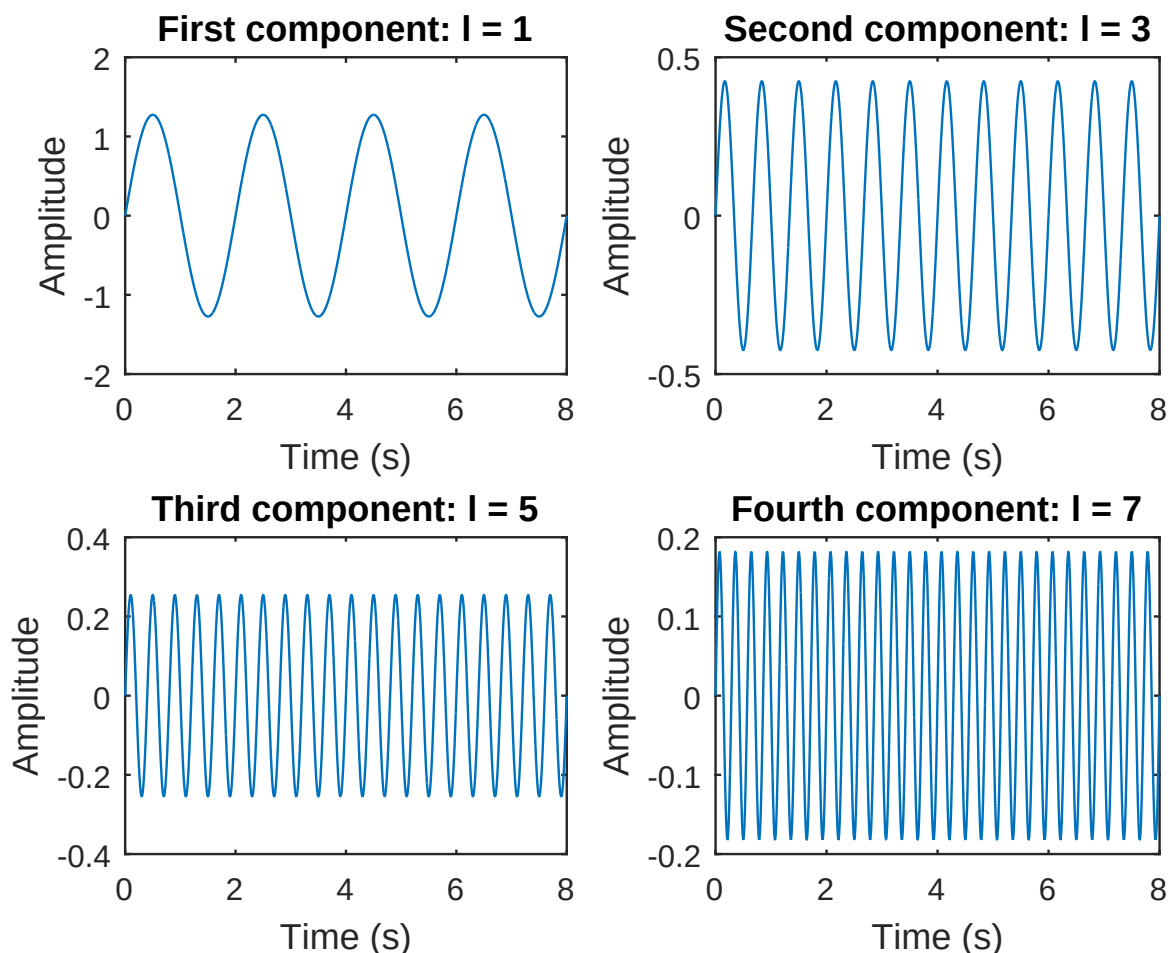
(ουσιαστικά θέσαμε παραπάνω  $k = 2l - 1$ . Ο συμβολισμός με το  $l$  αντί για  $k$  έγινε για να μπορούμε να ξεχωρίζουμε σε ποιό δείκτη αναφερόμαστε στη διάρκεια του κειμένου - δεν είναι λάθος να κρατήσουμε το δείκτη  $k$  παντού).

Θα χρησιμοποιήσουμε MATLAB για να δούμε πως σχηματίζεται το σήμα από το άθροισμα αυτών των συνημιτόνων. Για πρακτικούς λόγους, ας ορίσουμε ότι  $A = 2$  και  $T_0 = 2 \Rightarrow f_0 = \frac{1}{2}$  Hz. Γράφοντας κατάλληλο κώδικα, ας δούμε πως σχηματίζεται σιγά σιγά το περιοδικό σήμα μας από το άθροισμα αυτών των συνημιτόνων που βρήκαμε παραπάνω. Προτού το δούμε αυτό, ας δούμε ένα-ένα τα πρώτα λίγα συνημίτονα του παραπάνω αθροίσματος στα Σχήματα 21.

Όλα αυτά τα συνημίτονα έχουν συχνότητα ακέραια πολλαπλάσια της θεμελιώδους συχνότητας  $f_0 = 0.5$  Hz. Βλέπετε ότι όσο προχωράμε προς τις υψηλότερες αρμονικές συχνότητες, τόσο η συχνότητα των συνημιτόνων μεγαλώνει και το πλάτος τους φθίνει. Λογικό, αν σκεφτούμε αυτό που μόλις είπαμε για τις αρμονικές και την παρατήρηση για τα πλάτη σε προηγούμενη παράγραφο. Το πρώτο συνημίτονο του αθροίσματος έχει συχνότητα  $(2l-1)f_0 = (2 \times 1 - 1)f_0 = f_0$ , το δεύτερο έχει συχνότητα  $(2 \times 2 - 1)f_0 = 3f_0$ , το τρίτο  $5f_0$ , ..., το 21ο έχει συχνότητα  $41f_0$ .

Βλέπετε ότι οι συχνότητες είναι επίσης περιττές ακέραιες πολλαπλάσιες της θεμελιώδους. Είναι αναμενόμενο, μιας και είδαμε παραπάνω ότι το ανάπτυγμα μας αποτελείται μόνο από περιττά  $k$ . Τα άρτια  $k$  έχουν πλάτος μηδέν, άρα τα αντίστοιχα συνημίτονα είναι μηδενικά - προσέξτε, μιλάμε για τα  $k$ , όχι για τα  $l$ , τα οποία παίρνουν όλες τις ακέραιες τιμές αλλά δίνουν μόνο περιττά  $k$ !

Προσοχή ξανά όμως! :- ) Όταν μιλάμε για αρμονικές συχνότητες και για τα αντίστοιχα συνημίτονα, αναφερόμαστε στις ακέραιες πολλαπλάσιες της θεμελιώδους, άσχετα αν το αντίστοιχο πλάτος του συνημιτόνου είναι μηδέν! Δηλ. για



Σχήμα 21: Συνημίτονα που συνθέτουν το περιοδικό σήμα.

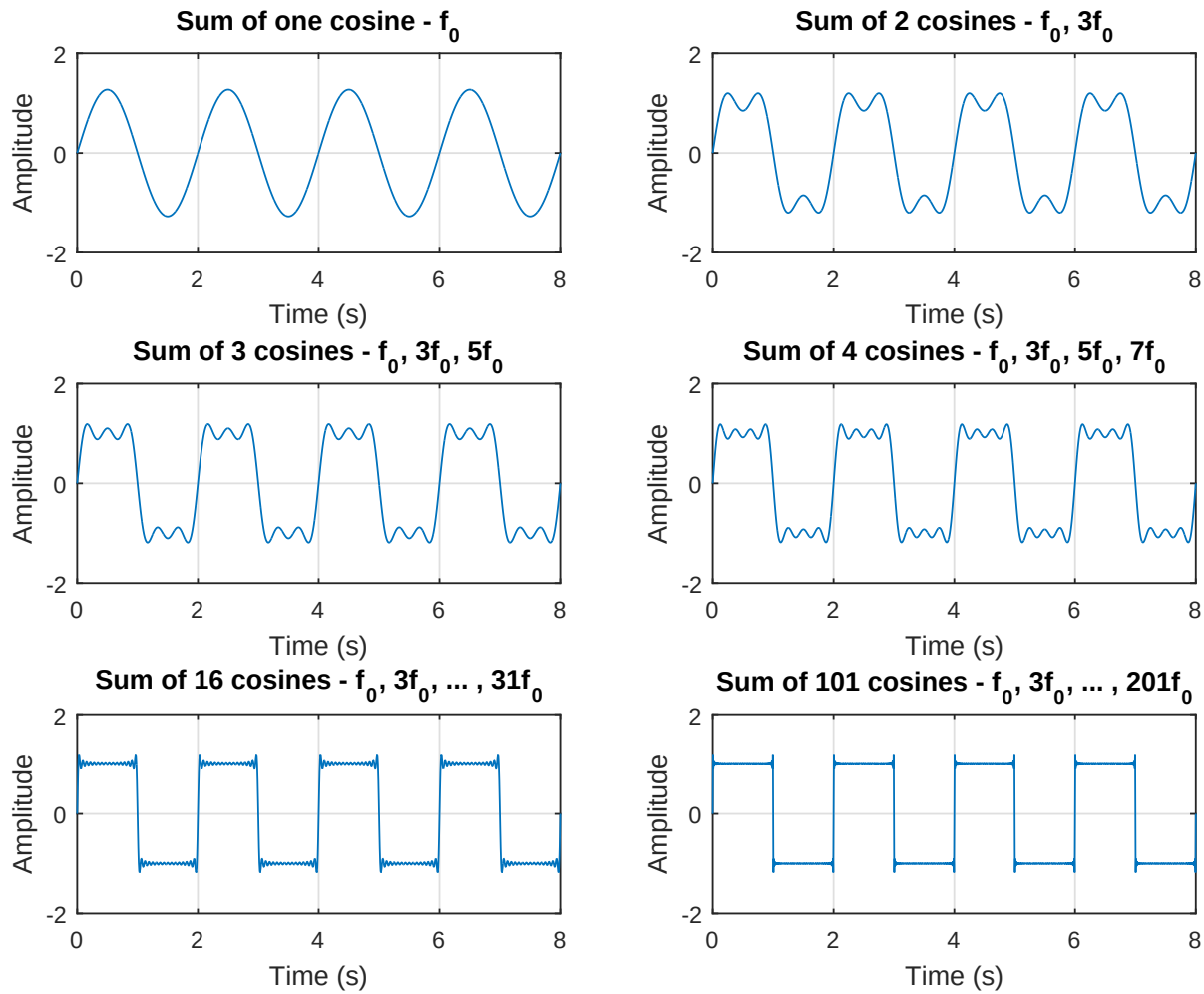
παράδειγμα, η πρώτη αρμονική έχει πλάτος  $\frac{4}{\pi}$  και συχνότητα  $f_0$ , η δεύτερη έχει πλάτος μηδέν και συχνότητα  $2f_0$ , η τρίτη αρμονική έχει πλάτος  $\frac{4}{3\pi}$  και συχνότητα  $3f_0$ , η τέταρτη έχει πλάτος μηδέν και συχνότητα  $4f_0$ , η πέμπτη έχει πλάτος  $\frac{4}{5\pi}$  και συχνότητα  $5f_0$ , κ.ο.κ.

Τέλος, αν υπολογίσετε τα πλάτη των παραπάνω συνεπιτόνων από τον τύπο της σειράς Fourier, θα βρείτε αντίστοιχα  $\frac{4}{\pi} = 1.2732$ ,  $\frac{4}{3\pi} = 0.4244$ ,  $\frac{4}{5\pi} = 0.2546$ ,  $\frac{4}{7\pi} = 0.1819$ ,  $\frac{4}{9\pi} = 0.0311$ , που συμβαδίζουν απόλυτα με τα πλάτη των συνεπιτόνων στα παραπάνω σχήματα.

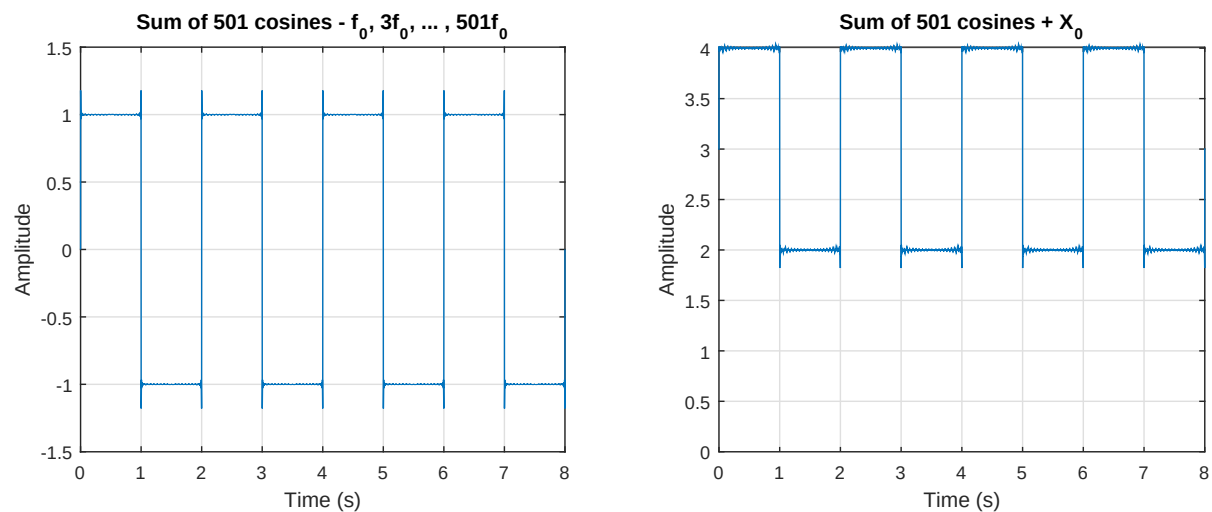
Οπότε αυτό που μας λέει η θεωρία των σειρών Fourier είναι ότι αν αθροίσουμε ΟΛΑ αυτά τα συνεπιτόνα (και προσθέσουμε στο τέλος και τη μέση τιμή  $X_0$ ) το αποτέλεσμα που θα πάρουμε θα είναι ίδιο κι απαράλλακτο με το περιοδικό σήμα που είχαμε εξ' αρχής! Φυσικά για να είναι απόλυτα ίδιο, πρέπει να αθροίσουμε άπειρα συνεπιτόνα – έτσι λέει η θεωρία. Στην πράξη φυσικά αυτό δεν μπορεί να γίνει. Θα αθροίσουμε κάποια από αυτά, όσα θέλουμε εμείς, με βάση κάποιο οπτικό, μαθηματικό, ή άλλο κριτήριο. Αυτό σημαίνει ότι το σήμα που θα πάρουμε θα έχει κάποιες διαφορές με το αρχικό. Το πόσο μεγάλες θα είναι, εξαρτάται από το πλήθος των συνεπιτόνων που θα αθροίσουμε. Ας ξεκινήσουμε λοιπόν να αθροίζουμε ένα-ένα τα συνεπιτόνα για να δούμε πώς σχηματίζεται το αρχικό σήμα. Δείτε το αποτέλεσμα στα Σχήματα 22. Δείτε και το Σχήμα 23. Βλέπετε ότι για περίπου 1000 αρμονικές (δηλ. 500 μη μηδενικά συνεπιτόνα) συν τη μέση τιμή  $X_0$ , το αποτέλεσμα είναι ολόιδιο στο μάτι με το αρχικό σήμα - στην ουσία δεν είναι όμως.

Τώρα λοιπόν είναι πια ξεκάθαρο γιατί η ανάλυση σε σειρές Fourier μας δίνει την απάντηση για το ποιό είναι το συχνοτικό περιεχόμενο ενός σήματος, δηλ. με άλλα λόγια ποιές συχνότητες περιέχει ένα σήμα. Περιέχει αυτές τις συχνότητες των οποίων τα συνεπιτόνα έχουν μη μηδενικό πλάτος στο ανάπτυγμα κατά Fourier, δηλ. στο παράδειγμά μας τις συχνότητες  $f_0, 3f_0, 5f_0, \dots = 0.5, 1.5, 2.5, \dots$  Hz.

Βάσει αυτών, μπορούμε εύκολα να σχεδιάσουμε αμφίπλευρο φάσμα πλάτους και φάσμα φάσης, μια και έχουμε



Σχήμα 22: Σύνθεση σήματος από συνημίτονα.



Σχήμα 23: Σύνθεση σήματος από πολλά ημίτονα, και τελικό σήμα.

την εκθετική αναπαράσταση του αναπτύγματος. Το πλάτος  $X_k$  είναι ίσο με  $X_k = \frac{A}{\pi k} e^{-j\frac{\pi}{2}}$ , για περιττά  $k$ . Άρα θέτοντας περιττές τιμές στο  $k$ , έχουμε τα αντίστοιχα πλάτη για τις περιττές συχνότητες  $f_0, 3f_0, 5f_0, \dots$ . Προσοχή όμως, γιατί

αφού το πλάτος  $X_k$  είναι μιγαδικός αριθμός, θα πρέπει στο φάσμα πλάτους να βάλετε το  $|X_k|$ . Όμοια για το φάσμα φάσης, το οποίο είναι σταθερό και ίσο με  $-\frac{\pi}{2}$  για τις θετικές περιττές συχνότητες, ενώ είναι μηδέν για τις θετικές άρτιες συχνότητες, και ίσο με  $\frac{\pi}{2}$  για τις αρνητικές περιττές συχνότητες (και πάλι μηδέν για τις αρνητικές άρτιες συχνότητες). Καταλαβαίνετε το γιατί; Σχεδιάστε τα! :-)

## 5 Όμως...

Είδαμε – στη θεωρία σας και εδώ – μια μέθοδο αναπαράστασης ενός περιοδικού σήματος ως ένα άθροισμα εκθετικών σημάτων των οποίων οι συχνότητες είναι ακέραια πολλαπλάσια μιας θεμελιώδους. Αυτή η αναπαράσταση (σειρά Fourier), καθώς και τα συμπεράσματά της, είναι πολύτιμη σε πολλές εφαρμογές. Όμως, έχει τα παρακάτω μειονεκτήματα:

1. Η σειρά Fourier μπορεί να χρησιμοποιηθεί μόνο για περιοδικά σήματα. Όλα όμως τα σήματα στην πράξη είναι μη περιοδικά (θυμηθείτε ότι ένα περιοδικό σήμα ξεκινά από το  $-\infty$ ).
2. Η τεχνική αυτή μπορεί να εφαρμοστεί σε ασυμπτωτικά ευσταθή συστήματα, αλλά όχι τόσο εύκολα σε ασταθή ή οριακά ευσταθή συστήματα.

Το πρώτο μειονέκτημα μπορεί να υπερκεραστεί με την αναπαράσταση μη περιοδικών σημάτων ως άθροισμα εκθετικών σημάτων. Αυτό δεν είναι άλλο από τον περίφημο *μετασχηματισμό Fourier*, που θα δείτε σύντομα. Το δεύτερο μειονέκτημα μπορεί να υπερκεραστεί με τη χρήση εκθετικών της μορφής  $e^{-st}$ , όπου το  $s$  δεν είναι απαραίτητα ίσο με  $j2\pi k f_0$ , αλλά μπορεί να πάρει κι άλλες τιμές. Αυτή τη γενίκευση θα τη δείτε λίγο αργότερα, στον περίφημο *μετασχηματισμό Laplace*. ;-)