

Συνέλιξη και Συστήματα

1 Εισαγωγή

Είναι γνωστό ότι η συνέλιξη αποτελεί μια πράξη πολύ σημαντική, γιατί σχετίζεται με την ανάλυση συστημάτων και την εύρεση της εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος δεδομένης μιας εισόδου. Η συνέλιξη, λόγω του ότι εμπλέκει τον υπολογισμό ενός ολοκληρώματος, έχει μια δυσκολία. Η δυσκολία έγκειται στο ότι στην πράξη εμπεριέχεται το γινόμενο δυο σημάτων, εκ των οποίων το ένα έχει υποστεί *ανάκλαση και μετατόπιση*.

2 Η συνέλιξη αναλυτικά

Εδώ θα ξεδιαλύνουμε τον τρόπο με τον οποίο υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα της συνέλιξης. Ας δούμε τον ορισμό:

$$c_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t - \tau)d\tau \quad (1)$$

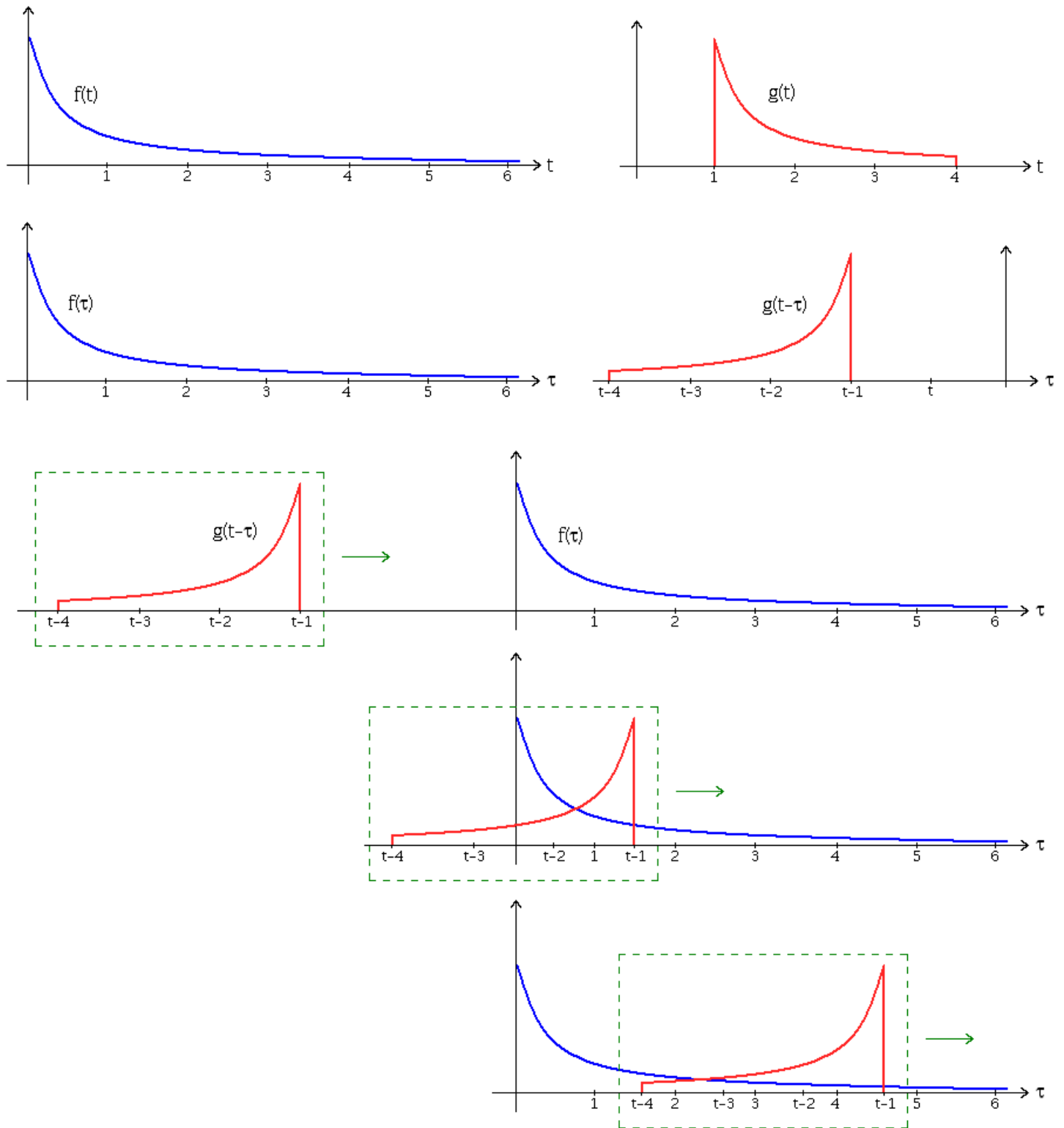
Η πρώτη παρατήρηση είναι ότι το ολοκλήρωμα έχει ως μεταβλητή το τ ! ΌΧΙ το t . Το t το θεωρούμε σταθερό μέσα στο ολοκλήρωμα. Έπειτα, το ολοκλήρωμα αυτό περιέχει δυο σήματα: το $x(\tau)$ και το $y(t - \tau)$. Το πρώτο είναι αυτούσιο το σήμα, δεν έχει κάποια μεταβολή. Το δεύτερο όμως, βλέπτε ότι έχει υποστεί δυο είδη επεξεργασίας: *ανάκλαση και μετατόπιση*. Η ακολουθία μετατροπής είναι η εξής:

$$y(t) \rightarrow y(\tau) \rightarrow y(-\tau) \rightarrow y(-\tau + t) = y(t - \tau) \quad (2)$$

Οπότε το σήμα που χρησιμοποιείται στο ολοκλήρωμα της συνέλιξης έχει υποστεί μια *ανάκλαση* ως προς τον κατακόρυφο άξονα και ακολούθως μια *μετατόπιση ως προς t* . Το σήμα που προκύπτει πολλαπλασιάζεται με το $x(\tau)$ και ολοκληρώνεται ως προς τ . Συνήθως προτιμάται η γραφική λύση της συνέλιξης, και ένα τέτοιο παράδειγμα φαίνεται στο σχήμα 1.

- Παρατηρήστε ότι έχουμε δυο σήματα, το $f(t)$ και το $g(t)$ στην πρώτη γραμμή του σχήματος. Επιλέγουμε να παίξουμε με το $g(t)$, δηλ. αυτό θα μετατοπίσουμε και θα ανακλάσουμε.
- Στη δεύτερη γραμμή, έχουμε ξανά τα δυο σήματα, μόνο που τώρα είναι συναρτήσει του τ και όχι του t , όπως ακριβώς επιτάσσει το ολοκλήρωμα της συνέλιξης, και το $g(\tau)$ έχει ανακλαστεί ως προς τον κατακόρυφο άξονα, και έχει μετατοπιστεί κατά t . Θυμίζω ότι αυτό το t το χειριζόμαστε ως σταθερά στο ολοκλήρωμα. Δείτε την αλλαγή στα άκρα του $g(\tau)$, και πώς αυτά προσαρμόστηκαν μετά την ανάκλαση και τη μετατόπιση.
- Στην τρίτη γραμμή, παίρνουμε το $g(t - \tau)$ που μόλις φτιάξαμε και ξεκινάμε να το “σέρνουμε” πάνω στον ίδιο άξονα με το $f(\tau)$, ξεκινώντας από το $-\infty$ και προς το $+\infty$.
- Στην πορεία (τέταρτη γραμμή), βλέπτε ότι συναντάει κάποια στιγμή το $f(\tau)$. Όταν το συναντάει, έχουμε γινόμενο μεταξύ των δυο σημάτων και άρα αρχίζουμε να υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα της συνέλιξης. Άρα, αυτές οι χρονικές στιγμές είναι όταν το δεξί άκρο του $g(t - \tau)$ συναντά το αριστερό άκρο του $f(\tau)$ και πέρα, ΚΑΙ όταν το αριστερό άκρο του $g(t - \tau)$ ΔΕΝ έχει περάσει το 0, δηλ. όταν

$$t - 1 \geq 0 \Rightarrow t \geq 1 \text{ και } t - 4 \leq 0 \Rightarrow t \leq 4 \quad (3)$$



Σχήμα 1: Διαδικασία συνέλιξης

οπότε τότε η συνέλιξη υπολογίζεται στο διάστημα από 0 ως $t - 1$, εκεί δηλαδή που υπάρχει γινόμενο μεταξύ των

δυσ σημμάτων, ως

$$c_{fg}(t) = \int_0^{t-1} f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \dots, \quad (4)$$

όπου και αντικαθιστούμε τις μαθηματικές μορφές των σημμάτων, και υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα.

- Στην πέμπτη γραμμή, το $g(t-\tau)$ έχει μπει ολόκληρο μέσα στο $f(\tau)$, πράγμα που δεν είχε συμβεί παραπάνω, άρα είναι διαφορετική περίπτωση. Εδώ, η συνέλιξη ορίζεται όταν το αριστερό άκρο της $g(t-\tau)$ περάσει το 0, δηλ. όταν

$$t-4 > 0 \Rightarrow t > 4 \quad (5)$$

και η συνέλιξη υπολογίζεται ως

$$c_{fg}(t) = \int_{t-4}^{t-1} f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \dots, \quad (6)$$

όπου και αντικαθιστούμε τις μαθηματικές μορφές των σημμάτων, και υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα.

- Άλλη περίπτωση δεν υπάρχει, οπότε για κάθε άλλο t εκτός από τα παραπάνω, η συνέλιξη είναι μηδέν, άρα

$$c_{fg}(t) = 0, \quad t < 1 \quad (7)$$

Τώρα που η διαδικασία είναι ξεκάθαρη, ας θεωρήσουμε ότι τα παραπάνω σήματα είναι τα

$$f(t) = e^{-at}\epsilon(t) \quad (8)$$

$$g(t) = e^{-bt}, \quad t \in [1, 4] \quad (9)$$

Οπότε θα έχουμε

- Όταν $t-1 \leq 0 \iff t \leq 1$, τότε $c_{fg}(t) = 0$.
- Όταν $t-1 > 0$ και $t-4 \leq 0$, δηλ. όταν $0 < t \leq 4$, τότε

$$c_{fg}(t) = \int_0^{t-1} e^{-a\tau} e^{-b(t-\tau)} d\tau \quad (10)$$

$$= e^{-bt} \int_0^{t-1} e^{(b-a)\tau} d\tau \quad (11)$$

$$= e^{-bt} \frac{1}{b-a} e^{(b-a)\tau} \Big|_0^{t-1} \quad (12)$$

$$= e^{-bt} \frac{1}{b-a} (e^{(b-a)(t-1)} - 1) \quad (13)$$

$$= \frac{1}{b-a} (e^{(b-a)(t-1)-bt} - e^{-bt}) \quad (14)$$

- Τέλος, όταν $t-4 > 0$, δηλ. $t > 4$, τότε

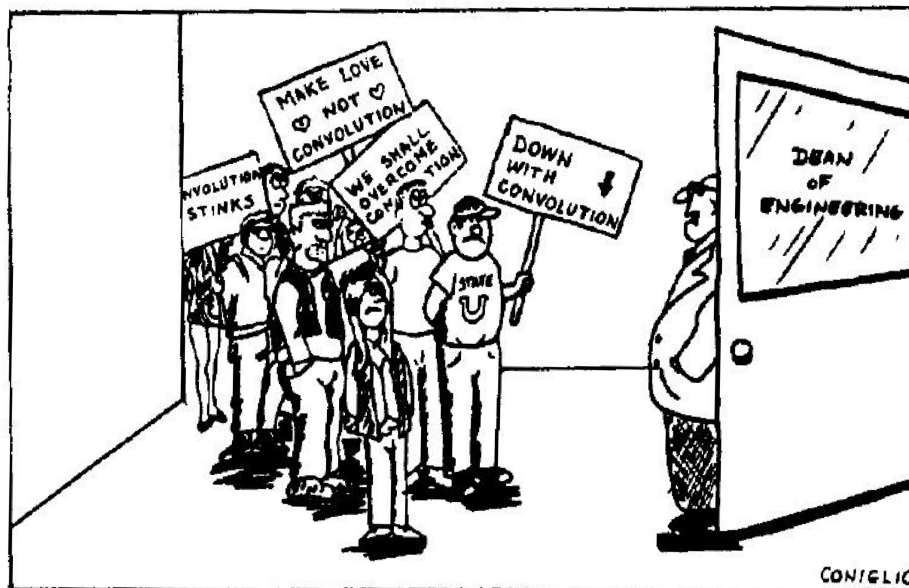
$$c_{fg}(t) = \int_{t-4}^{t-1} e^{-a\tau} e^{-b(t-\tau)} d\tau \quad (15)$$

$$= e^{-bt} \frac{1}{b-a} e^{(b-a)\tau} \Big|_{t-4}^{t-1} \quad (16)$$

$$= e^{-bt} \frac{1}{b-a} (e^{(b-a)(t-1)} - e^{(b-a)(t-4)}) \quad (17)$$

$$= \frac{1}{b-a} (e^{(b-a)(t-1)-bt} - e^{(b-a)(t-4)-bt}) \quad (18)$$

Ας δούμε μερικές παρατηρήσεις...



Σχήμα 2: Πολύς κόσμος έχει ταλαιπωρηθεί από τη συνέλιξη...

1. Όπως βλέπετε, το πιο σημαντικό πράγμα είναι να μπορείτε να υπολογίσετε το μετατοπισμένο σήμα και να βλέπετε σωστά τις περιπτώσεις και τα άκρα του ολοκληρώματος. Οι πράξεις στο ολοκλήρωμα είναι απλά μαθηματικά.
2. Η συνέλιξη είναι αντιμεταθετική πράξη, ισχύει δηλ. ότι

$$c_{fg}(t) = f(t) * g(t) = g(t) * f(t) = c_{gf}(t) \quad (19)$$

δηλ. αν παίζαμε με το $f(t)$ αντί για το $g(t)$, θα είχαμε πάλι το ίδιο αποτέλεσμα.

3. Προτιμούμε να παίζουμε με το μικρότερο σε διάρκεια σήμα, γιατί συνήθως είναι πιο εύκολη η διαδικασία. Αν και τα δυο σήματα είναι άπειρης διάρκειας, προτιμούμε όποιο θέλουμε.
4. Χρήσιμη παρατήρηση για πεπερασμένης διάρκειας σήματα είναι η εξής: αν το ένα εκ των δυο είναι μη μηδενικό στο διάστημα $[a, b]$ και το άλλο είναι μη μηδενικό στο διάστημα $[c, d]$, τότε η συνέλιξή τους είναι μη μηδενική στο διάστημα $[a + c, b + d]$. Είναι χρήσιμη παρατήρηση για να μπορούμε να ελέγχουμε τα αποτελέσματά μας. Για παράδειγμα, αν στο σχήμα 1, είχαμε συνέλιξη της $g(t)$ με τον εαυτό της, δηλ. $c_{gg}(t) = g(t) * g(t)$, τότε το αποτέλεσμα θα ήταν μη μηδενικό στο διάστημα $[2, 8]$.
5. Στη βιβλιογραφία, θα βρείτε τον ορισμό της συνέλιξης με διαφορετικές μεταβλητές. Π.χ.

$$c_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t - \tau)d\tau \quad (20)$$

$$c_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(\tau - t)dt \quad (21)$$

Και οι δυο παραπάνω σχέσεις είναι σωστές. Απλά αλλάξαμε τις μεταβλητές t, τ μεταξύ τους. Διαλέξτε όποια σας βολεύει, αρκεί να είστε συνεπείς και προσεκτικοί. Σε αυτές τις σημειώσεις, προτιμούμε συνήθως την πρώτη σχέση.

6. Η γραφική επίλυση που συζητήσαμε εδώ φαίνεται εκ πρώτης όψεως περίπλοκη και αποθαρρύνει το φοιτητή. Πράγματι, κάποιοι ισχυρίζονται ότι η συνέλιξη έχει οδηγήσει πολλούς προπτυχιακούς σε τμήματα Μηχανικών Η/Υ να ενστερνιστούν τη Θεολογία, είτε για σωτηρία ψυχής είτε ως εναλλακτική καριέρα !! :-) (δείτε το περιοδικό IEEE Spectrum, Μάρτιος 1991, σελ. 60).

3 Πίνακας Συνέλιξης

Η διαδικασία της συνέλιξης απλοποιείται σημαντικά από έτοιμους πίνακες συνέλιξης, όπως ο Πίνακας 1. Αυτός ο πίνακας, που αναφέρει διάφορα ζεύγη σημάτων και το αποτέλεσμα της συνέλιξής τους, μπορεί να σας βοηθήσει στον έλεγχο των αποτελεσμάτων σας.

Χρήσιμα ζεύγη συνέλιξης		
$x(t)$	$y(t)$	$x(t) * y(t)$
$x(t)$	$\delta(t - T)$	$x(t - T)$
$e^{at}\epsilon(t)$	$\epsilon(t)$	$\frac{1 - e^{at}}{-a}\epsilon(t)$
$\epsilon(t)$	$\epsilon(t)$	$t\epsilon(t)$
$e^{at}\epsilon(t)$	$e^{bt}\epsilon(t)$	$\frac{e^{at} - e^{bt}}{a - b}\epsilon(t), \quad a \neq b$
$e^{at}\epsilon(t)$	$e^{at}\epsilon(t)$	$te^{at}\epsilon(t)$
$te^{at}\epsilon(t)$	$e^{at}\epsilon(t)$	$\frac{1}{2}t^2e^{at}\epsilon(t)$
$t^n\epsilon(t)$	$e^{at}\epsilon(t)$	$\frac{n!e^{at}}{a^{n+1}}\epsilon(t) - \sum_{j=0}^n \frac{n!t^{n-j}}{a^{j+1}(n-j)!}\epsilon(t)$
$t^m\epsilon(t)$	$t^n\epsilon(t)$	$\frac{m!n!}{(n+m+1)!}t^{m+n+1}\epsilon(t)$
$te^{at}\epsilon(t)$	$e^{bt}\epsilon(t)$	$\frac{e^{bt} - e^{at} + (a-b)te^{at}}{(a-b)^2}\epsilon(t)$
$t^me^{at}\epsilon(t)$	$t^ne^{at}\epsilon(t)$	$\frac{m!n!}{(n+m+1)!}t^{m+n+1}e^{at}\epsilon(t)$
$t^me^{at}\epsilon(t)$	$t^ne^{bt}\epsilon(t)$	$\sum_{j=0}^m \frac{(-1)^j m!(n+j)!t^{m-j}e^{at}}{j!(m-j)!(a-b)^{n+j+1}}\epsilon(t) + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k n!(m+k)!t^{n-k}e^{bt}}{k!(n-k)!(b-a)^{m+k+1}}\epsilon(t)$
$e^{at}\cos(bt + \theta)\epsilon(t)$	$e^{\lambda t}\epsilon(t)$	$\frac{\cos(\theta - \phi)e^{\lambda t} - e^{-at}\cos(bt + \theta - \phi)}{\sqrt{(a + \lambda)^2 + b^2}}\epsilon(t)$ $\phi = \tan^{-1} \frac{-b}{a + \lambda}$
$e^{at}\epsilon(t)$	$e^{bt}\epsilon(-t)$	$\frac{e^{at}\epsilon(t) + e^{bt}\epsilon(-t)}{b - a}, \quad \Re\{b\} > \Re\{a\}$
$e^{at}\epsilon(-t)$	$e^{bt}\epsilon(-t)$	$\frac{e^{at} - e^{bt}}{b - a}\epsilon(-t)$

Πίνακας 1: Πίνακας ζευγών συνελιξεων

4 Ιδιότητες Συνέλιξης

Η διαδικασία της συνέλιξης απλοποιείται επίσης σημαντικά από ιδιότητες, όπως αυτές στον Πίνακα 2.

5 Συστήματα

Τα συστήματα δεν είναι τίποτα άλλο από σήματα κι αυτά, τα οποία συνήθως κάνουν μια συγκεκριμένη δουλειά επάνω στο σήμα εισόδου τους, $x(t)$. Αυτή η δουλειά αντικατοπτρίζεται στην έξοδο του συστήματος, $y(t)$. Το σήμα που περιγράφει το σύστημα συνήθως συμβολίζεται ως $h(t)$, και λέγεται *κρουστική απόκριση*. Η σχέση εισόδου-εξόδου

Ιδιότητες συνέλιξης	
Ομογένεια	$ax(t) * y(t) = x(t) * ay(t) = a(x(t) * y(t))$
Αντιμεταθετικότητα	$x(t) * y(t) = y(t) * x(t)$
Προσεταιριστικότητα	$(x(t) * y(t)) * z(t) = x(t) * (y(t) * z(t))$
Επιμεριστικότητα	$x(t) * (y(t) + z(t)) = x(t) * y(t) + x(t) * z(t)$
Γραμμικότητα	$\begin{cases} z_1(t) = x_1(t) * y(t) \\ z_2(t) = x_2(t) * y(t) \\ \text{αν } x(t) = ax_1(t) + bx_2(t) \\ \text{τότε } z(t) = x(t) * y(t) = az_1(t) + bz_2(t) \end{cases}$
Εύρος	$\begin{cases} x(t) : \mathbb{R} \rightarrow [t_1, t_2] \\ y(t) : \mathbb{R} \rightarrow [t_3, t_4] \\ y(t) * x(t) : \mathbb{R} \rightarrow [t_1 + t_3, t_2 + t_4] \end{cases}$
Ουδέτερο στοιχείο	$x(t) * \delta(t) = \delta(t) * x(t) = x(t)$

Πίνακας 2: Ιδιότητες συνέλιξης

ορίζεται ως η συνέλιξη της εισόδου με την κρουστική απόκριση:

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad (22)$$

όπου $*$ συμβολίζει την πράξη της συνέλιξης. Επίσης, μπορεί ένα σύστημα να περιγραφεί με μια απλή μαθηματική σχέση, ως η έξοδος συναρτήσει της εισόδου:

$$y(t) = f(x(t)) \quad (23)$$

5.1 Ιδιότητες Συστημάτων

Τα συστήματα έχουν ορισμένες χρήσιμες ιδιότητες, τις οποίες και θα συζητήσουμε εδώ. Οι ιδιότητες αυτές είναι οι εξής:

1. **Συστήματα δυναμικά:** τα δυναμικά συστήματα, ή αλλιώς συστήματα με μνήμη, είναι αυτά για τα οποία η έξοδος τους απαιτεί προηγούμενες τιμές της εισόδου για να υπολογιστεί. Για παράδειγμα, το σύστημα $y(t) = 2x(t)$ είναι ένα σύστημα χωρίς μνήμη, ή αλλιώς στατικό, ενώ το σύστημα $y(t) = e^{x(t-1)}$ είναι ένα σύστημα με μνήμη, ή αλλιώς δυναμικό.
2. **Αιτιατά συστήματα:** τα αιτιατά συστήματα είναι αυτά για τα οποία ο υπολογισμός της εξόδου ΔΕΝ απαιτεί μελλοντικές τιμές της εισόδου. Για παράδειγμα, το σύστημα $y(t) = 2x(t-1) + \sin(x(t))$ είναι αιτιατό, ενώ το σύστημα $y(t) = x(t-2)^2 + 4x(t+4)$ είναι μη αιτιατό, επειδή για τον υπολογισμό του $y(t)$ απαιτείται μελλοντική τιμή της εισόδου, η $x(t+4)$.
3. **Γραμμικά συστήματα:** τα γραμμικά συστήματα είναι αυτά για τα οποία ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} x(t) = Ax_1(t) + Bx_2(t) \rightarrow y(t) &= T\{Ax_1(t) + Bx_2(t)\} \\ &= AT\{x_1(t)\} + BT\{x_2(t)\} = y_1(t) + y_2(t) \end{aligned} \quad (24)$$

Με λόγια, γραμμικά είναι τα συστήματα στα οποία αν εφαρμόσουμε ως είσοδο ένα άθροισμα σημάτων, θα πάρουμε ως έξοδο το άθροισμα των εξόδων που θα παίρναμε αν είχαμε δώσει ως είσοδο ένα-ένα τα σήματα, κι όχι όλα μαζί ως άθροισμα. Για παράδειγμα, το σύστημα $y(t) = 2x(t+1) - 3x(t-4)$ είναι γραμμικό, ενώ το σύστημα $y(t) = \sqrt{x(t)}$ δεν είναι γραμμικό, όπως επίσης και το $y(t) = x^2(t)$ δεν είναι γραμμικό. Η ιδιότητα της γραμμικότητας είναι πολύ σημαντική.

4. **Χρονικά Αμετάβλητα συστήματα:** τα συστήματα που είναι χρονικά αμετάβλητα είναι αυτά για τα οποία ισχύει ότι η έξοδος τους ΔΕΝ εξαρτάται ρητά από το χρόνο t . Για παράδειγμα, το σύστημα $y(t) = 3x(t+2) - 2\cos(x(t-2))$ είναι χρονικά αμετάβλητο, ενώ το σύστημα $y(t) = tx(t)$ είναι χρονικά μεταβλητό.

5. **Ευσταθή συστήματα:** τα συστήματα που είναι ευσταθή είναι αυτά για τα οποία ισχύει:

$$|x(t)| < M_x \Rightarrow |y(t)| < M_y, \quad M_x, M_y < +\infty \quad (25)$$

Με λόγια, αν η είσοδος είναι φραγμένη κατ' απόλυτη τιμή, τότε και η έξοδος είναι φραγμένη κατ' απόλυτη τιμή. Για παράδειγμα, το σύστημα $y(t) = x(t-1) + t$ δεν είναι ευσταθές, όπως επίσης και το σύστημα $y(t) = t/x(t+2)$, ενώ το σύστημα $y(t) = \sin(x(t))$ είναι ευσταθές. Ο συγκεκριμένος ορισμός της ευστάθειας λέγεται και BIBO stability - Bounded Input Bounded Output stability, που δηλώνει ακριβώς ό,τι είπαμε: όταν η είσοδος είναι απολύτως φραγμένη, τότε και η έξοδος είναι απολύτως φραγμένη (κι όχι απαραίτητα από τον ίδιο αριθμό-φράγμα, όπως φαίνεται παραπάνω).

Από όλες αυτές τις κατηγορίες σημάτων, τα πιο σημαντικά είναι αυτά που είναι γραμμικά, χρονικά αμετάβλητα, και σε αυτά θα αναφερόμαστε από εδώ και πέρα όταν μιλάμε για συστήματα. Η ευστάθεια είναι συνήθως μια επιθυμητή ιδιότητα αλλά δε θα τη θεωρήσουμε δεδομένη στη μελέτη μας.

5.1.1 Παράδειγμα:

Εξετάστε αν τα παρακάτω συστήματα είναι γραμμικά, χρονικά αμετάβλητα, ευσταθή, και αιτιατά.

1. $y(t) = 2x(t-1) + 3x(t-3)$
2. $y(t) = t^2 x^2(t+2) - x(t)$
3. $y(t) = x^2(t-4)$,
4. $y(t) = \log_{10}(|x(t)|)$,
5. $y(t) = \frac{1}{x(t)}$, με $x(t) \neq 0$

Λύση:

1. • Το σύστημα $y(t) = 2x(t-1) + 3x(t-3)$ είναι γραμμικό. Ας το δείξουμε. Έστω

$$y_1(t) = 2ax_1(t-1) + 3ax_1(t-3)$$

η έξοδος του συστήματος για είσοδο $ax_1(t)$. Έστω

$$y_2(t) = 2bx_2(t-1) + 3bx_2(t-3)$$

η έξοδος του συστήματος για είσοδο $bx_2(t)$. Έχουμε

$$y_1(t) + y_2(t) = 2ax_1(t-1) + 3ax_1(t-3) + 2bx_2(t-1) + 3bx_2(t-3)$$

και

$$y_{1+2}(t) = 2ax_1(t-1) + 3ax_1(t-3) + 2bx_2(t-1) + 3bx_2(t-3)$$

που είναι ταυτόσημο, άρα το σύστημα είναι γραμμικό.

- Το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο γιατί αν θέσουμε ως είσοδο το σήμα $x(t-t_0)$, τότε η έξοδος είναι

$$y(t) = 2x(t-t_0-1) + 3x(t-t_0-3)$$

και η καθυστέρηση της εξόδου κατά t_0 δίνεται ως

$$y(t-t_0) = 2x(t-t_0-1) + 3x(t-t_0-3)$$

που είναι το ίδιο αποτέλεσμα με αυτό που βρήκαμε νωρίτερα.

- Το σύστημα είναι αιτιατό, γιατί για να υπολογίσουμε μια δεδομένη τιμή της εξόδου (π.χ. την $y(0)$), χρειαζόμαστε παρελθούσες τιμές της εισόδου (τις $x(-1), x(-3)$).
- Το σύστημα είναι, τέλος, ευσταθές γιατί αν η είσοδος είναι φραγμένη κατ' απόλυτη τιμή, $|x(t)| < M_x$, τότε και η έξοδος είναι φραγμένη, γιατί

$$|y(t)| = |2x(t-1) + 3x(t-3)| < 2M_x + 3M_x = 5M_x = M_y$$

2. • Το σύστημα $y(t) = t^2 x^2(t+2) - x(t)$ δεν είναι γραμμικό. Έστω

$$y_1(t) = t^2 a x_1^2(t+2) - a x_1(t)$$

η έξοδος του συστήματος για είσοδο $a x_1(t)$. Έστω

$$y_2(t) = t^2 b x_2^2(t+2) - b x_2(t)$$

η έξοδος του συστήματος για είσοδο $b x_2(t)$. Έχουμε

$$y_1(t) + y_2(t) = t^2 a x_1^2(t+2) - a x_1(t) + t^2 b x_2^2(t+2) - b x_2(t)$$

και

$$y_{1+2}(t) = t^2 (a x_1(t+2) + b x_2(t+2))^2 - (a x_1(t) + b x_2(t))$$

που προφανώς δεν είναι ταυτόσημα, άρα το σύστημα είναι μη γραμμικό.

- Το σύστημα είναι χρονικά μεταβλητό, γιατί αν θέσουμε ως είσοδο το σήμα $x(t-t_0)$, τότε η έξοδος είναι

$$y(t) = t^2 x^2(t-t_0+2) - x(t-t_0)$$

και η καθυστέρηση της εξόδου κατά t_0 δίνεται ως

$$y(t-t_0) = (t-t_0)^2 x^2(t-t_0+2) - x(t-t_0)$$

που ΔΕΝ είναι το ίδιο αποτέλεσμα με αυτό που βρήκαμε νωρίτερα.

- Το σύστημα είναι μη αιτιατό, γιατί για τον υπολογισμό μιας δεδομένης τιμής της εξόδου (π.χ. $y(0)$), απαιτείται μελλοντική τιμή της εισόδου ($x(2)$).
- Το σύστημα είναι, τέλος, ασταθές γιατί αν η είσοδος είναι φραγμένη κατ' απόλυτη τιμή, $|x(t)| < M_x$, τότε η έξοδος είναι μη-φραγμένη, γιατί

$$|y(t)| = |t^2 x^2(t+2) + (-x(t))| < |t^2 x^2(t+2)| + |x(t)| < t^2 M_x^2 + M_x \rightarrow +\infty$$

όταν $t \rightarrow \pm\infty$.

3. • Το σύστημα είναι μη γραμμικό, με παρόμοια απόδειξη με το προηγούμενο ερώτημα.
- Το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο, διότι αν θέσουμε ως είσοδο το σήμα $x(t-t_0)$, τότε η έξοδος είναι

$$y(t) = x^2(t-t_0-4)$$

και η καθυστέρηση της εξόδου κατά t_0 δίνεται ως

$$y(t-t_0) = x^2(t-t_0-4)$$

που είναι το ίδιο αποτέλεσμα με αυτό που βρήκαμε νωρίτερα.

- Το σύστημα είναι αιτιατό, γιατί απαιτούνται μόνο παρελθοντικές τιμές της εισόδου για τον υπολογισμό μιας οποιασδήποτε τιμής της εξόδου.
- Το σύστημα είναι προφανώς ευσταθές, γιατί αν $|x(t)| < M_x$, τότε $|y(t)| = |x^2(t-4)| < M_x^2$.

4. • Το σύστημα είναι μη γραμμικό. Έστω

$$y_1(t) = \log_{10}(|ax_1(t)|)$$

η έξοδος για είσοδο $ax_1(t)$. Έστω

$$y_2(t) = \log_{10}(|bx_2(t)|)$$

η έξοδος για είσοδο $bx_2(t)$. Είναι

$$y_1(t) + y_2(t) = \log_{10}(|ax_1(t)|) + \log_{10}(|bx_2(t)|)$$

ενώ

$$y_{1+2}(t) = \log_{10}(|ax_1(t) + bx_2(t)|) \neq y_1(t) + y_2(t)$$

άρα μη γραμμικό.

- Επίσης, το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο γιατί αν θέσουμε ως είσοδο το σήμα $x(t - t_0)$, τότε η έξοδος είναι

$$y(t) = \log_{10} |x(t - t_0)|$$

και η καθυστέρηση της εξόδου κατά t_0 δίνεται ως

$$y(t - t_0) = \log_{10} |x(t - t_0)|$$

που είναι το ίδιο αποτέλεσμα με αυτό που βρήκαμε νωρίτερα.

- Το σύστημα είναι αιτιατό.
- Το σύστημα είναι ευσταθές γιατί αν $|x(t)| < M_x$, τότε $|y(t)| = |\log_{10}(|x(t)|)| < \log_{10}(M_x) < \pm\infty$.

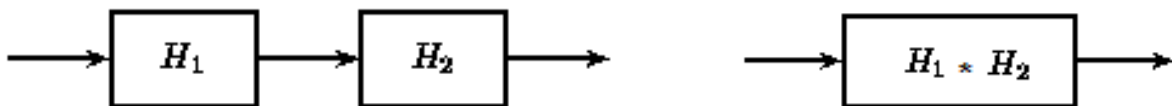
5. Δικό σας! :-)

5.2 Συνέλιξη και συστήματα

Όπως αναφέραμε παραπάνω, η συνέλιξη είναι μια πολύ σημαντική πράξη, γιατί όπως είδαμε στις διαλέξεις συνδέει την έξοδο, $y(t)$, ενός συστήματος με την είσοδό του, $x(t)$, μέσω της σχέσης

$$y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t) \quad (26)$$

όπου $h(t)$ η περίφημη κρουστική απόκριση, το σήμα δηλαδή που χαρακτηρίζει το σύστημά μας και τη λειτουργία του. Ας δούμε μερικές διατάξεις συστημάτων που συναντώνται συχνά στην πράξη.



(α) Συστήματα σε σειρά

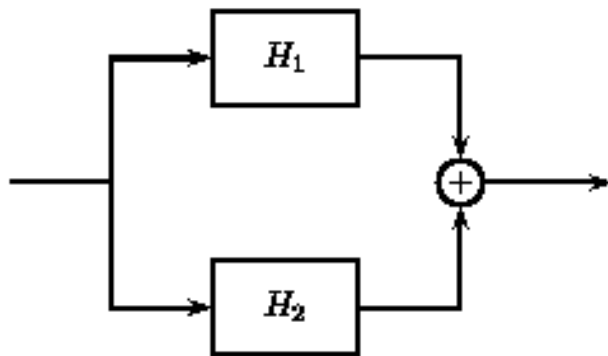
(β) Συστήματα σε σειρά - ισοδύναμη διάταξη

Σχήμα 3: Συστήματα σε σειρά

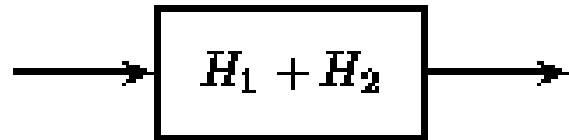
Στο Σχήμα 3α', φαίνονται δυο συστήματα σε σειρά. Η έξοδος από ένα τέτοιο σύστημα, $y_{s1}(t)$, είναι:

$$y_{s1}(t) = (x_1(t) * h_1(t)) * h_2(t) = x_1(t) * (h_1(t) * h_2(t)) \quad (27)$$

λόγω της αντιμεταθετικής ιδιότητας της συνέλιξης. Άρα η διάταξη στο σχήμα 3β' είναι μια ισοδύναμη διάταξη για το παραπάνω σύστημα.



(α) Παράλληλα συστήματα



(β) Παράλληλα συστήματα - ισοδύναμη διάταξη

Σχήμα 4: Παράλληλα συστήματα

Στο Σχήμα 4α', φαίνονται δυο συστήματα σε παραλληλία. Η έξοδος από ένα τέτοιο σύστημα, $y_{s1}(t)$, είναι:

$$y_{s1}(t) = (x_1(t) * h_1(t)) + (x_1(t) * h_2(t)) = x_1(t) * (h_1(t) + h_2(t)) \quad (28)$$

λόγω ιδιοτήτων της συνέλιξης.

Έστω ότι έχουμε τη διάταξη στο σχήμα 4β', για την οποία η έξοδος είναι

$$y_{s2}(t) = x_1(t) * (h_1(t) + h_2(t)) = (x_1(t) * h_1(t)) + (x_1(t) * h_2(t)) \quad (29)$$

που είναι ισοδύναμη με τη σχέση 28, άρα οι δυο διατάξεις είναι ισοδύναμες.