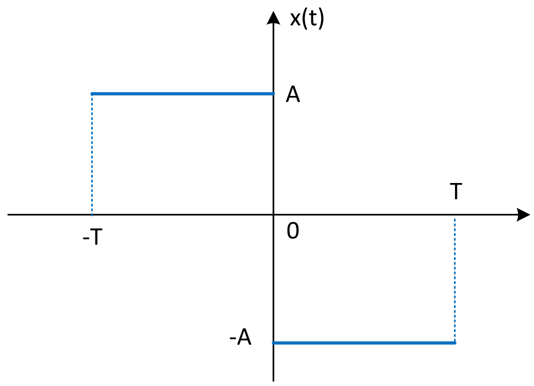
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2020-21
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Πέμπτο Φροντιστήριο

Άσκηση 1 - Μετασχηματισμός Fourier και Ιδιότητες Ι
Βρείτε το μετασχ. Fourier του σήματος που φαίνεται στο Σχήμα 1 με τους ακόλουθους τρόπους:



Σχήμα 1: *Σχήμα Άσκησης 1.*

(α΄) Χρησιμοποιώντας τον ορισμό.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε ότι $1 - \cos(2\theta) = 2\sin^2(\theta)$.

(β΄) Χρησιμοποιώντας τα γνωστά σας ζεύγη μετασχ. Fourier που γνωρίζετε και την ιδιότητα της μετατόπισης.

(γ΄) Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της παραγώγισης και μετατόπισης.

Λύση:

α΄) Είναι

$$\begin{aligned}
X(f) &= \int_{-T}^{0} Ae^{-j2\pi ft}dt + \int_{0}^{T}(-A)e^{-j2\pi ft}dt && (1)\\
&= A\frac{1}{-j2\pi f}e^{-j2\pi ft}\Big]_{-T}^{0} - \frac{A}{-j2\pi f}e^{-j2\pi ft}\Big]_{0}^{T} && (2)\\
&= -\frac{A}{j2\pi f}(1 - e^{j2\pi fT}) + \frac{A}{j2\pi f}(e^{-j2\pi fT} - 1) && (3)\\
&= \frac{A}{j2\pi f}(e^{-j2\pi fT} - 1 - 1 + e^{j2\pi fT}) && (4)\\
&= \frac{A}{j2\pi f}(2\cos 2\pi fT - 2) = \frac{A}{j2\pi f}\Big(-4\sin^2(\pi fT)\Big) && (5)\\
&= -\frac{2A}{j\pi f}\sin^2(\pi fT) = \frac{2Aj}{\pi f}\sin^2(\pi fT) && (6)
\end{aligned}$$

β΄) Παρατηρούμε ότι το σχήμα περιλαμβάνει 2 τετραγωνικούς παλμούς στις θέσεις $t = \pm\frac{T}{2}$, με πλάτος A και διάρκεια T ο καθένας.

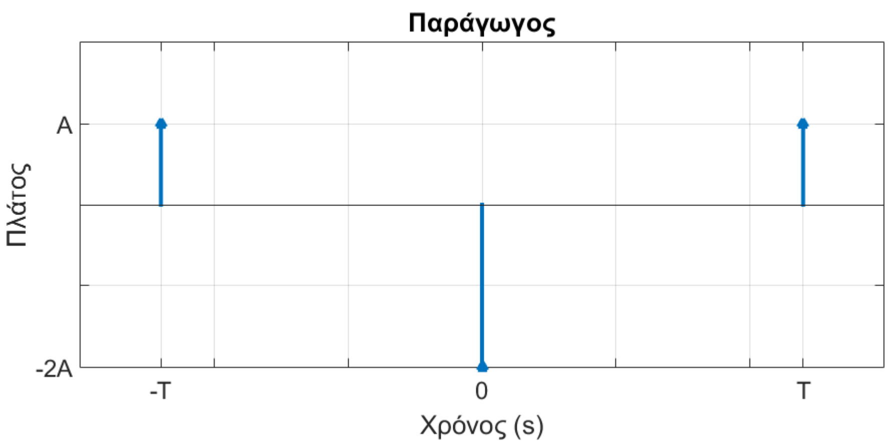
Γνωρίζουμε ότι

$$A\mathrm{rect}\Big(\frac{t \pm t_0}{T}\Big) \xleftrightarrow{F} AT\mathrm{sinc}(fT)e^{\pm j2\pi f t_0}$$

Άρα

$$\begin{aligned} x(t) = A\mathrm{rect}\Big(\frac{t+\frac{T}{2}}{T}\Big) - A\mathrm{rect}\Big(\frac{t-\frac{T}{2}}{T}\Big) \xleftrightarrow{F} X(f) &= AT\mathrm{sinc}(fT)e^{j2\pi f\frac{T}{2}} - AT\mathrm{sinc}(fT)e^{-j2\pi f\frac{T}{2}} && (7)\\ &= AT\mathrm{sinc}(fT)(e^{j\pi fT} - e^{-j\pi fT}) && (8)\\ &= AT\mathrm{sinc}(fT)2j\sin(\pi fT) && (9)\\ &= AT\frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT}2j\sin(\pi fT) && (10)\\ &= \frac{2Aj}{\pi f}\sin^2(\pi fT) && (11)\end{aligned}$$

γ΄) Αν παραγωγίσουμε το $x(t)$, θα έχουμε:



Το σήμα παραπάνω γράφεται ως:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A\delta(t+T) - 2A\delta(t) + A\delta(t-T)$$

κι έχει Μ.F. ως

$$\begin{aligned} F\Big\{\frac{dx(t)}{dt}\Big\} &= Ae^{j2\pi fT} - 2A + Ae^{-j2\pi fT} && (12)\\ &= 2A\cos(2\pi fT) - 2A = -4A\sin^2(\pi fT) && (13)\end{aligned}$$

Η ιδιότητα της παραγώγισης μας δίνει ότι

$$F\Big\{\frac{dx(t)}{dt}\Big\} = -4A\sin^2(\pi fT) = j2\pi f X(f) \Longleftrightarrow X(f) = \frac{-4A\sin^2(\pi fT)}{j2\pi f} = -\frac{2Aj}{\pi f}\sin^2(\pi fT) \qquad (14)$$

Άσκηση 2 - Δυικότητα
Χρησιμοποιήστε την ιδιότητα της δυικότητας για να δείξετε ότι

(α') $\frac{1}{2}\delta(t) + \frac{j}{2\pi t} \longleftrightarrow u(f)$

(β') $\delta(t+T) + \delta(t-T) \longleftrightarrow 2\cos(2\pi fT)$

(γ') $\delta(t+T) - \delta(t-T) \longleftrightarrow 2j\sin(2\pi fT)$

<u>Λύση</u>:

α') Ξέρουμε ότι

$$u(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2}\delta(t) + \frac{1}{j2\pi f} \Rightarrow u(-t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2}\delta(t) - \frac{1}{j2\pi f}$$

Από δυϊκότητα:

$$\frac{1}{2}\delta(t) - \frac{1}{j2\pi t} \xleftrightarrow{F} u\Big(-(-f)\Big) = u(f)$$

;ρα

$$\frac{1}{2}\delta(t) - \frac{1}{j2\pi t} = \frac{1}{2}\delta(t) + \frac{j}{2\pi t} \xleftrightarrow{F} u(f)$$

β') Ξέρουμε ότι

$$2\cos(2\pi Tt) \xleftrightarrow{F} \delta(f-T) + \delta(f+T)$$

Από δυϊκότητα:

$$\delta(t-T) + \delta(t+T) \xleftrightarrow{F} 2\cos\Big(2\pi T(-f)\Big) = 2\cos(2\pi fT)$$

γ') Ξέρουμε ότι

$$2j\sin(2\pi Tt) \xleftrightarrow{F} \delta(f-T) - \delta(f+T)$$

Από δυϊκότητα:

$$\delta(t-T) - \delta(t+T) \quad \xleftrightarrow{F} \quad 2j\sin\Big(2\pi T(-f)\Big) = -2j\sin(2\pi fT) \Longrightarrow \tag{15}$$

$$\delta(t+T) - \delta(t-T) \quad \xleftrightarrow{F} \quad 2j\sin(2\pi fT) \tag{16}$$

Άσκηση 3 - Μετασχηματισμός Fourier και Ιδιότητες - II
Χρησιμοποιήστε τις ιδιότητες και τους πίνακες με ζεύγη μετασχ. Fourier των σημειώσεών σας για να υπολογίσετε το μετασχ. Fourier των παρακάτω σημάτων:

(α') $x(t) = \sin(2\pi t)e^{-t}u(t)$

(β') $x(t) = te^{-3|t-1|}$

(γ') $x(t) = \frac{2\sin(3\pi t)}{\pi t}\frac{\sin(2\pi t)}{\pi t}$

(δ') $x(t) = \frac{d}{dt}(te^{-2t}\sin(t)u(t))$

(ε') $x(t) = \int_{-\infty}^{t}\frac{\sin(2\pi\tau)}{\pi\tau}d\tau$

(ϛ') $x(t) = e^{-t+2}u(t-2)$

(ζ') $x(t) = \frac{\sin(t)}{\pi t} * \frac{d}{dt}\frac{\sin(2t)}{\pi t}$

Λύση:

(α') Από πίνακα ζευγών: $X(f) = \frac{2\pi}{(1+j2\pi f)^2 + 4\pi^2}$

(β') Είναι $x(t) = te^{-3|t-1|}$, και

- $s(t) = e^{-3|t|} \overset{F}{\longleftrightarrow} S(f) = \frac{6}{9+4\pi^2 f^2}$
- $w(t) = s(t-1) \overset{F}{\longleftrightarrow} W(f) = e^{-j2\pi f}S(f)$
- $x(t) = tw(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(f) = \frac{j}{2\pi}\frac{dW(f)}{df}$

Άρα:

$$X(f) = \frac{j}{2\pi}\frac{d}{df}\left[e^{-j2\pi f}\frac{6}{9+4\pi^2 f^2}\right] \tag{17}$$

$$= \frac{j}{2\pi}\left(-\frac{12j\pi e^{-j2\pi f}}{9+4\pi^2 f^2} - \frac{48\pi^2 f e^{-j2\pi f}}{(9+4\pi^2 f^2)^2}\right) \tag{18}$$

(γ') Είναι $x(t) = 2\frac{\sin(3\pi t)}{\pi t}\frac{\sin(2\pi t)}{\pi t}$

- $s(t) = \frac{\sin(3\pi t)}{\pi t} = 3\mathrm{sinc}(3t) \overset{F}{\longleftrightarrow} S(f) = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{3}\right) = \begin{cases} 1, & -\frac{3}{2} < f < \frac{3}{2} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$
- $w(t) = \frac{\sin(2\pi t)}{\pi t} = 2\mathrm{sinc}(2t) \overset{F}{\longleftrightarrow} W(f) = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2}\right) = \begin{cases} 1, & -1 < f < 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

Άρα

$$x(t) = 12\mathrm{sinc}(3t)\mathrm{sinc}(2t) = s(t)w(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(f) = W(f) * S(f) = 12\mathrm{rect}\left(\frac{f}{3}\right) * \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2}\right) \tag{19}$$

(δ') Είναι $x(t) = \frac{d}{dt}te^{-2t}\sin(t)u(t) = \frac{d}{dt}\left[te^{-2t}u(t)\frac{e^{jt}-e^{-jt}}{2j}\right]$

- $s(t) = te^{-2t}u(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} S(f) = \frac{1}{(2+j2\pi f)^2}$
- $w_1(t) = e^{jt}s(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} W_1(f) = S\left(f - \frac{1}{2\pi}\right)$
- $w_2(t) = e^{-jt}s(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} W_2(f) = S\left(f + \frac{1}{2\pi}\right)$
- $x(t) = \frac{d}{dt}\frac{1}{2j}[w_1(t) + w_2(t)] \overset{F}{\longleftrightarrow} X(f) = \pi f\left(W_1(f) + W_2(f)\right)$

Άρα

$$X(f) = \pi f \left(\frac{1}{(2 + j2\pi(f - \frac{1}{2\pi}))^2} - \frac{1}{(2 + j2\pi(f + \frac{1}{2\pi}))^2} \right) \tag{20}$$

(ε') Είναι $x(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{\sin(2\pi\tau)}{\pi\tau} d\tau$

- $s(t) = \frac{\sin(2\pi\tau)}{\pi\tau} = 2\text{sinc}(2\tau) \overset{F}{\longleftrightarrow} S(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{2}\right) = \begin{cases} 1, & -1 < f < 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$
- $x(t) = \int_{-\infty}^{t} s(\tau)d\tau \overset{F}{\longleftrightarrow} X(f) = \frac{1}{j2\pi f} S(f) + \frac{S(0)}{2}\delta(f)$

Άρα

$$X(f) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & f = 0 \\ \frac{1}{j2\pi f}, & |f| < 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{21}$$

(ϛ') Είναι $x(t) = e^{-t+2}u(t-2)$

- $s(t) = e^{-t}u(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} S(f) = \frac{1}{1 + j2\pi f}$
- $x(t) = s(t-2) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(f) = e^{-j4\pi f} S(f)$

Άρα

$$X(f) = e^{-j4\pi f} \frac{1}{1 + j2\pi f} \tag{22}$$

(ζ) Είναι $x(t) = \frac{\sin(t)}{\pi t} * \frac{d}{dt} \frac{\sin(2t)}{\pi t}$

- $s(t) = \frac{\sin(t)}{\pi t} = \frac{\sin(\pi \frac{t}{\pi})}{\pi t} = \frac{\sin(\pi \frac{t}{\pi})}{\pi^2 (\frac{t}{\pi})} = \frac{1}{\pi}\text{sinc}\left(\frac{1}{\pi}t\right) \overset{F}{\longleftrightarrow} S(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{\frac{1}{\pi}}\right) = \begin{cases} 1, & -\frac{1}{2\pi} < f < \frac{1}{2\pi} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$
- $w(t) = \frac{\sin(2t)}{\pi t} = 2\frac{\sin(2\pi \frac{t}{\pi})}{2\pi t} = 2\frac{\sin(2\pi \frac{t}{\pi})}{2\pi^2 (\frac{t}{\pi})} = \frac{2}{\pi}\text{sinc}\left(\frac{2}{\pi}t\right) \overset{F}{\longleftrightarrow} W(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{\frac{2}{\pi}}\right) = \begin{cases} 1, & -\frac{1}{\pi} < f < \frac{1}{\pi} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$
- $z(t) = \frac{d}{dt} w(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} Z(f) = j2\pi f W(f)$
- $x(t) = s(t) * z(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(f) = S(f)Z(f) = j2\pi f W(f) S(f)$

Άρα

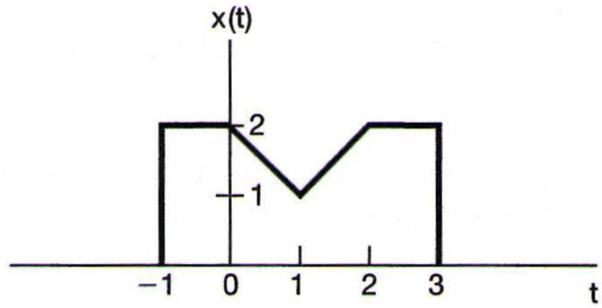
$$X(f) = \begin{cases} j2\pi f, & |f| < \frac{1}{2\pi} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{23}$$

Άσκηση 4 - Μετασχηματισμός Fourier και Ιδιότητες - III

Έστω $X(f)$ ο μετασχ. Fourier του σήματος $x(t)$, το οποίο φαίνεται στο Σχήμα 2.

(α') Ο μετασχηματισμός μπορεί να γραφεί στη μορφή $A(f)e^{j\Theta(f)}$, με $A(f)$ και $\Theta(f)$ πραγματικές συναρτήσεις. Βρείτε τη $\Theta(f)$.

(β') Υπολογίστε το $X(0)$.



Σχήμα 2: *Σήμα $x(t)$ Άσκησης 4.*

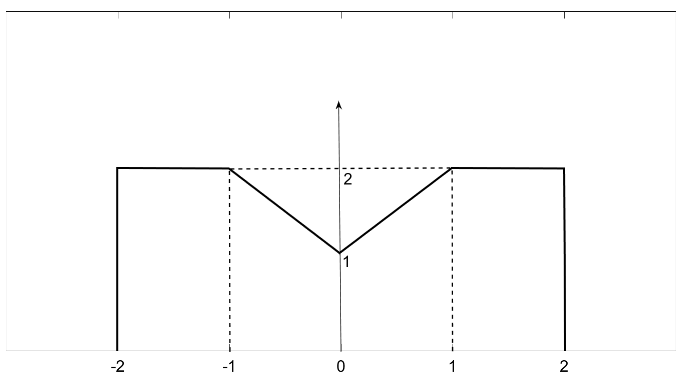
(γ') Υπολογίστε το $\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)df$.

(δ') Υπολογίστε το $\int_{-\infty}^{+\infty} 2X(f)\frac{\sin(2\pi f)}{2\pi f}e^{j4\pi f}df$.

(ε') Υπολογίστε το $\int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$.

Λύση:

(α') Αν το $x(t)$ ήταν ως:



Σχήμα 3: *Μετατοπισμένο σχήμα 'σκησης 4.*

τότε λόγω άρτιας συμμετρίας θα είχε μηδενική ή σταθερή φάση. Η μετατόπιση δεξιά κατά $t_0 = 1$ θα του δώσει φάση $\Theta(f) = -2\pi f$, σύμφωνα με την ιδιότητα της μετατόπισης.

(β') $X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi\cdot 0\cdot t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt =$ Εμβαδό $x(t) = 7$

(γ') $\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)df = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{-j2\pi f\cdot 0} = x(0) = 2$

(δ') Έστω $Y(f) = \frac{2\sin(2\pi f)}{2\pi f}e^{j2\pi 2f} \overset{F}{\longleftrightarrow} y(t) = \mathrm{rect}\Big(\frac{t+2}{2}\Big)$, οπότε: $\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)Y(f)df = x(t) * y(t)\Big|_{t=0} = \frac{7}{2}$

(ε') $\int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt = 13$