ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2020-21
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Τέταρτο Φροντιστήριο

[⋆] Άσκηση 1 - Σειρά Fourier I
Έστω το περιοδικό σήμα $x(t) = |\cos(\pi t)|$.

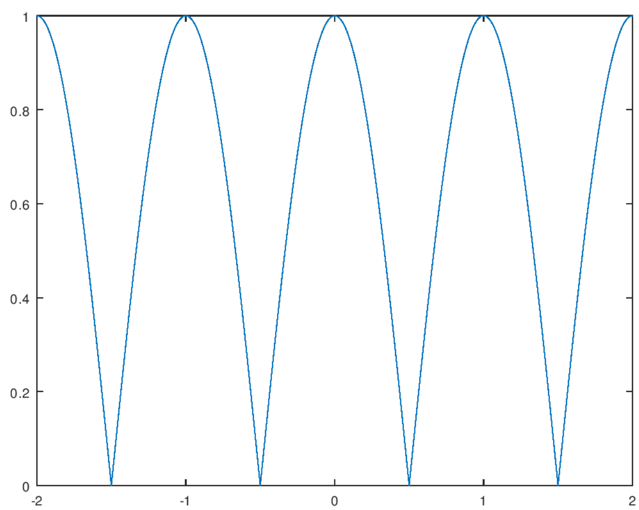
(α΄) Σχεδιάστε μερικές περιόδους του και βρείτε τη βασική του περίοδο T_0.

(β΄) Υπολογίστε αναλυτικά την εκθετική Σειρά Fourier.

(γ΄) Σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης χρησιμοποιώντας μόνο τα $k = \pm 4, \pm 3, \pm 2, \pm 1, 0$.

Λύση:

(α΄) Η περίοδος του σήματος είναι $T_0 = 1$, δείτε το Σχήμα 1.



Σχήμα 1: *Σχήμα Άσκησης 1α.*

.

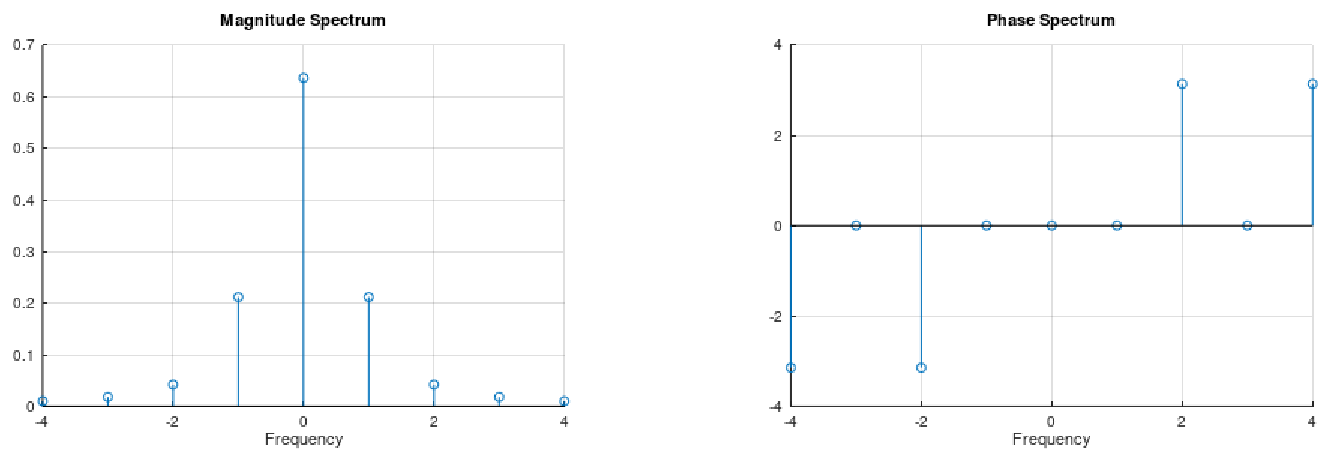
(β΄) Έχουμε

$$X_0 = \frac{1}{T_0}\int_{-1/2}^{1/2} x(t)dt = \int_{-1/2}^{1/2} \cos(\pi t)dt = \frac{1}{\pi}\sin(\pi t)\Big]_{-1/2}^{1/2} = \frac{1}{\pi}(1-(-1)) = \frac{2}{\pi} \tag{1}$$

και

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{-1/2}^{1/2} x(t)e^{-j2\pi k/T_0 t}dt = \int_{-1/2}^{1/2}\cos(\pi t)e^{-j2\pi kt}dt \tag{2}$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-1/2}^{1/2} e^{j\pi t}e^{-j2\pi kt}dt + \frac{1}{2}\int_{-1/2}^{1/2} e^{-j\pi t}e^{-j2\pi kt}dt \tag{3}$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-1/2}^{1/2} e^{-j\pi(2k-1)t}dt + \frac{1}{2}\int_{-1/2}^{1/2} e^{-j\pi(2k+1)t}dt \tag{4}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{1}{-j\pi(2k-1)}e^{-j\pi(2k-1)t}\Big]_{-1/2}^{1/2} + \frac{1}{2}\frac{1}{-j\pi(2k+1)}e^{-j\pi(2k+1)t}\Big]_{-1/2}^{1/2} \tag{5}$$
$$= -\frac{1}{j2\pi(2k-1)}(e^{-j\pi(2k-1)/2} - e^{j\pi(2k-1)/2}) - \frac{1}{j2\pi(2k+1)}(e^{-j\pi(2k+1)/2} - e^{j\pi(2k+1)2}) \tag{6}$$
$$= -\frac{1}{j2\pi(2k-1)}(-2j\sin(\pi(2k-1)/2)) - \frac{1}{j2\pi(2k+1)}(-2j\sin(\pi(2k+1)/2)) \tag{7}$$
$$= \frac{\sin(\pi(2k-1)/2)}{\pi(2k-1)} + \frac{\sin(\pi(2k+1)/2)}{\pi(2k+1)} \tag{8}$$

(γ') Το φάσμα πλάτους και φάσης φαίνεται στο Σχήμα 2.



Σχήμα 2: *Σχήμα Άσκησης 1γ.*

.

Άσκηση 2 - Σειρά Fourier II

Έστω το περιοδικό σήμα $x(t)$ με περίοδο T_0, που φαίνεται στο Σχήμα 3. Βρείτε

(α') την περίοδό του, T_0

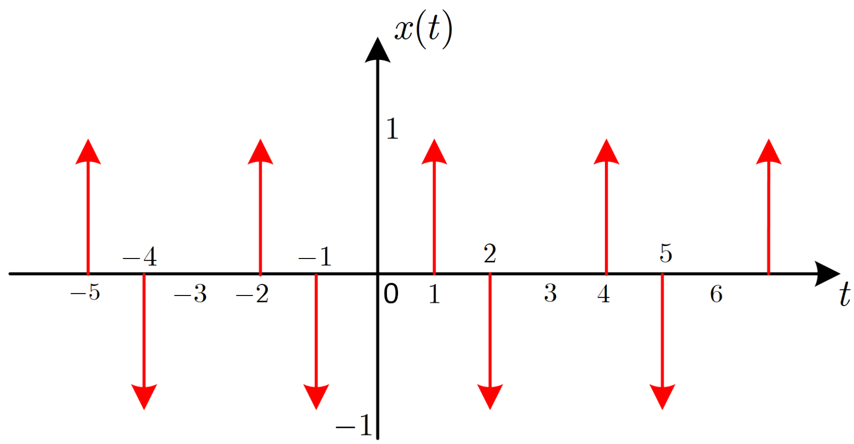
(β') τους συντελεστές Fourier του, X_k

Λύση:

(α') Προφανώς η περίοδος του σήματος είναι $T_0 = 3$.

(β') Το σήμα μπορεί να χωριστεί σε άθροισμα δυο υπο-σημάτων, του

$$x_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-3k-1) \tag{9}$$



Σχήμα 3: *Περιοδικό Σήμα Άσκησης 2.*

που αποτελεί τις συναρτήσεις δέλτα με θετικό “πλάτος ”, και του

$$x_2(t) = -\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - 3k + 1) \tag{10}$$

που αποτελεί τις συναρτήσεις δέλτα με αρνητικό “πλάτος ”. Αμφότερα είναι χρονικές μετατοπίσεις του γνωστού σήματος

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0) \longleftrightarrow X_k = \frac{1}{T_0} \tag{11}$$

με $T_0 = 3$, και αναπτύσσονται σε σειρά Fourier σύμφωνα με την ιδιότητα της χρονικής μετατόπισης

$$x(t - t_0) \longleftrightarrow X_k e^{-j2\pi k f_0 t_0} \tag{12}$$

ως

$$X_{1k} = \frac{1}{3} e^{-j2\pi k/3} \tag{13}$$

$$X_{2k} = -\frac{1}{3} e^{j2\pi k/3} \tag{14}$$

Οπότε το συνολικό σήμα θα έχει συντελεστές Fourier

$$X_k = X_{1k} + X_{2k} = \frac{1}{3} e^{-j2\pi k/3} - \frac{1}{3} e^{j2\pi k/3} = -\frac{2j}{3}\sin(2\pi k/3) = \frac{2}{3} e^{-j\pi/2} \sin\left(\frac{2\pi k}{3}\right) \tag{15}$$

Παρατηρήστε ότι στη συγκεκριμένη περίπτωση, το X_0 προκύπτει από τον τύπο του X_k (δηλ. μπορούμε να θέσουμε $k = 0$ στη σχέση που βρήκαμε και να πάρουμε έναν αριθμό - μηδέν, εν προκειμένω).

Άσκηση 3 - Σειρές Fourier - Ιδιότητες

Έστω ότι για ένα περιοδικό σήμα $x(t)$ μας δίνονται οι παρακάτω πληροφορίες:

- είναι πραγματικό και περιττό
- έχει περιόδο $T_0 = 2$ και συντελεστές Fourier X_k
- ισχύει $X_k = 0$ για $|k| > 1$
- ισχύει $\frac{1}{2}\int_0^2 |x(t)|^2 dt = 1$

Βρείτε δυο σήματα που ικανοποιούν τις παραπάνω προδιαγραφές.

Λύση:
Αφού το σήμα είναι πραγματικό, έχει συντελεστές X_k μόνο για $|k| \leq 1$, και έχει $T_0 = 2$, θα είναι της μορφής

$$x(t) = X_1^* e^{-j2\pi \frac{1}{2} t} + X_0 + X_1 e^{j2\pi \frac{1}{2} t} \tag{16}$$

Επιπλέον, αφού είναι περιττό, γνωρίζουμε από τον πίνακα ιδιοτήτων ότι οι συντελεστές X_k θα είναι καθαρά φανταστικοί αριθμοί και περιττοί ως προς k, δηλ.

$$X_k = -X_{-k} \tag{17}$$

όπως επίσης και $X_0 = 0$. Από τη σχέση του ολοκληρώματος - που αποτελεί το θεώρημα του Parseval - θα έχουμε

$$\frac{1}{2}\int_0^2 |x(t)|^2 dt = 1 \iff \sum_{k=-1}^{1} |X_k|^2 = 1 \iff 2|X_1|^2 + |X_0|^2 = 1 \tag{18}$$

$$\iff 2|X_1|^2 = 1 \tag{19}$$

$$\iff |X_1| = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{20}$$

$$\iff X_1 = \pm j\frac{1}{\sqrt{2}} \tag{21}$$

$$\tag{22}$$

Έτσι, αν $X_1 = j\frac{1}{\sqrt{2}}$, τότε $-X_{-1} = X_1 = j\frac{1}{\sqrt{2}}$, και αν $X_1 = -j\frac{1}{\sqrt{2}}$, τότε $-X_{-1} = X_1 = -j\frac{1}{\sqrt{2}}$. Τέλος, λόγω του ότι το σήμα είναι πραγματικό, ισχύει $X_k = X_{-k}^*$. Άρα τα δυο σήματα που ικανοποιούν τα παραπάνω είναι τα

$$x_1(t) = \frac{j}{\sqrt{2}} e^{j\pi t} - \frac{j}{\sqrt{2}} e^{-j\pi t} = -\sqrt{2}\sin(\pi t) \tag{23}$$

$$x_2(t) = -\frac{j}{\sqrt{2}} e^{j\pi t} + \frac{j}{\sqrt{2}} e^{-j\pi t} = \sqrt{2}\sin(\pi t) \tag{24}$$

μέσω των σχέσεων του Euler.