ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2020-21
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

3ο Φροντιστήριο

Άσκηση 1 - Διαφορικές εξισώσεις

Υπολογίστε την απόκριση μηδενικής εισόδου για το παρακάτω συύστημα και τις αρχικές του συνθήκες.

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 7\frac{d}{dt}y(t) + 10y(t) = x(t) + \frac{d}{dt}x(t), \text{ με } y(0^-) = 2, y'(0^-) = -2 \tag{1}$$

Τι παρατηρείτε ότι συμβαίνει όταν $t \to +\infty$; Μπορείτε να το χαρακτηρίσετε ως προς την ευστάθειά του;

Λυση:

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι το

$$\lambda^2 + 7\lambda + 10$$

και οι χαρακτηριστικές ρίζες του είναι οι $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -5$. Άρα η απόκριση μηδενικής εισόδου θα είναι της μορφής

$$y_{zi}(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-5t}, \quad t > 0$$

Η παράγωγος είναι

$$\frac{d}{dt}y_{zi}(t) = -2c_1 e^{-2t} - 5c_2 e^{-5t}$$

και από τις αρχικές συνθήκες έχουμε

$$y(0^-) = c_1 + c_2 = 2$$

$$y'(0^-) = -2c_1 - 5c_2 = -2$$

Το παραπάνω σύστημα έχει λύση

$$c_1 = 8/3, \quad c_2 = -2/3$$

Άρα η απόκριση μηδενικής εισόδου δίνεται ως

$$y_{zi}(t) = \frac{8}{3}e^{-2t}u(t) - \frac{2}{3}e^{-5t}u(t)$$

Το σύστημα είναι ευσταθές γιατί όταν $t \to \infty$, η απόκριση μηδενικής εισόδου αποτελείται από φθίνοντα εκθετικά, δηλ. "σβήνει" στο μηδεν. Αυτό επιβεβαιώνεται από τις χαρακτηριστικές ρίζες, που είναι αρνητικές, και ξέρουμε ότι συνθήκη ευστάθειας ενός συστήματος που περιγράφεται από διαφορικές εξισώσεις είναι $\lambda_i < 0, \forall i$.

Άσκηση 2 - Κρουστική Απόκριση

Υπολογίστε την κρουστική απόκριση του

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) - 3\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = x(t) - \frac{d}{dt}x(t) \tag{2}$$

Τι παρατηρείτε ότι συμβαίνει στις κρουστικές αποκρίσεις όταν $t \to +\infty$; Μπορείτε να τα χαρακτηρίσετε ως προς την ευστάθειά τους;

Λύση:
Εστω η διαφορική εξίσωση
$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) - 3\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = x(t)$$
και έστω $h_o(t)$ η κρουστική της απόκριση. Έχουμε
$$\frac{d^2}{dt^2}h_o(t) - 3\frac{d}{dt}h_o(t) + 2h_o(t) = \delta(t)$$
η οποία ανάγεται στην
$$\frac{d^2}{dt^2}h_o(t) - 3\frac{d}{dt}h_o(t) + 2h_o(t) = 0$$
με αρχικές συνθήκες $h_o(0^+) = 0$, $h_o'(0^+) = 1$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι το
$$\lambda^2 - 3\lambda + 2$$
και οι χαρακτηριστικές ρίζες του είναι οι $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$. Άρα η κρουστική απόκριση θα είναι της μορφής
$$h_o(t) = c_1e^t + c_2e^{2t}, \quad t > 0$$
Η παράγωγος είναι
$$\frac{d}{dt}h_o(t) = c_1e^t + 2c_2e^{2t}$$
και από τις αρχικές συνθήκες έχουμε
$$h(0^+) = c_1 + c_2 = 0$$
$$h'(0^+) = c_1 + 2c_2 = 1$$
Το παραπάνω σύστημα έχει λύση
$$c_1 = -1, \quad c_2 = 1$$
Άρα η κρουστική απόκριση $h_o(t)$ δίνεται ως
$$h_o(t) = (-e^t + e^{2t})u(t)$$
Τέλος, η κρουστική απόκριση του αρχικού συστήματος δίνεται ως
$$\begin{aligned} h(t) = h_o(t) - \frac{d}{dt}h_o(t) &= -e^tu(t) + e^{2t}u(t) + \frac{d}{dt}e^tu(t) - \frac{d}{dt}e^{2t}u(t) \\ &= -e^tu(t) + e^{2t}u(t) + e^tu(t) + e^t\delta(t) - 2e^{2t}u(t) - e^{2t}\delta(t) \\ &= e^{2t}u(t) + \delta(t) - 2e^{2t}u(t) - \delta(t) \\ &= -e^{2t}u(t) \end{aligned}$$
Το σύστημα είναι ασταθές γιατί όταν $t \to \infty$, η απόκριση μηδενικής εισόδου “φεύγει” στο άπειρο. Αυτό επιβεβαιώνεται από τις χαρακτηριστικές ρίζες που είναι θετικές.

Άσκηση 3 - Συνέλιξη
Υπολογίστε τη συνέλιξη μεταξύ των σημάτων $x(t) = 6e^{-t}u(t)$ και $h(t) = 2u(t)$.

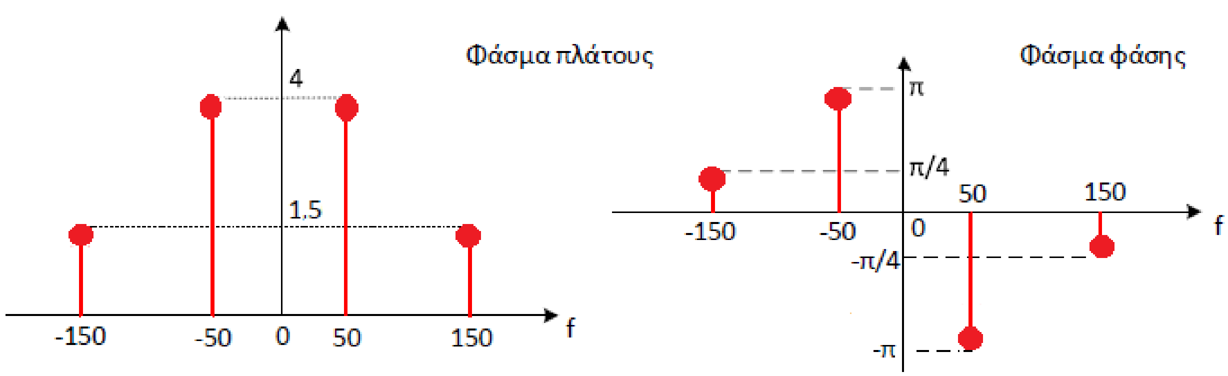
Λύση:
Έχουμε
$$\begin{aligned} y(t) = h(t) * x(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} 6e^{-\tau}u(\tau)2u(t-\tau)d\tau \\ &= 12\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau}u(\tau)u(t-\tau)d\tau = 12\int_0^t e^{-\tau}d\tau \end{aligned}$$

αφού
$$u(\tau)u(t-\tau) = 1$$
για $0 < \tau < t$. Οπότε
$$\begin{aligned} y(t) &= 12\int_0^t e^{-\tau}d\tau = 12(-e^{-\tau})\Big]_0^t \\ &= 12(-e^{-t}+1) = 12(1-e^{-t}), \quad t > 0 \end{aligned}$$
Οπότε
$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 12(1-e^{-t}), & t > 0 \end{cases}$$

Άσκηση 4 - Φάσματα

I. Σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης του σήματος
$$x(t) = -2 + 2\cos(2\pi 100t + \pi/3) - \sin(2\pi 250t + \pi/4) \tag{3}$$
δείχνοντας αναλυτικά τα βήματά σας.

II. Σας δίνονται τα παρακάτω φάσματα πλάτους και φάσης.



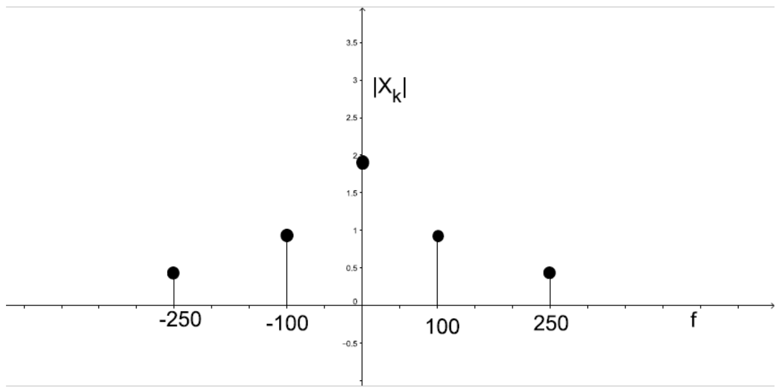
Σχήμα 1: Φάσματα Άσκησης 2.

Βρείτε το σήμα στο χρόνο $x(t)$ στο οποίο αντιστοιχούν.

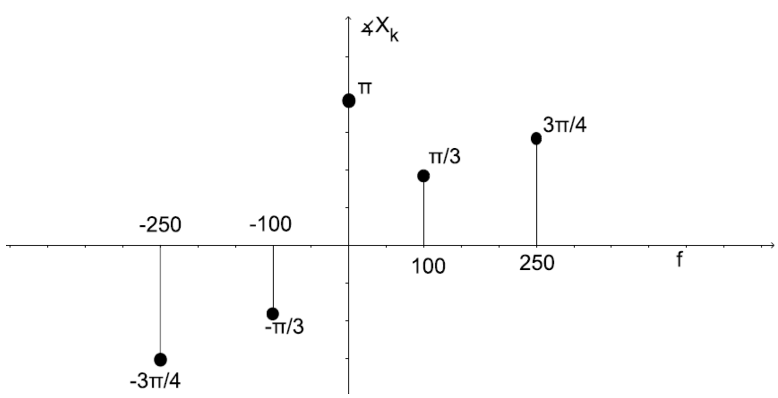
<u>Λύση:</u>

(I) Έχουμε
$$\begin{aligned} x(t) &= -2 + 2\cos(2\pi 100t + \frac{\pi}{3}) - \sin(2\pi 250t + \frac{\pi}{4}) \\ &= 2e^{j\pi} + e^{j\frac{\pi}{3}} \cdot e^{-j2\pi 100t} + e^{-j\frac{\pi}{3}} \cdot e^{-j2\pi 100t} - \frac{1}{2j}e^{j\frac{\pi}{4}} \cdot e^{j2\pi 250t} + \frac{1}{2j}e^{-j\frac{\pi}{4}} \cdot e^{-j2\pi 250t} \\ &= 2e^{j\pi} + e^{j\frac{\pi}{3}} \cdot e^{-j2\pi 100t} + e^{-j\frac{\pi}{3}} \cdot e^{-j2\pi 100t} + \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{j\frac{\pi}{4}} \cdot e^{j2\pi 250t} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-j\frac{\pi}{4}} \cdot e^{-j2\pi 250t} \\ &= 2e^{j\pi} + e^{j\frac{\pi}{3}} \cdot e^{j2\pi 100t} + e^{-j\frac{\pi}{3}} \cdot e^{-j2\pi 100t} + \frac{1}{2}e^{j\frac{3\pi}{4}} \cdot e^{j2\pi 250t} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{3\pi}{4}} \cdot e^{-j2\pi 250t} \end{aligned}$$
και άρα τα φάσματα θα είναι όπως στο Σχήμα 2 και 3.

(II) Από τα φάσματα, έχουμε
$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{3}{2}e^{j\frac{\pi}{4}} \cdot e^{-j2\pi 150t} + \frac{3}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}} \cdot e^{j2\pi 150t} + 4e^{-j\pi} \cdot e^{j2\pi 50t} + 4e^{j\pi} \cdot e^{-j2\pi 50t} & (4) \\ &= 3\cos(2\pi 150t - \frac{\pi}{4}) + 8\cos(2\pi 50t - \pi) & (5) \end{aligned}$$



Σχήμα 2: *Φασμα Πλάτους 'Ασκησης 4-Ι*



Σχήμα 3: *Φάσμα Φάσης 'Ασκησης 4-Ι*