ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2020-21
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

2ο Φροντιστήριο

Άσκηση 1 - Ενέργεια και Ισχύς

Ελέγξτε τα παρακάτω σήματα ως προς το αν είναι σήματα ενέργειας ή ισχύος (ή τίποτε από τα δυο), υπολογίζοντας την πιο πιθανή από τις δυο μετρικές, σύμφωνα με όσα γνωρίζετε από τις διαλέξεις. Δικαιολογήστε την επιλογή της μετρικής πριν κάνετε τις πράξεις.

(α') $x(t) = tu(-t)$

(β') $x(t) = 3\cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{2}\right) + 4\sin\left(10\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$

(γ') $x(t) = \frac{1}{t}u(t-1)$

(δ') $x(t) = e^{-4|t|}$

Λύση:

(α') Το σήμα $x(t) = tu(-t)$ δεν είναι φραγμένο και δεν πληροί κανένα από τα κριτήρια κατηγοριοποίησης. Άρα δεν είναι ούτε σήμα ενέργειας ούτε σήμα ισχύος. Ας το δείξουμε:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2u^2(-t)dt = \int_{-\infty}^{0} t^2dt = \frac{t^3}{3}\Big|_{-\infty}^{0} = +\infty \tag{1}$$

και

$$P_x = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x^2(t)dt = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{0} t^2dt = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\frac{t^3}{3}\Big|_{-T}^{0} \tag{2}$$

$$= \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\frac{T^3}{3} = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2}\frac{T^2}{3} = \lim_{T\to+\infty}\frac{T^2}{6} = +\infty \tag{3}$$

(β') Το σήμα $x(t) = 3\cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{2}\right) + 4\sin\left(10\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$ είναι περιοδικό, οπότε είναι σήμα ισχύος. Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι

$$P_x = \frac{3^2}{2} + \frac{4^2}{2} = \frac{25}{2} \tag{4}$$

(γ') Για το σήμα $x(t) = \frac{1}{t}u(t-1)$ βλέπουμε ότι φθίνει το μηδέν όσο $t \to +\infty$, οπότε πιθανόν να είναι σήμα ενέργειας. Άρα

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt = \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt = -\frac{1}{t}\Big|_{t=1}^{+\infty} = -(0-1) = 1 \tag{5}$$

(δ') Για το σήμα $x(t) = e^{-4|t|}$ παρατηρούμε ότι είναι άπειρης διάρκειας αλλά όσο $|t| \to \infty$, το πλάτος του φθίνει στο μηδέν. Οπότε πιθανόν είναι σήμα ενέργειας. Έτσι

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-8|t|}dt = \int_{-\infty}^{0} e^{8t}dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-8t}dt = \frac{1}{8}e^{8t}\Big|_{\infty}^{0} - \frac{1}{8}e^{-8t}\Big|_{0}^{+\infty} = \frac{1}{4} \tag{6}$$

Άσκηση 2 - Μετασχηματισμοί Σημάτων
Σχεδιάστε τα σήματα

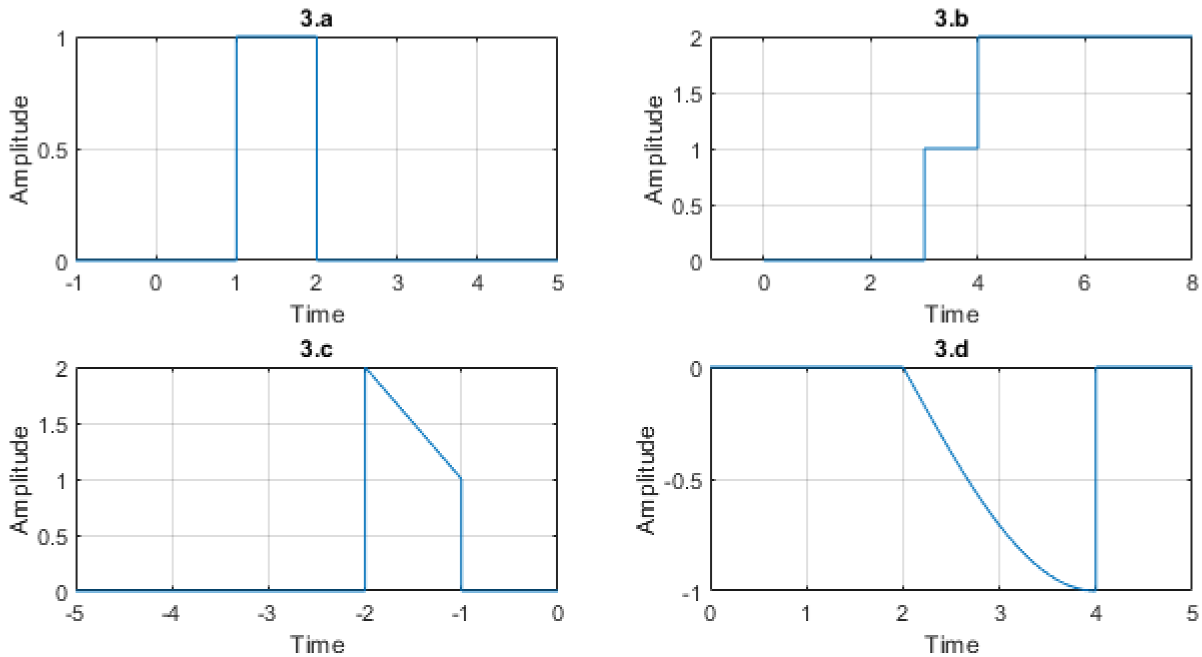
(α') $u(t-1) - u(t-2)$

(β') $u(t-3) + u(t-4)$

(γ') $t(u(t+1) - u(t+2))$

(δ') $\cos(\pi t/4)(u(t-2) - u(t-4))$

Λύση:
Τα σχήματα φαίνονται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1: *Σχήματα Άσκησης 2.*

Άσκηση 3 - Συναρτήσεις Δέλτα και Βηματικές
Θεωρήστε το σήμα

$$x(t) = tu(t) \tag{7}$$

το οποίο ονομάζεται και "σήμα ράμπας", για προφανείς - όταν το σχεδιάσετε - λόγους. :-) Το σήμα αυτό περνά από ένα σύστημα διαφοριστή, δηλ. η έξοδος του συστήματος είναι απλά η παράγωγος του $x(t)$:

$$y(t) = \frac{d}{dt}x(t) \tag{8}$$

(α') Σχεδιάστε το σήμα $x(t)$.

(β') Δείξτε ότι η έξοδος $y(t)$ μπορεί να γραφεί ως

$$y(t) = \frac{d}{dt}x(t) = u(t) \tag{9}$$

(γ') Δείξτε ότι αν περάσουμε την παραπάνω έξοδο $y(t)$ ξανά από το σύστημα (δηλ. τη θεωρήσουμε ως είσοδο $x_1(t)$), η νέα έξοδος θα είναι

$$y_1(t) = \frac{d}{dt}x_1(t) = \delta(t) \tag{10}$$

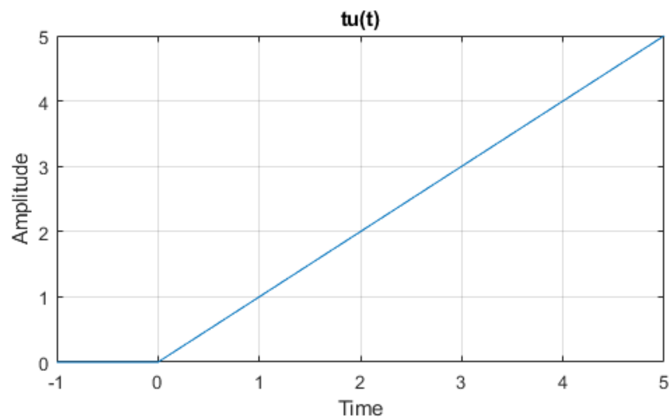
(δ') Θεωρήστε το σήμα

$$x(t) = \cos(2\pi t)\Big[u(t) - u(t-1)\Big] \tag{11}$$

Βρείτε την παράγωγο του παραπάνω σήματος.

<u>Λύση</u>:

(α') Το σήμα $x(t)$ φαίνεται στο Σχήμα 2.



Σχήμα 2: *Σχήματα Άσκησης 5.*

(β') Η έξοδος δίνεται ως

$$y(t) = \frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}tu(u) = t'u(t) + tu'(t) = u(t) + t\delta(t) = u(t) + 0\delta(t) = u(t) \tag{12}$$

(γ') Για $x_1(t) = u(t)$, η νέα έξοδος θα είναι

$$y_1(t) = \frac{d}{dt}x_1(t) = \frac{d}{dt}u(t) = \delta(t) \tag{13}$$

εξ' ορισμού.

(δ') Έσω το σήμα

$$x(t) = \cos(2\pi t)\Big[u(t) - u(t-1)\Big] \tag{14}$$

Η παράγωγος του θα είναι

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}x(t) &= \frac{d}{dt}\cos(2\pi t)u(t) - \frac{d}{dt}\cos(2\pi t)u(t-1) && (15)\\
&= -2\pi\sin(2\pi t)u(t) + \cos(2\pi t)\delta(t) - (-2\pi\sin(2\pi t)u(t-1) + \cos(2\pi t)\delta(t-1)) && (16)\\
&= -2\pi\sin(2\pi t)u(t) + \delta(t) + 2\pi\sin(2\pi t)u(t-1) - \delta(t-1) && (17)\\
&= -2\pi\sin(2\pi t)\Big[u(t) - u(t-1)\Big] + \delta(t) - \delta(t-1) && (18)
\end{aligned}$$

Άσκηση 4 - Συστήματα

Ελέγξτε αν τα παρακάτω συστήματα είναι γραμμικά, χρονικά αμετάβλητα, ευσταθή, αιτιατά, και δυναμικά.

(α') $y(t) = |x(t)|$ (β') $y(t) = e^{x(t)}$ (γ') $y(t) = t\sin(|x(t+1)|)$

Λύση:

(α') $y(t) = |x(t)|$:

- Γραμμικο: για είσοδο $ax_1(t)$, το σύστημα αποκρίνεται $y_1(t) = |ax_1(t)| = |a||x_1(t)| \neq ay(t)$, άρα δεν ικανοποιείται η ιδιότητα της ομογένειας. Οπότε το σύστημα δεν είναι γραμμικό.
- Χ.Α: αν βάλουμε ως είσοδο το σήμα $x_1(t) = x(t-t_0)$, τότε η έξοδος θα είναι $y_1(t) = |x(t-t_0)|$. Επίσης, αν καθυστερήσουμε την είσοδο κατά t_0 τότε $y(t-t_0) = |x(t-t_0)| = y_1(t)$, οπότε το σύστημα είναι Χ.Α.
- Ευσταθές: αν $|x(t)| < B_x \in \Re$, τότε προφανώς $|y(t)| = ||x(t)|| = |x(t)| < B_x$, και έτσι το σύστημα είναι ευσταθές.
- Αιτιατό: το σύστημα είναι αιτιατό γιατί δεν απαιτούνται μελλοντικές τιμές τη εισόδου για τον υπολογισμό μιας εξόδου.
- Δυναμικό: το σύστημα δεν είναι δυναμικό γιατί δεν απαιτείται μνήμη για τη λειτουργία του.

(β') $y(t) = e^{x(t)}$:

- Γραμμικό: για είσοδο $ax_1(t)$ η έξοδος θα είναι $y_1(t) = e^{ax_1(t)} \neq ay(t)$, άρα το σύστημα δεν είναι γραμμικό αφού δεν είναι ομογενές.
- Χ.Α: αν βάλουμε ως είσοδο το σήμα $x_1(t) = x(t-t_0)$, τότε η έξοδος θα είναι $y_1(t) = e^{x(t-t_0)}$. Επίσης, αν καθυστερήσουμε την είσοδο κατά t_0 τότε $y(t-t_0) = e^{x(t-t_0)} = y_1(t)$, οπότε το σύστημα είναι Χ.Α.
- Ευσταθές: αν $|x(t)| < B_x \in \Re$, τότε προφανώς $|y(t)| = e^{x(t)} < e^{B_x}$, και έτσι το σύστημα είναι ευσταθές.
- Αιτιατό: το σύστημα είναι αιτιατό γιατί δεν απαιτεί μελλοντικές τιμές της εισοδου για να υπολογιστεί μια τιμή της εξόδου.
- Δυναμικό: το σύστημα δεν είναι δυναμικό γιατί δεν απαιτείται μνήμη για τη λειτουργία του.

(γ') $y(t) = t\sin(|x(t+1)|)$:

- Γραμμικό: αν $ax_1(t)$ η είσοδος, τότε το σύστημα αποκρίνεται $y_1(t) = t\sin(|ax(t+1)|) \neq ay(t)$, οπότε το σύστημα δεν είναι γραμμικό αφού δεν είναι ομογενές.
- Χ.Α: αν βάλουμε ως είσοδο το σήμα $x_1(t) = x(t-t_0)$, τότε η έξοδος θα είναι $y_1(t) = t\sin(|x(t+1-t_0)|)$. Επίσης, αν καθυστερήσουμε την είσοδο κατά t_0 τότε $y(t-t_0) = (t-t_0)\sin(|x(t+1-t_0)|) \neq y_1(t)$, οπότε το σύστημα δεν είναι Χ.Α.
- Ευσταθές: αν $|x(t)| < B_x \in \Re$, τότε προφανώς $|y(t)| = |t\sin(|x(t+1)|)| \leq |t|$, το οποίο δεν έχει άνω φράγμα, οπότε το σύστημα είναι ασταθές.
- Αιτιατό: το σύστημα δεν είναι αιτιατό γιατί απαιτεί μελλοντικές τιμές της εισοδου για να υπολογιστεί μια τιμή της εξόδου (π.χ. για το $y(1)$ θέλουμε το $x(2)$).
- Δυναμικό: το σύστημα είναι δυναμικό γιατί απαιτείται μνήμη για τη λειτουργία του (η $t+1$ κάθε φορά τιμή της εισόδου).