ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2020-21
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

1ο Φροντιστήριο

Άσκηση 1 - Μιγαδικές Εξισώσεις Ι

Να λυθούν οι εξισώσεις

(α΄) $\dfrac{2-jz}{j+z}=1$

(β΄) $\dfrac{2z+8}{z+5}=j$

Λύση:

(α΄)

$$\frac{2-jz}{j+z}=1 \iff \frac{2-j(x+jy)}{j+x+jy}=1 \iff 2-jx-j^2y=x+j(y+1) \iff 2+y-jx=x+j(y+1) \quad (1)$$

$$\iff \begin{cases} 2+y &= x \\ -x &= y+1 \end{cases} \iff \begin{cases} y &= -\frac{3}{2} \\ x &= \frac{1}{2} \end{cases} \quad (2)$$

(β΄)

$$\frac{2z+8}{z+5}=j \iff 2(x+jy)+8=j(x+jy+5) \iff 2x+8+j2y=-y+j(5+x) \quad (3)$$

$$\iff \begin{cases} 2x+8 &= -y \\ 2y &= x+5 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= -\frac{21}{5} \\ y &= \frac{2}{5} \end{cases} \quad (4)$$

Άσκηση 2 - Μιγαδικές Εξισώσεις ΙΙ

(α΄) Να βρεθεί ο μιγαδικός z αν

$$(1+j)(z+z^*)+(2-j)(z+2z^*)=1 \quad (5)$$

(β΄) Να βρεθούν οι τιμές των $x, y \in \Re$ αν

$$\frac{(3+4j)^2}{1-2j}=z+j \quad (6)$$

Λύση:

(α΄) Για $z=x+jy$ έχουμε

$$(1+j)(z+z^*)+(2-j)(z+2z^*)=1 \iff (1+j)2\mathrm{Re}\{z\}+(2-j)(2\mathrm{Re}\{z\}+z^*)=1 \quad (7)$$

$$\iff (1+j)2x+(2-j)(3x-jy)=1 \quad (8)$$

$$\iff 2x+j2x+6x-j2y-j3x-y=1 \quad (9)$$

$$\iff (8x-y)+j(-2y-x)=1 \quad (10)$$

$$\iff \begin{cases} 8x-y &= 1 \\ -x-2y &= 0 \end{cases} \quad (11)$$

$$\iff \begin{cases} x &= -\frac{2}{17} \\ y &= -\frac{1}{17} \end{cases} \quad (12)$$

(β') Είναι

$$\frac{(3+4j)^2}{1-2j} = z + j \iff (3+4j)^2 = (z+j)(1-2j) \tag{13}$$
$$\iff 9 + j24 - 16 = (x + j(y+1))(1-2j) \tag{14}$$
$$\iff -7 + j24 = x - j2x + j(y+1) + 2(y+1)) \tag{15}$$
$$\iff -7 + j24 = (x + 2y + 2) + j(y + 1 - 2x) \tag{16}$$
$$\iff \begin{cases} x + 2y + 2 & = -7 \\ y + 1 - 2x & = 24 \end{cases} \iff \begin{cases} x & = -11 \\ y & = 1 \end{cases} \tag{17}$$

Άσκηση 3 - Επίλυση εξισώσεων

Να λυθούν οι εξισώσεις

(α') $z^4 = 2 + 2\sqrt{3}j$

(β') $z^* - 2z = 2 - 12j$

(γ') $z^3 + 4\sqrt{2} + j4\sqrt{2} = 0$

Λύση:

(α') $z^4 = 2 + 2\sqrt{3}j$:

$$z^4 = |2 + j2\sqrt{3}| e^{j \tan^{-1} \frac{2\sqrt{3}}{2}} = 4e^{j\pi/3} \iff |z|^4 e^{j4\theta} = 4e^{j\pi/3} \tag{18}$$

οπότε

$$z = \begin{cases} |z| & = 4^{\frac{1}{4}} \\ 4\theta & = 2k\pi + \pi/3, \ \ k = 0,1,2,3 \end{cases} \iff \begin{cases} |z| & = \sqrt{2} \\ \theta & = \frac{1}{4}\frac{6k\pi+\pi}{3} = \frac{6k\pi+\pi}{12}, \ \ k = 0,1,2,3 \end{cases} \tag{19}$$

(β') $z^* - 2z = 2 - 12j$:

$$z^* - 2z = 2 - 12j \iff x - jy - 2(x + jy) = 2 - j12 \iff -x - j3y = 2 - j12 \iff \begin{cases} x & = -2 \\ y & = 4 \end{cases} \tag{20}$$

άρα $z = -2 + j4$

(γ') $z^3 + 4\sqrt{2} + j4\sqrt{2} = 0$:

$$z^3 = -4\sqrt{2} - j4\sqrt{2} = 8e^{-j\frac{3\pi}{4}} \iff |z|^3 e^{j3\theta} = 8e^{-j\frac{3\pi}{4}} \tag{21}$$

οπότε

$$z = \begin{cases} |z| & = 8^{\frac{1}{3}} \\ 3\theta & = 2k\pi - \frac{3\pi}{4}, \ \ k = 0,1,2 \end{cases} \iff \begin{cases} |z| & = 2 \\ \theta & = \frac{1}{3}\frac{8k\pi-3\pi}{4} = \frac{8k\pi-3\pi}{12}, \ \ k = 0,1,2 \end{cases} \tag{22}$$

Άσκηση 4 - Euler και De Moivre

Υπολογίστε τους μιγαδικούς

(α') $(1-j)^6$

(β') $(1+j)^4$

(γ') $(1+2j)^2 - (-j)^9$

(δ') $\frac{(2-2j)^3}{(1-j)^{12}}$

Λύση:

(α') $(1-j)^6 = (\sqrt{2}e^{-j\pi/4})^6 = \sqrt{2}^6 e^{-j6\pi/4} = 8e^{-j\frac{8\pi-2\pi}{4}} = 8e^{j\pi/2} = j8$

(β') $(1+j)^4 = (\sqrt{2}e^{j\pi/4})^4 = \sqrt{2}^4 e^{j4\pi/4} = 4e^{j\pi} = -4$

(γ') $(1+2j)^2 - (-j)^9 = (1+4j-4) - (-j)(-j)^8 = (-3+4j) - (-j)((-j)^2)^4 = -3+j4-(-j) = -3+j5$

(δ') $\frac{(2-2j)^3}{(1-j)^{12}} = 2^3\frac{(1-j)^3}{(1-j)^{12}} = 8(1-j)^{-9} = \frac{8}{16\sqrt{2}}e^{-j9\pi/4} = \frac{8}{16\sqrt{2}}e^{j\pi/4} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{4} + j\frac{1}{4}$