Κεφάλαιο 7

Μετασχηματισμός Z

7.1 Ορισμός του μετασχηματισμού Z

Ο μετασχηματισμός Z αποτελεί γενίκευση του μετασχηματισμού Fourier για τα σήματα διακριτού χρόνου. Ο μετασχηματισμός Z του διακριτού σήματος $x(n)$ ορίζεται ως εξής

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

όπου z είναι μιγαδική μεταβλητή. Εάν θέσουμε $z = e^{i\omega}$, δηλαδή εάν περιορισθούμε στο μοναδιαίο κύκλο, λαμβάνουμε το μετασχηματισμό Fourier του σήματος. Το σύνολο των τιμών του z για τις οποίες το άθροισμα υπάρχει, ονομάζεται περιοχή σύγκλισης. Πρόκειται για το σύνολο των τιμών της μεταβλητής z για τις οποίες υπάρχει το ακόλουθο άθροισμα

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)||z|^{-n} < \infty.$$

Επομένως η περιοχή σύγκλισης ορίζεται στο μιγαδικό επίπεδο με δακτυλίους που έχουν κέντρο την αρχή. Για σήματα πεπερασμένης διάρκειας η περιοχή σύγκλισης είναι ολόκληρο το μιγαδικό επίπεδο, εκτός ίσως των σημείων όπου $z = 0$ ή/και $z = \infty$. Για αιτιατά σήματα, αν ο κύκλος $|z'| = r_0$ ανήκει στην περιοχή σύγκλισης, τότε κάθε σημείο τέτοιο ώστε $|z| \geqslant r_0$ ανήκει επίσης.

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Z δίδει το αρχικό σήμα

$$x(n) = \frac{1}{i2\pi} \oint X(z) z^{n-1} dz,$$

όπου η ολοκλήρωση γίνεται με φορά αντίστροφη εκείνης των δεικτών ενός ρολογιού πάνω σε κλειστή καμπύλη που ανήκει στην περιοχή σύγκλισης και περικλείει την αρχή του μιγαδικού επιπέδου. Για την αντιστροφή ιδιαίτερα χρήσιμος μπορεί είναι ο ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy.

Ο μετασχηματισμός Z του διακριτού κρουστικού σήματος ορίζεται για κάθε μιγαδικό αριθμό και είναι 1.

Παράδειγμα 7.1.1. Ας θεωρήσουμε το διακριτό σήμα

$$x(n) = \alpha^n u(n).$$

Ο μετασχηματισμός Z θα είναι

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^{-n} = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}},$$

με περιοχή σύγκλισης $|z| > |\alpha|$. Εάν θέσουμε $\alpha = 1$ λαμβάνουμε το μετασχηματισμό Z του διακριτού βηματικού σήματος

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}, |z| > 1.$$

Παράδειγμα 7.1.2. Ας είναι ο μετασχηματισμός Z

$$X(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}, |z| < |\alpha|.$$

Άρα

$$X(z) = -\frac{z}{\alpha - z} = -\frac{z}{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\alpha}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\alpha}\right)^{n+1} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} \alpha^n z^{-n}$$

Οπότε

$$x(n) = -\alpha^n u(-n-1).$$

Παράδειγμα 7.1.3. Ας είναι ο μετασχηματισμός Z

$$X(z) = \frac{1}{(1 - \alpha z^{-1})(1 - \beta z^{-1})},$$

με $|\alpha| > |\beta|$. Μπορούμε να αναλύσουμε σε κλάσματα ως εξής

$$X(z) = \frac{1}{\alpha - \beta} \left(\frac{\alpha}{1 - \alpha z^{-1}} - \frac{\beta}{1 - \beta z^{-1}} \right).$$

Εάν $|z| > |\alpha|$,

$$x(n) = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} u(n).$$

Εάν $|\alpha| > |z| > |\beta|$,

$$x(n) = -\frac{1}{\alpha - \beta} (\alpha^{n+1} u(-n-1) + \beta^{n+1} u(n)).$$

Εάν $|z| < |\beta|$,

$$x(n) = \frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{\alpha - \beta} u(-n-1).$$

7.2 Ιδιότητες του μετασχηματισμού Z

Ας έλθουμε τώρα σε μερικές ιδιότητες του μετασχηματισμού Z.

1. Γραμμικότητα
   Εάν $X_1(z)$ είναι ο μετασχηματισμός Z του σήματος $x_1(n)$ με περιοχή σύγκλισης R_1 και $X_2(z)$ είναι ο μετασχηματισμός Z του σήματος $x_2(n)$ με περιοχή σύγκλισης R_2, τότε ο μετασχηματισμός Z ενός γραμμικού συνδυασμού των δύο $a_1x_1(n) + a_2x_2(n)$ είναι $a_1X_1(z) + a_2X_2(z)$ με περιοχή σύγκλισης που εγκλείει την τομή $R_1 \bigcap R_2$.

2. Χρονική μετατόπιση
   $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-n_0)z^{-n} = z^{-n_0}X(z)$$
   Στην περιοχή σύγκλισης είναι ενδεχόμενο να προστεθεί ή αφαιρεθεί το $z = 0$ ή το $z = \infty$.

3. Αντιστροφή χρόνου
   Αν $X(z)$ είναι ο μετασχηματισμός Z του σήματος $x(n)$, τότε ο μετασχηματισμός Z του σήματος $x(-n)$ είναι $X(\frac{1}{z})$, με περιοχή σύγκλισης την αντίστροφη της αρχικής.

4. Αλλαγή κλίμακας στο μιγαδικό επίπεδο
   Αν $X(z)$ είναι ο μετασχηματισμός Z του σήματος $x(n)$, τότε ο μετασχηματισμός Z του σήματος $z_0^n x(n)$ είναι $X(\frac{z}{z_0})$, με περιοχή σύγκλισης ώστε το $\frac{z}{z_0}$ να ανήκει στην περιοχή σύγκλισης του $X(z)$.

5. Συνέλιξη
   Ο μετασχηματισμός Z της $y(n)$, που προκύπτει ως συνέλιξη της $h(n)$ με τη $x(n)$ έχει ως εξής
   $$Y(z) = H(z)X(z)$$
   όπου $H(z)$ είναι ο μετασχηματισμός Z της $h(n)$, και ονομάζεται συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος. Η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού $Y(z)$ εγκλείει την τομή $R_1 \bigcap R_2$, των περιοχών σύγκλισης των δύο μελών της συνέλιξης.

6. Παραγώγιση στο μιγαδικό επίπεδο
   Ισχύει ότι
   $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} nx(n)z^{-n} = -zX'(z).$$

7. Θεώρημα αρχικής τιμής
   Εάν το σήμα $x(n)$ είναι αιτιατό, τότε
   $$x(0) = \lim_{z\to\infty} X(z).$$

Παράδειγμα 7.2.1. Ας θεωρήσουμε το διακριτό σήμα του Σχήματος 6.1

$$x(n) = \alpha^{|n|} = \alpha^n u(n) + \alpha^{-n}u(-n) - \delta(n).$$

Ο μετασχηματισμός Z θα είναι

$$X(z) = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} + \frac{1}{1-\alpha z} - 1 = \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2-\alpha(z^{-1}+z)},$$

με περιοχή σύγκλισης $\frac{1}{|\alpha|} > |z| > |\alpha|$. Άρα θα πρέπει να είναι $|\alpha| < 1$.

Παράδειγμα 7.2.2. Ας είναι το διακριτό σήμα

$$x(n) = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} u(n).$$

Ο μετασχηματισμός Z του σήματος θα είναι

$$X(z) = \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha z^{-1}} - \frac{\beta}{1-\beta z^{-1}}\right) = \frac{1}{(1-\alpha z^{-1})(1-\beta z^{-1})}.$$

Η περιοχή σύγκλισης είναι $|z| > \max(|\alpha|, |\beta|)$.

Παράδειγμα 7.2.3. Εφαρμόζοντας το προηγούμενο αποτέλεσμα για το διακριτό σήμα

$$x(n) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} r^n u(n), \quad r > 0,$$

βρίσκουμε ότι ο μετασχηματισμός Z θα είναι

$$X(z) = \frac{1}{1 - 2r\cos\theta z^{-1} + r^2 z^{-2}}.$$

Η περιοχή σύγκλισης είναι $|z| > r$.

Παράδειγμα 7.2.4. Ας θεωρήσουμε το διακριτό σήμα

$$x(n) = \cos(\omega_0 n) u(n) = \frac{1}{2}\left(e^{i\omega_0 n} + e^{-i\omega_0 n}\right) u(n).$$

Ο μετασχηματισμός Z με περιοχή σύγκλισης $|z| > 1$ θα είναι

$$X(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-e^{i\omega_0}z^{-1}} + \frac{1}{1-e^{-i\omega_0}z^{-1}}\right) = \frac{1-\cos\omega_0\ z^{-1}}{1-2\cos\omega_0\ z^{-1}+z^{-2}}.$$

Παράδειγμα 7.2.5. Ας θεωρήσουμε το διακριτό σήμα

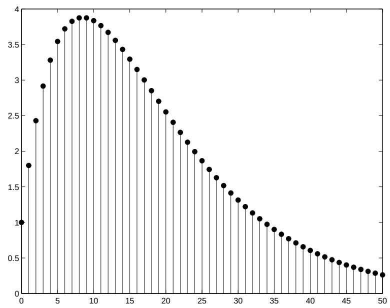
$$x(n) = \alpha^n u(n).$$

Ο μετασχηματισμός Z του $y(n) = nx(n)$ θα είναι

$$Y(z) = \frac{\alpha z^{-1}}{(1-\alpha z^{-1})^2}.$$

Ο μετασχηματισμός Z του $(n+1)x(n)$ (Σχήμα 7.1) θα είναι

$$\frac{1}{(1-\alpha z^{-1})^2}.$$



Σχήμα 7.1: Η κρουστική απόκριση ενός φίλτρου δεύτερης τάξης με διπλό πόλο $\alpha = 0.9$.

7.3 Μετασχηματισμός Z και γραμμικά χρονικά αμετάβλητα συστήματα

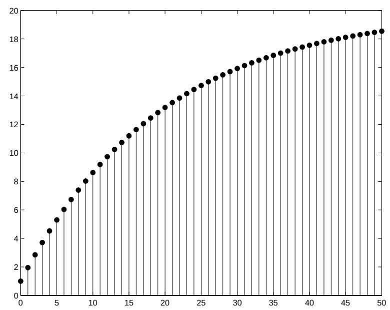
Ας θεωρήσουμε τώρα τα αιτιατά συστήματα με άπειρη κρουστική απόκριση, που δίδονται από μία εξίσωση διαφορών

$$\sum_{k=0}^{N} a(k)y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b(k)x(n-k).$$

Εφαρμόζοντας την ιδιότητα της μετατόπισης για το μετασχηματισμό Z προκύπτει ότι η συνάρτηση μεταφοράς αυτού του συστήματος είναι ίση με το λόγο δύο πολυωνύμων της μιγαδικής μεταβλητής z,

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b(k)z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a(k)z^{-k}}$$

Οι ρίζες του $B(z)$ ονομάζονται μηδενικά του συστήματος, ενώ οι ρίζες του πολυωνύμου του παρανομαστή ονομάζονται πόλοι του συστήματος.



Σχήμα 7.2: Η βηματική απόκριση ενός φίλτρου πρώτης τάξης.

Παράδειγμα 7.3.1. Ας θεωρήσουμε την εξίσωση διαφορών

$$y(n) = \alpha y(n-1) + u(n), n \geqslant 0, y(-1) = 0, |\alpha| < 1.$$

Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό Z βρίσκουμε

$$Y(z) = \alpha z^{-1}Y(z) + \frac{1}{1-z^{-1}},$$

$$Y(z) = \frac{1}{(1-z^{-1})(1-\alpha z^{-1})}.$$

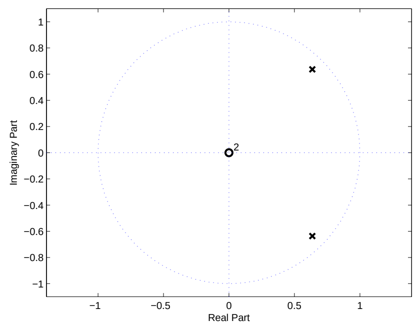
Άρα η απόκριση θα είναι (Σχήμα 7.2)

$$y(n) = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} u(n).$$

Παράδειγμα 7.3.2. Το σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{1}{1-2r\cos\theta z^{-1} + r^2 z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 - 2r\cos\theta z + r^2} = \frac{z^2}{(z-re^{i\theta})(z-re^{-i\theta})}, r > 0,$$

έχει ένα διπλό μηδενικό στην αρχή και δύο πόλους: $re^{-i\theta}, re^{i\theta}$.



Σχήμα 7.3: Οι πόλοι ενός συστήματος δεύτερης τάξης με δύο μιγαδικές ρίζες.

Ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ευστάθεια ενός συστήματος είναι η ύπαρξη του μετασχηματισμού Z πάνω στο μοναδιαίο κύκλο,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty.$$

Άρα θα πρέπει η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού Z της κρουστικής απόκρισης του συστήματος να περιλαμβάνει το μοναδιαίο κύκλο $|z| = 1$. Είναι φανερό από τον ορισμό της ευστάθειας, ότι όλα τα συστήματα με πεπερασμένη κρουστική απόκριση είναι ευσταθή. Οπότε, για τα συστήματα που ορίζονται μέσω της εξίσωσης διαφορών, η συνθήκη ευστάθειας μπορεί να εκφρασθεί με βάση τη θέση των ριζών του πολυωνύμου $A(z)$. Ένα φίλτρο με συνάρτηση μεταφοράς όπως παραπάνω είναι ευσταθές, εάν, και μόνο εάν,

$$A(z) \neq 0 \quad \text{για} \quad |z| \geqslant 1,$$

δηλαδή εάν όλοι οι πόλοι ευρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου.

Για ένα σύστημα πρώτης τάξης η συνθήκη της ευστάθειας είναι $|\alpha| < 1$. Για ένα σύστημα δεύτερης τάξης με δύο μιγαδικές ρίζες, όπως αυτό του Παραδείγματος 7.3.2, η συνθήκη της ευστάθειας είναι $r < 1$.