Κεφάλαιο 3

Αναπαράσταση περιοδικών σημάτων με σειρές Fourier

3.1 Ορισμός σειράς Fourier

Η ακόλουθη σειρά ονομάζεται τριγωνομετρική

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c(n)e^{in\omega_0 t}.$$

Η γωνιακή συχνότητα $\omega_0 > 0$ είναι σταθερά και οι μιγαδικοί αριθμοί $c(n)$ είναι οι συντελεστές του αναπτύγματος. Εάν η τριγωνομετρική σειρά συγκλίνει, το άθροισμα θα είναι μια περιοδική συνάρτηση με περίοδο

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Τίθεται κατά συνέπεια το ερώτημα αν για δοσμένο περιοδικό σήμα $f(t)$, με περίοδο T, υπάρχει τριγωνομετρική σειρά που να συγκλίνει σε αυτό. Σε περίπτωση που υπάρχει, θα ονομάζεται σειρά Fourier. Οι συντελεστές της σειράς δίδονται από τη σχέση

$$c(n) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-in\omega_0 t}dt.$$

Οι συντελεστές προκύπτουν λαμβάνοντας υπόψη την ορθογωνιότητα των καθαρά μιγαδικών εκθετικών σημάτων

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-in\omega_0 t}dt = \delta(n).$$

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με πραγματικά περιοδικά σήματα και θα θέσουμε

$$c(n) = \frac{1}{2}(a(n) - ib(n)),$$

οπότε

$$c(-n) = \bar{c}(n) = \frac{1}{2}(a(n) + ib(n)).$$

Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να γράψουμε

$$f(t) = \frac{a(0)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a(n)\cos n\omega_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} b(n)\sin n\omega_0 t.$$

Κατά συνέπεια θα είναι

$$a(n) = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega_0 t dt,$$

$$b(n) = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin n\omega_0 t dt.$$

Οι συνθήκες Dirichlet εξασφαλίζουν την ύπαρξη της σειράς Fourier.

- Το σήμα είναι απόλυτα ολοκληρώσιμο σε μια περίοδο,

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|dt < \infty.$$

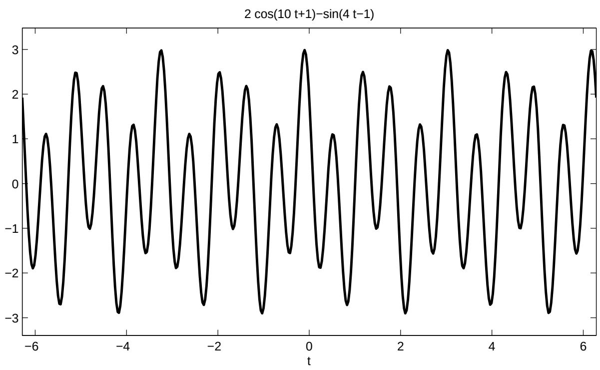
- Σε οποιοδήποτε πεπερασμένο διάστημα, το σήμα έχει πεπερασμένη μεταβολή, δηλαδή κατά τη διάρκεια μιας περιόδου το πλήθος των μέγιστων και των ελάχιστων του σήματος είναι πεπερασμένο.

- Το πλήθος των ασυνεχειών του σήματος κατά τη διάρκεια μιας περιόδου είναι πεπερασμένο. Επιπλέον οι ασυνέχειες, αν υπάρχουν, είναι πεπερασμένου εύρους.

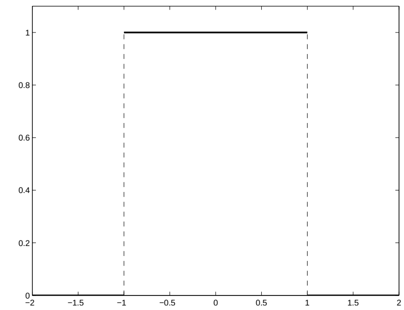
Παράδειγμα 3.1.1. Το σήμα $x(t) = 2\cos(10t+1) - \sin(4t-1)$ είναι περιοδικό με περίοδο $T = \pi$ και $\omega_0 = 2$ (Σχήμα 3.1). Θα είναι

$$x(t) = e^{i(10t+1)} + e^{-i(10t+1)} + \frac{i}{2}\left(e^{i(4t-1)} - e^{-i(4t-1)}\right).$$

Άρα υπάρχουν τέσσερις όροι στη σειρά για $n = \pm 2$ και $n = \pm 5$. Επομένως $c(n) = 0, n \neq$



Σχήμα 3.1: Το περιοδικό σήμα του Παραδείγματος 3.1.1.



Σχήμα 3.2: Μία περίοδος του σήματος του Παραδείγματος 3.1.2 ($T = 4, T_1 = 2$).

$\pm 2, \pm 5$, και

$$c(2) = \frac{i}{2}e^{-i} = \frac{1}{2}(\sin 1 + i\cos 1) = 0,42 + i0,27 \quad \text{και} \quad c(-2) = \bar{c}(2)$$

$$c(5) = e^{i} = \cos 1 + i \sin 1 = 0,54 + i0,84 \quad \text{και} \quad c(-5) = \bar{c}(5). \quad \square$$

Στην περίπτωση όπου το σήμα είναι άρτιο, $f(t) = f(-t)$, τότε όλοι οι συντελεστές είναι πραγματικοί, δηλαδή $b(n) = 0, \forall n$. Ενώ στην περίπτωση που το σήμα είναι περιττό, $f(t) = -f(-t)$, τότε όλοι οι συντελεστές είναι φανταστικοί, δηλαδή $a(n) = 0, \forall n$.

Παράδειγμα 3.1.2. Το σήμα

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leqslant \frac{T_1}{2} \\ 0, & \frac{T_1}{2} < |t| \leqslant \frac{T}{2} \end{cases}$$

είναι άρτιο και παρουσιάζει δύο πεπερασμένες ασυνέχειες στη διάρκεια μιας περιόδου (Σχήμα 3.2).

Οι συντελεστές της σειράς θα είναι

$$a(0) = \frac{2T_1}{T}$$

$$a(n) = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} \cos\frac{2n\pi t}{T} dt = 2\int_{-\frac{T_1}{2T}}^{\frac{T_1}{2T}} \cos 2n\pi\tau d\tau = \frac{2\sin n\pi\frac{T_1}{T}}{n\pi}, n \neq 0.$$

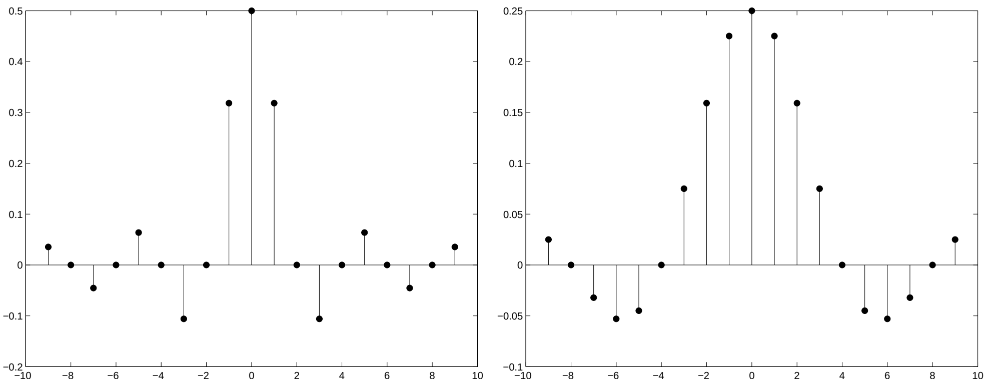
Οι συντελεστές δίδονται στο Σχήμα 3.3 για δύο διαφορετικές τιμές του λόγου T_1/T.

Παράδειγμα 3.1.3. Θεωρούμε ένα περιοδικό σήμα με περίοδο T, όπου το σήμα στην κύρια περίοδο είναι

$$x(t) = 1 - 2\frac{|t|}{T}, |t| \leqslant \frac{T}{2}.$$

Το σήμα είναι άρτιο, επομένως θα έχουμε

$$a(0) = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(1 - 2\frac{|t|}{T}\right) dt = 1$$

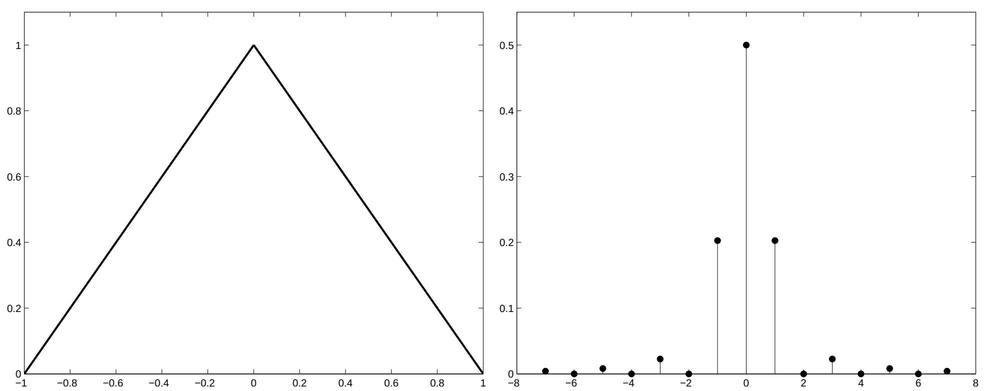


Σχήμα 3.3: Οι συντελεστές Fourier c του σήματος του Παραδείγματος 3.1.2 (για $T_1/T = 0,5$ και $T_1/T = 0,25$).

$$a(n) = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(1 - 2\frac{|t|}{T}\right)\cos\frac{2n\pi t}{T}dt = \frac{4}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} \left(1 - 2\frac{t}{T}\right)\cos\frac{2n\pi t}{T}dt$$

$$a(n) = 2\int_0^1 (1-\tau) cos n\pi\tau d\tau = \frac{2}{(n\pi)^2}(1-(-1)^n).$$

Στο Σχήμα 3.4 δίδεται το σήμα για $T = 2$ και οι συντελεστές Fourier c.



Σχήμα 3.4: Μία περίοδος του σήματος του Παραδείγματος 3.1.3 και οι συντελεστές Fourier c.

Παράδειγμα 3.1.4. Θεωρούμε ένα περιοδικό σήμα με περίοδο T, όπου το σήμα στην κύρια περίοδο είναι

$$x(t) = \cos\frac{\pi t}{T}, |t| \leqslant \frac{T}{2}.$$

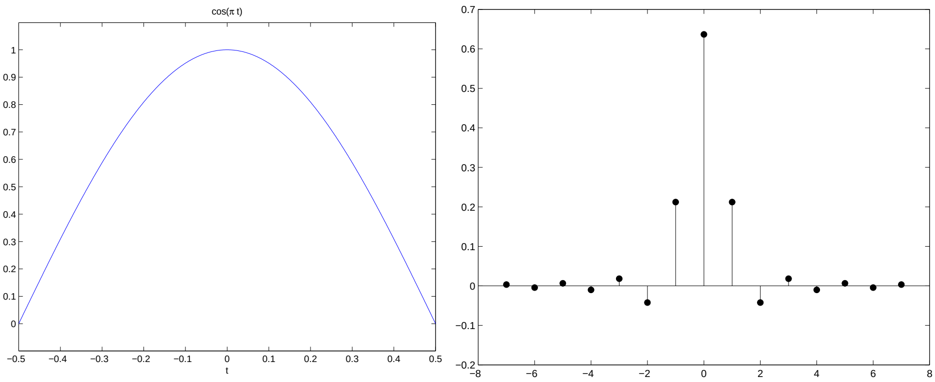
Το σήμα είναι άρτιο, επομένως θα έχουμε

$$a(n) = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos\frac{\pi t}{T}\cos\frac{2n\pi t}{T}dt = \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\tau\cos 2n\tau d\tau$$

$$a(n) = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos(2n+1)\tau + \cos(2n-1)\tau) d\tau = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}}{2n+1} + \frac{\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}}{2n-1}\right)$$

$$a(n) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{(-1)^n}{2n+1} + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\right) = \frac{4(-1)^{n-1}}{(4n^2-1)\pi}.$$

Στο Σχήμα 3.5 δίδεται το σήμα για $T = 1$ και οι συντελεστές Fourier c.



Σχήμα 3.5: Μία περίοδος του σήματος του Παραδείγματος 3.1.4 και οι συντελεστές Fourier c.

Παράδειγμα 3.1.5. Θεωρούμε ένα περιοδικό σήμα με περίοδο T, όπου το σήμα στην κύρια περίοδο είναι

$$x(t) = \frac{1-\rho^2}{1 - 2\rho\cos\frac{2\pi t}{T} + \rho^2}, |t| \leqslant \frac{T}{2}, |\rho| < 1.$$

Το σήμα είναι άρτιο, επομένως θα έχουμε $c(n) = c(-n)$. Υπολογίζουμε για $n > 0$

$$c(n) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{(1-\rho^2)e^{-i2\pi n\frac{t}{T}}}{1 - 2\rho\cos\frac{2\pi t}{T} + \rho^2} dt.$$

Θέτουμε

$$z = e^{-i2\pi\frac{t}{T}},$$

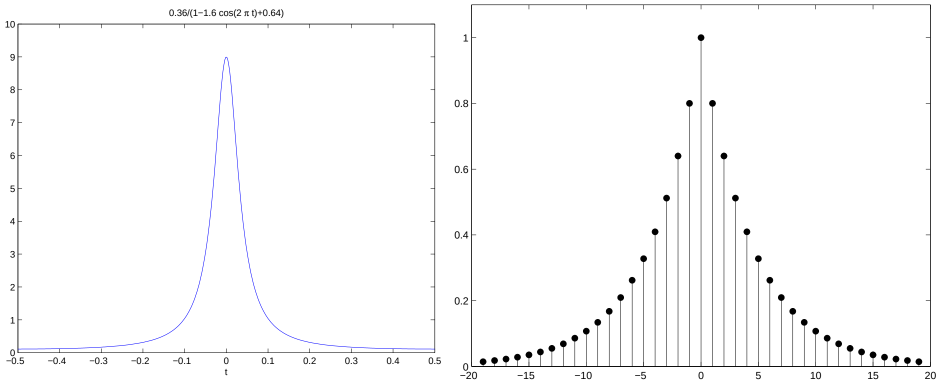
οπότε το ολοκλήρωμα αντιστοιχεί σε ένα επικαμπύλιο μιγαδικό ολοκλήρωμα επί του μοναδιαίου κύκλου με φορά αρνητική. Άρα

$$c(n) = \frac{1-\rho^2}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{z^{n-1}dz}{(1-\rho z)(1-\rho z^{-1})} = \frac{1-\rho^2}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{z^n dz}{(1-\rho z)(z-\rho)}.$$

Για την εύρεση του ολοκληρώματος μπορούμε να εφαρμόσουμε τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy, αφού η συνάρτηση $\frac{z^n}{1-\rho z}$ είναι αναλυτική στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου. Τελικά, λαμβάνοντας υπόψη και την αρτιότητα του σήματος, βρίσκουμε

$$c(n) = \rho^{|n|}$$

Στο Σχήμα 3.6 δίδεται το σήμα για $\rho = 0,8$ και οι συντελεστές Fourier c.



Σχήμα 3.6: Μία περίοδος του σήματος του Παραδείγματος 3.1.5 και οι συντελεστές Fourier c.

Παράδειγμα 3.1.6. Το σήμα

$$x(t) = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

είναι περιοδικό με περίοδο T. Μπορεί επομένως να παρασταθεί με μια σειρά Fourier. Επειδή το σήμα είναι άρτιο, οι συντελεστές θα είναι

$$c(n) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) e^{\frac{2n\pi t}{T}} dt = 1.$$

Άρα μπορούμε να γράψουμε

$$T \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i2k\pi \frac{t}{T}}.$$

3.2 Ιδιότητες σειράς Fourier

Η αναπαράσταση ενός περιοδικού σήματος με σειρά Fourier έχει κάποιες σημαντικές και χρήσιμες ιδιότητες που παρουσιάζονται στη συνέχεια.

Γραμμικότητα Η αναπαράσταση ενός γραμμικού συνδυασμού δύο περιοδικών σημάτων που έχουν την ίδια θεμελιώδη περίοδο ισούται με τον ίδιο γραμμικό συνδυασμό των αντίστοιχων αναπαραστάσεων με σειρά Fourier.

Χρονική μετατόπιση Εάν $c(n)$ είναι οι συντελεστές του αναπτύγματος για το περιοδικό σήμα $f(t)$ με περίοδο T, τότε οι συντελεστές του αναπτύγματος του σήματος $f(t - t_0)$ είναι

$$e^{-in\omega_0 t_0} c(n), \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}.$$

Αντιστροφή του χρόνου Εάν $c(n)$ είναι οι συντελεστές του αναπτύγματος για το περιοδικό σήμα $f(t)$, τότε οι συντελεστές του αναπτύγματος του σήματος $f(-t)$ είναι $c(-n)$.

Αλλαγή της κλίμακας του χρόνου Εάν αλλάξει η κλίμακα του χρόνου οι συντελεστές του αναπτύγματος δεν αλλάζουν, αλλάζει όμως η περίοδος και η συχνότητα. Το σήμα $f(\alpha t)$ θα έχει περίοδο T/α.

Περιοδική συνέλιξη Οι συντελεστές του αναπτύγματος της συνέλιξης κατά μία περίοδο δύο περιοδικών σημάτων που έχουν την ίδια θεμελιώδη περίοδο ισούνται με το γινόμενο των αντίστοιχων συντελεστών πολλαπλασιαμένο με το T.

Γινόμενο Οι συντελεστές του αναπτύγματος του γινομένου δύο περιοδικών σημάτων που έχουν την ίδια θεμελιώδη περίοδο προκύπτουν από τη συνέλιξη των δύο αντίστοιχων ακολουθιών των συντελεστών Fourier.

Μέση ισχύς Η μέση ισχύς του σήματος προκύπτει ως το άθροισμα της ισχύος των συνιστωσών,

$$\frac{1}{T}\int_T x^2(t)dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c(n)|^2.$$

Πρόκειται για τη σχέση του Parseval για συνεχή περιοδικά σήματα.

Παράδειγμα 3.2.1. Το σήμα

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t \leqslant \frac{T}{2} \\ -1, & -\frac{T}{2} < t \leqslant 0 \end{cases}$$

είναι περιττό και ορίζει ένα περιοδικό σήμα με περίοδο T. Το σήμα αυτό προκύπτει ως η διαφορά δύο σημάτων, όπως αυτό του Παραδείγματος 3.1.2. Το πρώτο παίρνει την τιμή 2, έχει σχέση $T_1/T = 0,5$ και καθυστέρηση $T_1/2$, δηλαδή

$$x_1(t) = \begin{cases} 2, & 0 \leqslant t < \frac{T}{2} \\ 0 & -\frac{T}{2} \leqslant t < 0 \end{cases}$$

Επομένως οι συντελεστές θα είναι

$$c_1(0) = 1,$$

$$c_1(n) = 2e^{-i\frac{n\pi}{2}}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n\pi} = -2i\frac{\sin^2\frac{n\pi}{2}}{n\pi}, n \neq 0.$$

Οι συντελεστές του δευτέρου ($x_2(t) = 1$) είναι μηδέν για $n \neq 0$ και $c_2(0) = 1$. Οπότε

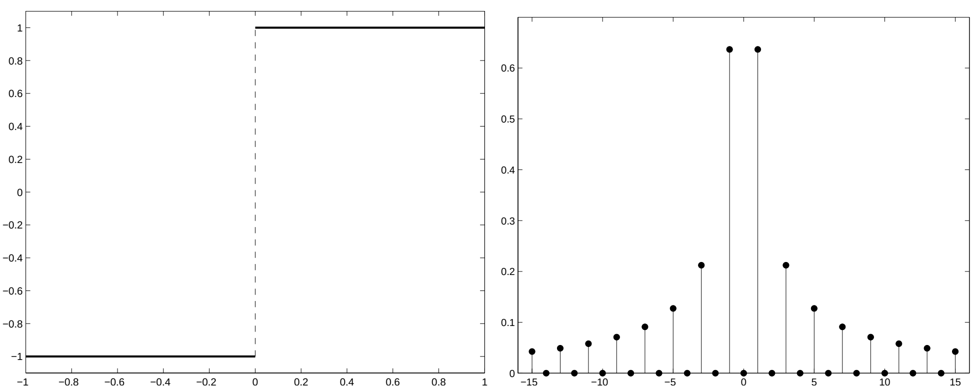
$$b(n) = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \frac{4}{n\pi}, & n = 2k+1 \end{cases}$$

Στο Σχήμα 3.7 δίδεται το σήμα για $T = 2$ και τα μέτρα των συντελεστών Fourier $|c|$.

Παράδειγμα 3.2.2. Θα εφαρμόσουμε τη σχέση του Parseval για την εύρεση της μέσης ισχύος του περιοδικού σήματος του Παραδείγματος 3.1.5.

$$P_\infty = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t)dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \rho^{2|n|}$$

$$P_\infty = \sum_{n=-\infty}^{0} \rho^{-2n} + \sum_{n=0}^{\infty}\rho^{2n} - 1 = 2\sum_{n=0}^{\infty}\rho^{2n} - 1 = \frac{2}{1-\rho^2} - 1 = \frac{1+\rho^2}{1-\rho^2}.$$



Σχήμα 3.7: Μία περίοδος του σήματος του Παραδείγματος 3.2.1 και οι συντελεστές Fourier $|c|$.