Φροντιστήριο ΗΥ-215 Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς — 11-05-2012 (1)

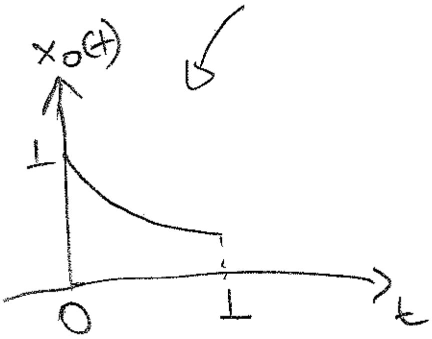
$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t}\, d\omega \qquad \text{synthesis}$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t}\, dt \qquad \text{analysis}$$

Άσκηση 1

Δίνεται το σήμα

$$x_0(t) = \begin{cases} e^{-t}, & 0 \le t \le 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$



(α) να βρεθεί ο ΜΣΧ Fourier του $x_0(t)$

(β) να βρεθεί ο FT των σημάτων $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ και $x_4(t)$ που απεικονίζονται παρακάτω χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα του ερωτήματος (α).

Λύση

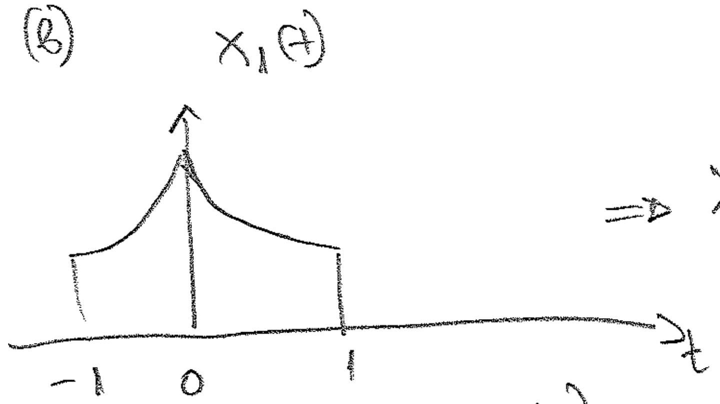
(α) από την εξίσωση της ανάλυσης έχω

$$X_0(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_0(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^1 e^{-t} e^{-j\omega t} dt = \int_0^1 e^{(-1-j\omega)t} dt =$$

$$= \frac{1}{-1-j\omega} e^{(-1-j\omega)t}\Big|_0^1 = -\frac{1}{1+j\omega}\left(e^{-1-j\omega} - 1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{X_0(\omega) = \frac{1 - e^{-(1+j\omega)}}{1+j\omega}}$$

(B)



$$x_1(t) = x_0(t) + x_0(-t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X_1(\omega) = X_0(\omega) + \frac{1}{|-1|} X_0\left(\frac{\omega}{-1}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X_1(\omega) = \frac{1-e^{-(1+j\omega)}}{1+j\omega} + \frac{1-e^{-(1-j\omega)}}{1-j\omega} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X_1(\omega) = \frac{1-\cancel{j\omega}-e^{-(1+j\omega)}(1-j\omega)+1+\cancel{j\omega}-e^{-(1-j\omega)}(1+j\omega)}{1+\omega^2} \Rightarrow$$

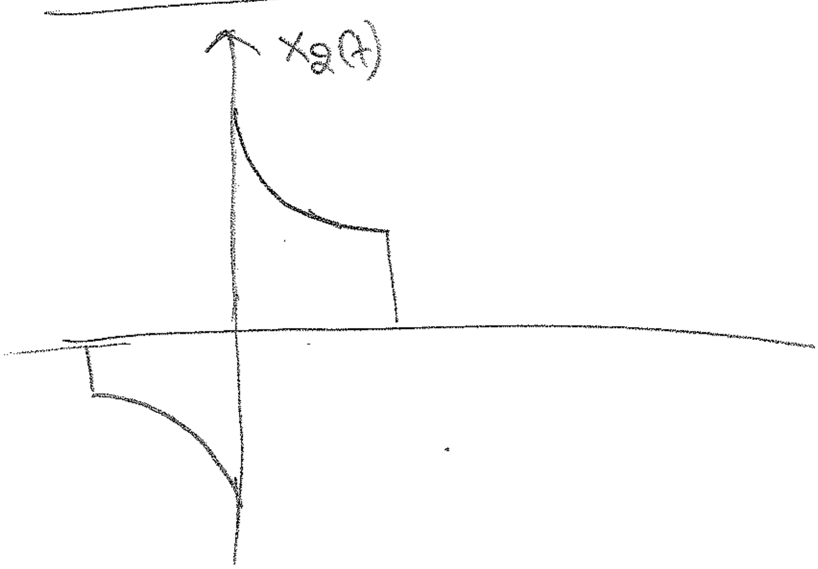
$$\Rightarrow X_1(\omega) = \frac{2-e^{-(1+j\omega)}+j\omega e^{-(1+j\omega)}-e^{-(1-j\omega)}-j\omega e^{-(1-j\omega)}}{1+\omega^2} =$$

$$= \frac{2-e^{-1}e^{-j\omega}+j\omega e^{-1}e^{-j\omega}-e^{-1}e^{j\omega}-j\omega e^{-1}e^{j\omega}}{1+\omega^2} =$$

$$= \frac{2-e^{-1}(\cos\omega-j\sin\omega)+j\omega e^{-1}(\cos\omega-j\sin\omega)-e^{-1}(\cos\omega+j\sin\omega)-j\omega e^{-1}(\cos\omega+j\sin\omega)}{1+\omega^2}$$

$$= \frac{2-e^{-1}\cos\omega+\cancel{je^{-1}\sin\omega}+\cancel{j\omega e^{-1}\cos\omega}+\omega e^{-1}\sin\omega-e^{-1}\cos\omega-\cancel{je^{-1}\sin\omega}-\cancel{j\omega e^{-1}\cos\omega}+\omega e^{-1}\sin\omega}{1+\omega^2} =$$

$$= \frac{2-2e^{-1}\cos\omega+2\omega e^{-1}\sin\omega}{1+\omega^2}$$



$$x_2(t) = x_0(t) - x_0(-t)$$

οποτε $\longrightarrow$

$$X_2(\omega) = \frac{1-e^{-(1+j\omega)}}{1+j\omega} - \frac{1-e^{-(1-j\omega)}}{1-j\omega} =$$

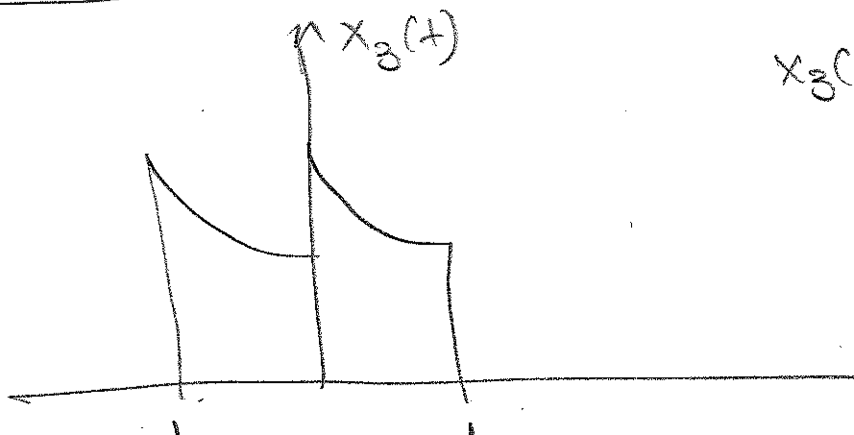
$$= \frac{1-j\omega-(1-j\omega)e^{-(1+j\omega)} - 1 - j\omega + e^{-(1-j\omega)}(1+j\omega)}{1+\omega^2} =$$

$$= \frac{-2j\omega - e^{-(1+j\omega)} + j\omega e^{-(1+j\omega)} + e^{-(1-j\omega)} + j\omega e^{-(1-j\omega)}}{1+\omega^2} =$$

$$= \frac{-2j\omega - e^{-1}(\cos\omega - j\sin\omega) + j\omega e^{-1}(\cos\omega - j\sin\omega) + e^{-1}(\cos\omega + j\sin\omega) + j\omega e^{-1}(\cos\omega + j\sin\omega)}{1+\omega^2}$$

$$= \frac{-2j\omega - \cancel{e^{-1}\cos\omega} + je^{-1}\sin\omega + j\omega e^{-1}\cos\omega + \cancel{\omega e^{-1}\sin\omega} + \cancel{e^{-1}\cos\omega} + je^{-1}\sin\omega + j\omega e^{-1}\cos\omega - \cancel{\omega e^{-1}\sin\omega}}{1+\omega^2}$$

$$= \frac{-2j\omega + 2je^{-1}\sin\omega + 2j\omega e^{-1}\cos\omega}{1+\omega^2} = 2j\,\frac{-\omega + e^{-1}\sin\omega + \omega e^{-1}\cos\omega}{1+\omega^2}$$



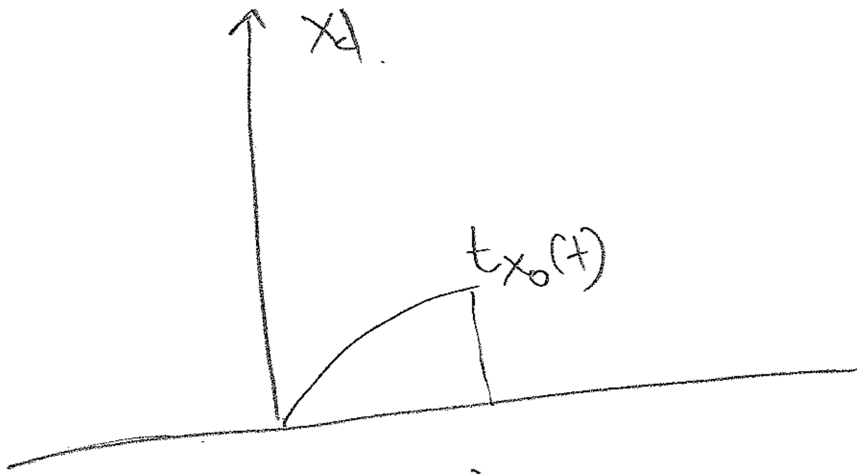
$$x_3(t) = x_0(t) + x_0(t+1)$$

$$X_0(\omega) + e^{-j\omega(-1)}X_0(\omega) =$$

αρα $X_3(\omega) =$

$$= \frac{1-e^{-(1+j\omega)}}{1+j\omega} + e^{j\omega}\,\frac{1-e^{-(1+j\omega)}}{1+j\omega} = \frac{1-e^{-(1+j\omega)}+e^{j\omega}-e^{-1}}{1+j\omega} =$$

$$= \frac{1+e^{j\omega} - e^{-1}(e^{-j\omega}+1)}{1+j\omega}$$



$$x_4(t) = t\, x_o(t)$$

γνωρίζω ότι $\quad -j\, t\, x(t) \xleftrightarrow{FT} \dfrac{d}{d\omega} X(\omega)$

και $\quad \alpha\, x(t) \longleftrightarrow \alpha X(\omega)$ $\Big\}$ $\alpha = j \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad -j\, j\, t\, x(t) \xleftrightarrow{FT} j \frac{d}{d\omega} X(\omega) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad t\, x(t) \xleftrightarrow{FT} j \frac{d}{d\omega} X(\omega)$$

άρα $\quad X_4(\omega) = j \dfrac{d}{d\omega} X_o(\omega) = j \dfrac{d}{d\omega} \left(\dfrac{1 - e^{-(1+j\omega)}}{1 + j\omega} \right) =$

$$= j \left(\frac{j e^{-(1+j\omega)} (1+j\omega) - \left[1 - e^{-(1+j\omega)}\right] j}{(1+j\omega)^2} \right) =$$

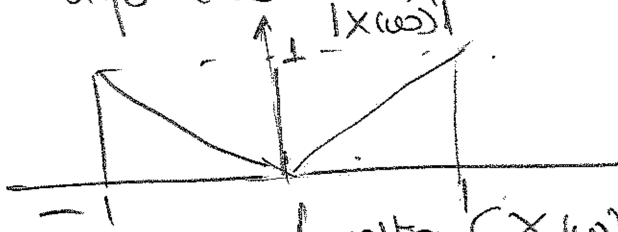
$$= \frac{-(1+j\omega) e^{-(1+j\omega)} + 1 - e^{-(1+j\omega)}}{(1+j\omega)^2} = \frac{-e^{-(1+j\omega)} - j\omega e^{-(1+j\omega)} + 1 - e^{-(1+j\omega)}}{(1+j\omega)^2} =$$

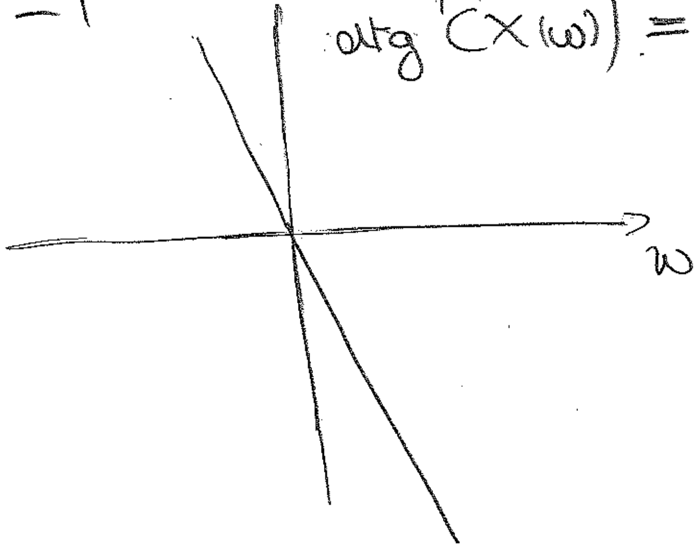
$$= \frac{1 - 2e^{-(1+j\omega)} - j\omega e^{-(1+j\omega)}}{(1+j\omega)^2}$$

Άσκηση 2

Βρείτε τα αντίστοιχα σήματα στο πεδίο του χρόνου για κάθε έναν από τους ακόλουθους ΜΣΔΧ

(α)





$$|X(\omega)| = \begin{cases} -\omega & -1 \le \omega \le 0 \\ \omega & 0 \le \omega \le 1 \end{cases}$$

και $\arg(X(\omega)) = -3\omega$

από ορισμό $x(t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t}\, d\omega =$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)| e^{+j\arg(X(\omega))} e^{j\omega t}\, d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{0} -\omega e^{-j3\omega} e^{j\omega t}\, d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{1} \omega e^{-j3\omega} e^{j\omega t}\, d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{0} -\omega e^{j(t-3)\omega}\, d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{1} \omega e^{j(3+t)\omega}\, d\omega =$$

(6')

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{0}\frac{1}{j(t+3)}\,\omega\left(e^{j(t+3)\omega}\right)'\,d\omega + \frac{1}{2\pi}\frac{1}{j(t-3)}\int_{0}^{1}\omega\left(e^{j(t-3)\omega}\right)'\,d\omega =$$

$$= -\frac{1}{2\pi j(3+t)}\left[\omega e^{j(3+t)\omega}\Big|_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} e^{j(3+t)\omega}\,d\omega\right] +$$

$$+\frac{1}{2\pi j(t-3)}\left[\omega e^{j(t-3)\omega}\Big|_{0}^{1} - \int_{0}^{1} e^{j(t-3)\omega}\,d\omega\right] =$$

$$= -\frac{1}{2\pi j(t-3)}\left[e^{-j(t+3)} - \frac{1}{j(3+t)}e^{j(t-3)\omega}\Big|_{-1}^{0}\right] +$$

$$+\frac{1}{2\pi j(t-3)}\left[e^{j(t-3)} - \frac{1}{j(t-3)}e^{j(t-3)\omega}\Big|_{0}^{1}\right] =$$

$$= -\frac{e^{-j(t-3)}}{2\pi j(t-3)} - \frac{1}{2\pi(t-3)^2}e^{j(t-3)\omega}\Big|_{-1}^{0} +$$

$$+\frac{e^{j(t-3)}}{2\pi j(t-3)} + \frac{1}{2\pi(t-3)^2}e^{j(t-3)\omega}\Big|_{0}^{1} =$$

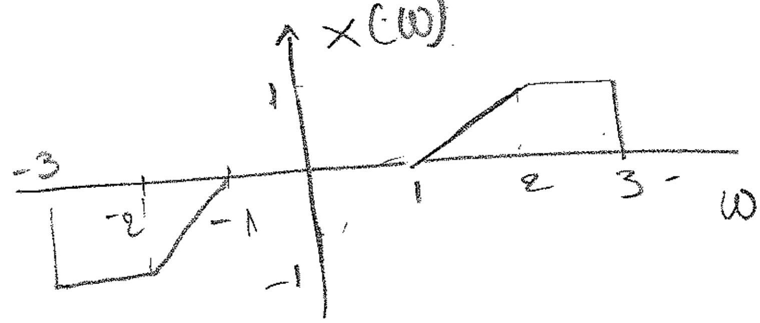
$$= \frac{e^{j(t-3)} - e^{-j(t-3)}}{\pi(t-3)\,2j} - \frac{1}{2\pi(t-3)^2}\left[1 - e^{-j(t-3)}\right] +$$

$$+\frac{1}{2\pi(t-3)^2}\left[e^{j(t-3)} - 1\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi(t-3)}\sin(t-3) - \frac{1}{2\pi(t-3)^2} + \frac{e^{-j(t-3)} + e^{j(t-3)}}{2\pi(t-3)^2} - \frac{1}{2\pi(t-3)^2} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(t-3)}{t-3} - \frac{1}{(t-3)^2} + \frac{\cos(t-3)}{(t-3)^2}\right]$$

(b)



προφανώς $\arg X(j\omega)=0$ $\quad X(\omega)$ πραγματικός

άρα $x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)e^{j\omega t}d\omega=$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-3}^{-2}-e^{j\omega t}d\omega+\int_{-2}^{-1}(\omega+1)e^{j\omega t}d\omega+\int_{1}^{2}(\omega-1)e^{j\omega t}d\omega+\right.$$

$$\left.+\int_{2}^{3}e^{j\omega t}d\omega\right]=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(-\frac{1}{jt}e^{j\omega t}\Big|_{-3}^{-2}+\int_{-2}^{-1}\omega e^{j\omega t}d\omega+\frac{1}{jt}e^{j\omega t}\Big|_{-2}^{-1}+\right.$$

$$\left.+\int_{1}^{2}\omega e^{j\omega t}-\frac{1}{jt}e^{j\omega t}\Big|_{1}^{2}+\frac{1}{jt}e^{j\omega t}\Big|_{2}^{3}\right]=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[-\frac{1}{jt}\left[e^{-j2t}-e^{-j3t}\right]+\frac{1}{jt}\left[\omega e^{j\omega t}\Big|_{-2}^{-1}-\int_{-2}^{-1}e^{j\omega t}dt\right]+\right.$$

$$+\frac{1}{jt}\left[e^{-jt}-e^{-j2t}\right]+\frac{1}{jt}\left[\omega e^{j\omega t}\Big|_{1}^{2}-\int_{1}^{2}e^{j\omega t}d\omega\right]-\frac{1}{jt}(e^{j2t}-e^{jt})+$$

$$\left.+\frac{1}{jt}(e^{j3t}-e^{j2t})\right]=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[-\cancel{\frac{e^{-j2t}}{jt}}+\frac{e^{-j3t}}{jt}-\cancel{\frac{e^{-jt}}{jt}}+\cancel{\frac{2e^{-j2t}}{jt}}-\frac{e^{-jt}}{(jt)^2}+\frac{e^{-j2t}}{(jt)^2}+\right.$$

$$+\cancel{\frac{e^{-jt}}{jt}}-\cancel{\frac{e^{-j2t}}{jt}}+\cancel{\frac{2e^{j2t}}{jt}}-\cancel{\frac{e^{jt}}{jt}}-\frac{e^{2jt}}{(jt)^2}+\frac{e^{jt}}{(jt)^2}-\cancel{\frac{e^{j2t}}{jt}}+\cancel{\frac{e^{jt}}{jt}}-$$

$$\left.+\frac{e^{j3t}}{jt}-\cancel{\frac{e^{j2t}}{jt}}\right]=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{j3t}}{jt}-\frac{e^{-jt}}{(jt)^2}+\frac{e^{-2jt}}{(jt)^2}-\frac{e^{2jt}}{(jt)^2}+\frac{e^{jt}}{(jt)^2}+\frac{e^{-j3t}}{jt}-\right.$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{e^{j3t}+e^{-j3t}}{jt} + \frac{1}{2\pi} \frac{e^{jt}-e^{-jt}}{(jt)^2} - \frac{1}{2\pi} \frac{e^{2jt}-e^{-2jt}}{(jt)^2} =$$

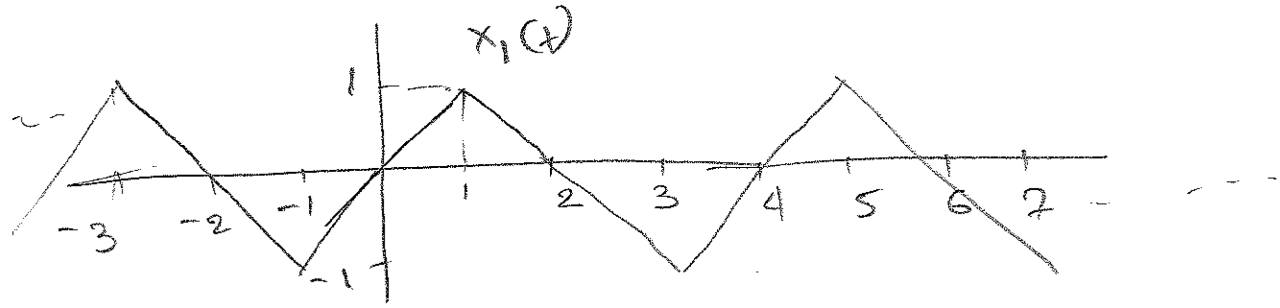
$$= \frac{1}{\pi j t} \frac{e^{j3t}+e^{-j3t}}{2} + \frac{1}{\pi j t^2} \frac{e^{jt}-e^{-jt}}{2j} - \frac{1}{\pi j t^2} \frac{e^{2jt}-e^{-2jt}}{2j} =$$

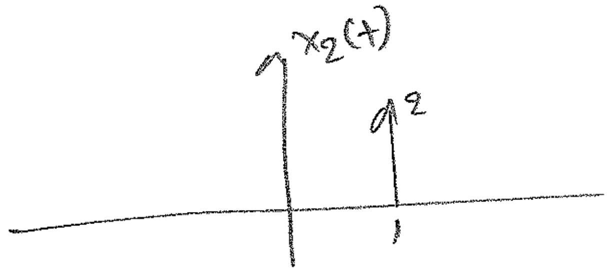
$$= \frac{1}{j\pi t} \cos(3t) + \frac{1}{\pi j t^2} \sin(t) - \frac{1}{\pi j t^2} \sin(2t) =$$

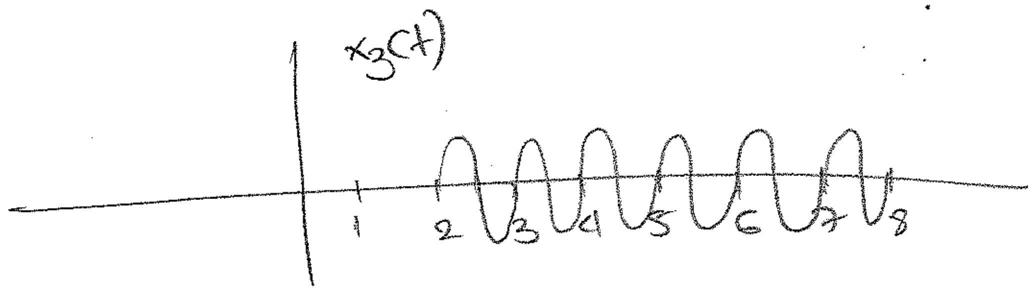
$$= \frac{\cos(3t)}{j\pi t} + \frac{\sin t - \sin 2t}{j\pi t^2}.$$

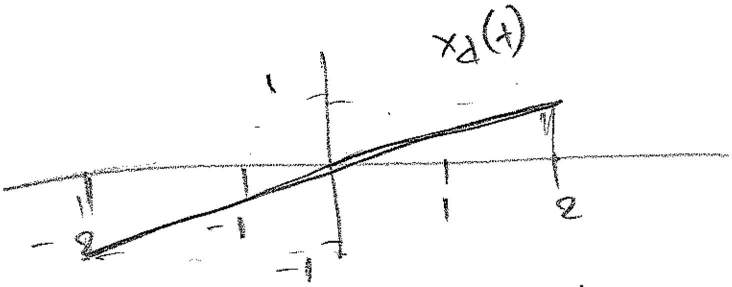
Άσκηση 3

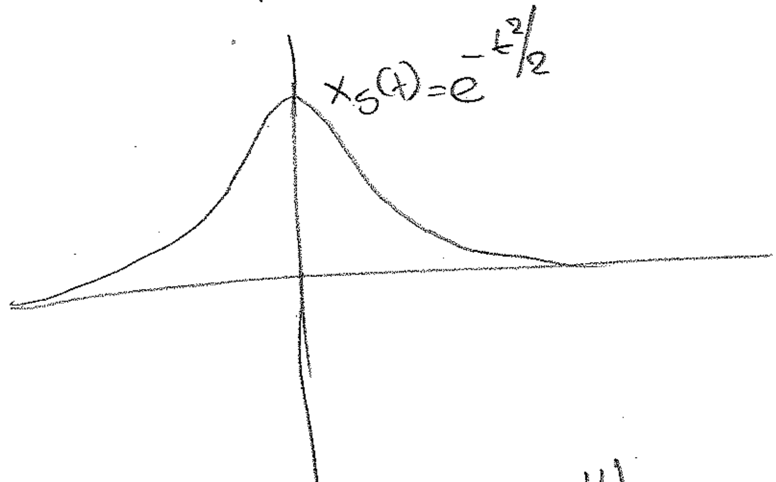
Δίνονται τα ακόλουθα.

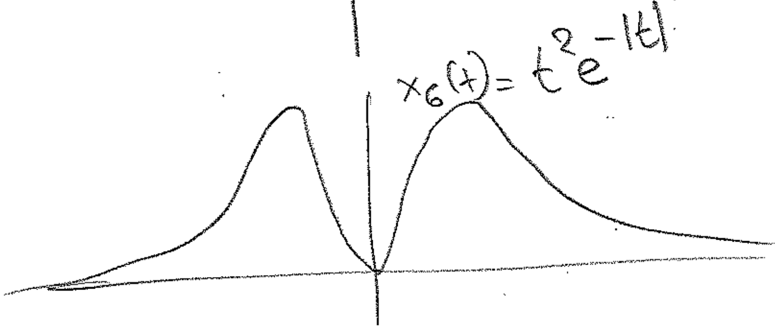












πεπε ποια απο αυτα τα σηματα εχουν FT που (10)

α) $Re\{X(\omega)\}=0$

β) $Im\{X(\omega)\}=0$

3) υπαρχη πργ α τετοιος ωστε $e^{j\alpha\omega}X(\omega)$ να ηναι πραγματικος

4) $\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)d\omega=0$

5) $\int_{-\infty}^{\infty} \omega X(\omega)d\omega=0$

---

1) $Re\{X(\omega)\}=0$ πρεπη το $x(t)$ να ηναι πργ και περιττο
αρα $x_1(t)$ και $x_4(t)$

2) $Im\{X(\omega)\}=0$ πρεπη $x(t)$ να ηναι πργ και αρτιο.
αρα $x_5(t)$ και $x_6(t)$

3) το $e^{j\alpha\omega}X(\omega) = e^{-j\omega(-\alpha)}X(\omega)$ ειναι ο FT
του $x(t+\alpha)$ για να εχη αυτο το σηματα πργ FT.
πρεπη το $x(t+\underline{\alpha})$ να ηναι πργ και αρτιο.
να υπαρχη α τ.ω.

αρα.
αρα $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_5(t)$, $x_6(t)$

4) $\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)d\omega=0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega 0}d\omega=0 \Rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega 0}d\omega=0$
$\Rightarrow X(0)=0$ αρα $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, $x_4(t)$, $x_6(t)$

5) $\int_{-\infty}^{\infty} \omega X(\omega)d\omega=0 \Rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} j\omega X(\omega)e^{j\omega 0}d\omega=0 \Rightarrow \left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=0}=0$
οποτε $x_2(t)$, $x_3(t)$, $x_5(t)$, $x_6(t)$

Ασκηση 4

Δινεται οτι $y(t) = x(t) * h(t)$

και $g(t) = x(\underline{3t}) * h(3t)$.

Δειξτε οτι ισχυει η σχεση. $g(t) = Ay(Bt)$ για

κπ A, B, Βρειτε τα A και B.

εχω $y(t) = x(t) * h(t) \Rightarrow$

$\Rightarrow Y(\omega) = X(\omega) H(\omega) \Rightarrow Y(\omega/3) = X(\omega/3) H(\omega/3)$

$G(\omega) = \frac{1}{3} X(\omega/3) \frac{1}{3} H(\omega/3) \Rightarrow$

$\Rightarrow G(\omega) = \frac{1}{9} X(\omega/3) H(\omega/3)$

$\Rightarrow G(\omega) = \frac{1}{9} Y(\omega/3) \Rightarrow$

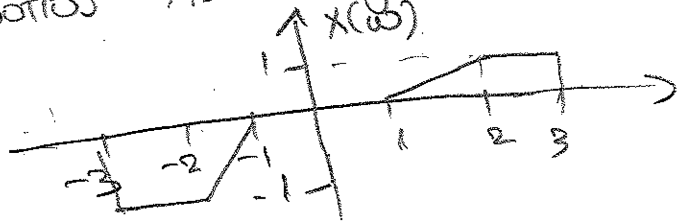
$\Rightarrow G(\omega) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} Y(\omega/3) \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{g(t) = \frac{1}{3} y(3t)}$

αρα $A = 1/3$ και $B = 3$

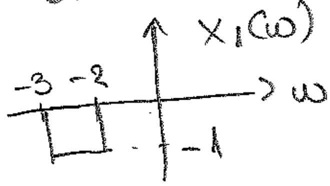
2ος τρόπος λύσης για την άσκηση 2 (b).

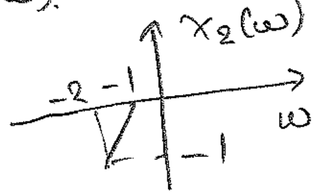
αν

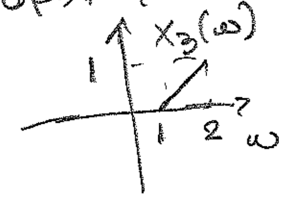


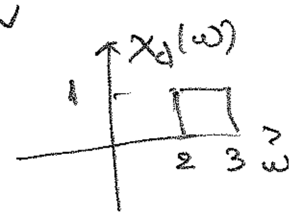
να βρεθεί το $x(t)$.

Παρατηρώ ότι το $X(\omega)$ είναι άθροισμα των συναρτήσεων









Άρα αν βρω τον αντίστροφο μετ. Fourier για τα $X_1(\omega)$, $X_2(\omega)$, $X_3(\omega)$, $X_4(\omega)$ τότε χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της γραμμικότητας βρίσκω το $x(t)=x_1(t)+x_2(t)+x_3(t)+x_4(t)$.

Για τα $X_2(\omega)$ και $X_3(\omega)$ χρησιμοποιώ τον τύπο της συνθέσεως, οπότε

$$x_2(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_2(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{-1} (\omega+1) e^{j\omega t} d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-2}^{-1} \omega e^{j\omega t} d\omega + \int_{-2}^{-1} e^{j\omega t} d\omega\right] = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{jt}\int_{-2}^{-1} \omega \left(e^{j\omega t}\right)' d\omega + \frac{1}{jt} e^{j\omega t}\Big|_{-2}^{-1}\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{jt}\left[\omega e^{j\omega t}\Big|_{-2}^{-1} - \int_{-2}^{-1} e^{j\omega t} d\omega\right] + \frac{e^{-jt}}{jt} + \frac{e^{-j2t}}{jt}\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{e^{-jt}}{jt} + \frac{2e^{-j2t}}{jt} - \frac{1}{(jt)^2} e^{j\omega t}\Big|_{-2}^{-1} + \frac{e^{-jt}}{jt} + \frac{e^{-j2t}}{jt}\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[-\cancel{\frac{e^{-jt}}{jt}} + \frac{\cancel{2}e^{-j2t}}{jt} - \frac{e^{-jt}}{(jt)^2} + \frac{e^{-j2t}}{(jt)^2} + \cancel{\frac{e^{-jt}}{jt}} + \cancel{\frac{e^{-j2t}}{jt}}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x_2(t) = \frac{e^{-j2t}}{2\pi jt} - \frac{e^{-jt}}{2\pi (jt)^2} + \frac{e^{-j2t}}{2\pi (jt)^2}$$

και

$$x_3(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_3(\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_1^2 (\omega-1)e^{j\omega t}d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\int_1^2 \omega e^{j\omega t}d\omega - \int_1^2 e^{j\omega t}d\omega\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{jt}\omega e^{j\omega t}\Big|_1^2 - \frac{1}{(jt)^2}e^{j\omega t}\Big|_1^2 - \frac{1}{jt}e^{j\omega t}\Big|_1^2\right] =$$

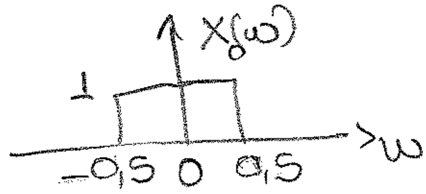
$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\cancel{2}e^{j2t}}{jt} - \cancel{\frac{e^{jt}}{jt}} - \frac{e^{j2t}}{(jt)^2} + \frac{e^{jt}}{(jt)^2} - \cancel{\frac{e^{j2t}}{jt}} + \cancel{\frac{e^{jt}}{jt}}\right]$$

$$= \frac{e^{j2t}}{2\pi jt} - \frac{e^{j2t}}{2\pi(jt)^2} + \frac{e^{jt}}{2\pi(jt)^2} = x_3(t)$$

για τα $X_1(\omega)$ και $X_4(\omega)$

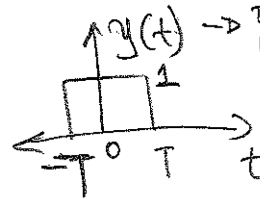
παρατηρω οτι το $X_1(\omega)$ ειναι μετατοπισμενος τετραγωνικος παλμος και αντεστραμμενος και το $X_3(\omega)$ ειναι μετατοπισμενος τετραγωνικος παλμος.

αν δηλαδη εχω



τοτε το $X_1(\omega) = -X_0(\omega+2,5)$ και $X_4(\omega) = X_0(\omega-2,5)$

(α) γνωριζω τον μετ. Fourier του συματος



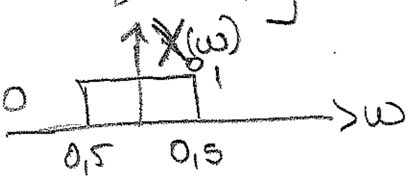
$y(t)$ → τετραγωνικος παλμος διαρκειας $2T$

$$y(t) = \begin{cases} 1 & |t| \le T \\ 0 & \text{αλλου} \end{cases} \xleftrightarrow{FT} \frac{2\sin(\omega T)}{\omega}$$

και (b) γνωριζω και την ιδιοτητα (δυικοτητα)

$$y(t) \xleftrightarrow{FT} 2\pi y(-\omega)$$

(c) και εχω το



πώς θα συνδυασω τα (α), (b), (c) για να βρω το $x_0(t)$?

ξεκινωντας απο τα (α) και (b).

$$y(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq T \\ 0 & \text{αλλιω} \end{cases} \xleftrightarrow{FT} Y(\omega) = \frac{2\sin(\omega T)}{\omega}$$

$$Y(t) \xleftrightarrow{FT} 2\pi\, y(-\omega)$$

$\Rightarrow$ στην $Y(\omega)$ οπου ω βαζω t

και στην $y(t)$ οπου t βαζω $-\omega$ και πολλαπλασιαζω

ολο το αυτο με 2π

$$Y(t) = \frac{2\sin(tT)}{t}$$

$$y(-\omega) = \begin{cases} 1 & |-\omega| \leq T \\ 0 & \text{αλλιω} \end{cases} \Rightarrow 2\pi y(-\omega) = \begin{cases} 2\pi & |\omega| \leq T \\ 0 & \text{αλλιω}. \end{cases}$$

και εχω το ζευγος

$$\frac{2\sin(tT)}{t} \xleftrightarrow{FT} 2\pi, \quad |\omega| \leq T \quad \overset{\text{διαιρω με } 2\pi}{\Longleftrightarrow}$$

$$\frac{\sin(tT)}{\pi t} \xleftrightarrow{FT} 1, \quad |\omega| \leq T$$

εγω εχω

$$X_0(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq 0{,}5 \\ 0 & \text{αλλιω} \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow T = 0{,}5$ αρα.

$$\frac{\sin(t \cdot 0{,}5)}{\pi t} \longleftrightarrow 1, \ |\omega| \leq 0{,}5$$

άρα για το $X_0(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \le 0{,}5 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$ το

$$x_0(t) = \frac{\sin(t/2)}{\pi t}$$

και το $X_1(\omega) = -X_0(\omega + 2{,}5)$

ιδιότητα μετατόπισης στη συχνότητα

$$e^{j\gamma t} x(t) \xleftrightarrow{FT} X(\omega - \gamma)$$

ιδιότητα γραμμικότητας

$$\alpha x(t) \longleftrightarrow \alpha X(\omega)$$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow x_1(t) = -e^{j(-2{,}5)t} x_0(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1(t) = -e^{-j\frac{5}{2}t} \frac{\sin(t/2)}{\pi t}$$

με τον ίδιο τρόπο το $x_4(t) = e^{j\frac{5}{2}t} \frac{\sin(t/2)}{\pi t}$

άρα

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) + x_4(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) = -e^{-j\frac{5}{2}t} \frac{\sin(t/2)}{\pi t} + \frac{e^{-j2t}}{2\pi jt} - \frac{e^{-jt}}{2\pi (jt)^2} + \frac{e^{-j2t}}{2\pi (jt)^2} +$$

$$+ \frac{e^{j2t}}{2\pi jt} - \frac{e^{j2t}}{2\pi (jt)^2} + \frac{e^{jt}}{2\pi (jt)^2} + e^{j\frac{5}{2}t} \frac{\sin(t/2)}{\pi t} =$$

$$= \frac{\sin(t/2)}{\pi t} \frac{e^{j\frac{5}{2}t} - e^{-j\frac{5}{2}t}}{2j} 2j + \frac{e^{j2t} + e^{-j2t}}{2\pi jt} - \frac{e^{j2t} - e^{-j2t}}{2\pi (jt)^2} +$$

$$+ \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2\pi (jt)^2} = \frac{\sin(t/2)}{\pi t} \sin\left(\frac{5}{2}t\right) 2j + \frac{1}{\pi t j} \cos(2t) - \frac{1}{\pi j t^2} \sin(2t) +$$

$+ \frac{1}{\pi j t^2} \sin t$. Χρησιμοποιώ την ταυτότητα

$$\sin(\theta)\sin(\varphi) = \frac{\cos(\theta - \varphi) - \cos(\theta + \varphi)}{2} \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{\cos\left(\frac{t}{2}-\frac{5t}{2}\right)-\cos\left(\frac{t}{2}+\frac{5t}{2}\right)}{\pi t \cancel{2}}\,\frac{\cancel{2}}{j} + \frac{1}{\pi t j}\cos 2t -$$

$$- \frac{1}{\pi j t^2}\sin(2t) + \frac{1}{\pi j t^2}\sin t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) = j\frac{\cos(-2t)}{\pi t} - j\frac{\cos(3t)}{\pi t} + \frac{1}{\pi t j}\cos(2t) -$$

$$- \frac{1}{\pi j t^2}\sin(2t) + \frac{1}{\pi j t^2}\sin t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) = \cancel{-\frac{\cos(-2t)}{j\pi t}} + \frac{\cos 3t}{j\pi t} + \cancel{\frac{\cos(2t)}{j\pi t}} -$$

$$- \frac{\sin(2t)}{\pi j t^2} + \frac{\sin t}{\pi j t^2} \xrightarrow{\cos(-x)=\cos x}$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = \frac{\cos(3t)}{j\pi t} + \frac{\sin t - \sin(2t)}{\pi j t^2}}$$