

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
Εφαρμοσμένα μαθηματικά για μηχανικούς
Γ. Τζιρίτας, Καθηγητής

11^η σειρά ασκήσεων
Απαντήσεις

Δίδεται ο μετασχηματισμός Laplace ενός γραμμικού και χρονικά αμετάβλητου συστήματος

$$H(s) = \frac{2\alpha s}{\alpha^2 - s^2},$$

με περιοχή σύγκλισης $-\alpha < \Re[s] < \alpha$. Ζητούνται τα ακόλουθα.

1. Να ευρεθεί η κρουστική απόκριση του συστήματος.

Απάντηση:

$$H(s) = \alpha \left(\frac{1}{\alpha - s} - \frac{1}{\alpha + s} \right).$$
$$h(t) = \alpha \left(e^{\alpha t} u(-t) - e^{-\alpha t} u(t) \right).$$

2. Υπάρχει ο μετασχηματισμός Fourier της κρουστικής απόκρισης του συστήματος; Αν ναι, για ποιά θετική συχνότητα η απόκριση είναι, κατά το μέτρο, μέγιστη; Αν υπάρχει ο μετασχηματισμός Fourier, να δοθεί η φάση του.

Απάντηση:

Ο μετασχηματισμός Fourier υπάρχει επειδή ο φανταστικός άξονας ανήκει στην περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού Laplace. Ο μετασχηματισμός Fourier είναι

$$\mathcal{H}(\omega) = \frac{2i\alpha\omega}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

Το μέτρο για συχνότητες θετικές είναι

$$|\mathcal{H}(\omega)| = \frac{2\alpha\omega}{\alpha^2 + \omega^2}, \omega > 0.$$

Το μέτρο είναι μέγιστο για $\omega = \alpha$. Η φάση είναι

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \omega > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \omega < 0 \end{cases}$$

3. Να αποδειχθεί ότι η συνέλιξη του $e^{-\alpha t} u(t)$ με το $e^{\alpha t} u(-t)$ ισούται με $y(t) = \frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha|t|}$.

Απάντηση:

Προκύπτει επειδή το γινόμενο των μετασχηματισμών Laplace είναι

$$\frac{1}{\alpha^2 - s^2}.$$

4. Να ευρεθεί η βηματική απόκριση του συστήματος, δηλαδή η απόκριση στο σήμα $u(t)$.

Απάντηση:

Ο μετασχηματισμός Laplace της βηματικής απόκρισης είναι

$$\frac{2\alpha}{\alpha^2 - s^2}.$$

Άρα η βηματική απόκριση είναι $e^{-\alpha|t|}$.

5. Να ευρεθεί η χρονική απόκριση του συστήματος με μετασχηματισμό Laplace

$$G(s) = 4\alpha^3 s Y^2(s).$$

Απάντηση:

$$G(s) = \frac{4\alpha^3 s}{(\alpha^2 - s^2)^2} = \alpha^2 \left(\frac{1}{(\alpha - s)^2} - \frac{1}{(\alpha + s)^2} \right).$$

$$g(t) = -\alpha^2 t \left(e^{\alpha t} u(-t) + e^{-\alpha t} u(t) \right) = -\alpha^2 t e^{-\alpha|t|}.$$