

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
Εφαρμοσμένα μαθηματικά για μηχανικούς
Γ. Τζιρίτας, Καθηγητής

10^η σειρά ασκήσεων
Απαντήσεις

Να ευρεθεί ο μετασχηματισμός Z των ακόλουθων σημάτων διακριτού χρόνου

1. $g_1(n) = a^{-n}u(-n) - a^n u(n)$
2. $g_2(n) = a^{-n}u(-n) - b^n u(n)$
3. $h_1(n) = a^{|n+1|} + a^{|n-1|}$
4. $h_2(n) = \frac{a^n + (-a)^n}{2} u(n)$
5. $h_3(n) = (-1)^n u(n)$
6. $h_4(n) = na^{|n|}$
7. $h_5(n) = a^{|n|} u(n+N)u(N-n)$

Για κάθε ένα από αυτά να ευρεθεί η περιοχή σύγκλισης και οι περιορισμοί που τυχόν απαιτούνται για τις παραμέτρους.

1. Για $|a| < 1$ και $|a| < |z| < \frac{1}{|a|}$,

$$G_1(z) = \frac{1}{1-az} - \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{a(z-z^{-1})}{(1-az)(1-az^{-1})}$$

2. Για $|ab| < 1$ και $|b| < |z| < \frac{1}{|a|}$,

$$G_2(z) = \frac{1}{1-az} - \frac{1}{1-bz^{-1}} = \frac{az-bz^{-1}}{(1-az)(1-az^{-1})}$$

3. Για $|a| < 1$ και $|a| < |z| < \frac{1}{|a|}$,

$$H_1(z) = \frac{(1-a^2)(z+z^{-1})}{1+a^2-2a(z+z^{-1})}$$

4. Για $|a| < |z|$,

$$H_2(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-az^{-1}} + \frac{1}{1+az^{-1}} \right) = \frac{1}{1-a^2 z^{-2}}$$

5. Για $1 < |z|$,

$$H_3(z) = \frac{1}{1+z^{-1}}$$

6. $h_4(n) = na^{|n|} = na^{-n}u(-n) + na^n u(n)$, οπότε για $|a| < 1$ και $|a| < |z| < \frac{1}{|a|}$,

$$H_4(z) = -\frac{az}{(1-az)^2} + \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2} = \frac{a(1-a^2)(z^{-1}-z)}{(1-az)^2(1-az^{-1})^2}$$

$$7. \quad \Gamma \backslash \alpha \quad z \neq 0, z \neq a, z \neq \frac{1}{a},$$

$$\begin{aligned} H_5(z) &= \sum_{n=0}^N a^n z^{-n} + \sum_{n=0}^N a^n z^n - 1 = \frac{1-(az^{-1})^{N+1}}{1-az^{-1}} + \frac{1-(az)^{N+1}}{1-az} - 1 \\ &= \frac{1-a^2-(1-az^{-1})(az)^{N+1}-(1-az)(az^{-1})^{N+1}}{1+a^2-2a(z+z^{-1})} \end{aligned}$$

$$\text{Av } z=a \stackrel{\text{\tiny{r}}}{=} z=\frac{1}{a} \text{ \tiny{u}} \varepsilon \text{ } |a| \neq 1$$

$$H_5(a)=H_5\left(\frac{1}{a}\right)=N+\frac{1-a^{2(N+1)}}{1-a^2}$$

$$\text{Av } z=a=\pm 1$$

$$H_5(\pm 1)=2N+1.$$